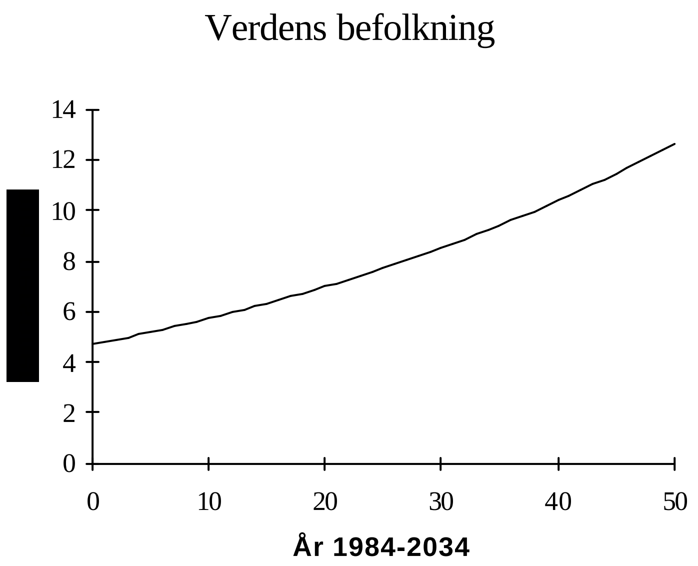
Naturfag - naturligvis

af

Kenneth Hansen

3. Vækstmodeller



I 1984 var verdensbefolkningen 4,7 mia.
og voksede med 1,8% om året

Hvornår vil der være 10 mia. på jorden

Vækstmodeller

Indhold

Øvelsesvejledninger

1. Indledning

I rapporten *Pendulets svingningstid* undersøgte vi sammenhængen mellem pendulets svingningstid T og pendullængden l. Vi opdagede, at hvis vi lavede en (l, T^2)-graf, så lå målepunkterne på en ret linie - vi havde altså en lineær sammenhæng mellem l og T^2.

I dette hæfte skal vi undersøge tre typer af sammenhænge: Lineære, eksponentielle og potentielle. Vi vil dog ikke bruge ordet 'sammenhæng', men i stedet udvikling. Dette hænger sammen med, at især eksponentielle udviklinger er gode til at beskrive vækstfænomener. Således vokser Jordens befolkning, antallet af bakterier i en romkugle og penge på en bankbog alle eksponentielt.

En matematiker udtrykker ofte sammenhænge som *funktioner*. En funktion er groft sagt en *regneforskrift*, en maskine, hvori man putter en x-værdi, hvorefter maskinen spytter en y-værdi ud.
Funktioner betegnes ofte som $f(x)$, $g(x)$ eller $h(x)$.
Eksempler på funktioner er

$$f(x) = 2x - 3 \qquad g(x) = x^2 \qquad h(x) = \sqrt{x}.$$

Man kan tegne *grafen* for en funktion i et koordinatsystem. Dette går ud på, at man udregner en hel masse funktionsværdier, plotter de opnåede punkter ind i et koordinatsystem, og forbinder punkterne med en blød kurve.
Ofte holder man rede på funktionsværdierne i et *sildeben*. Dette er en tabel, hvor x-værdierne står øverst og y-værdierne (eller funktionsværdierne) nederst. Et sildeben for funktionen f fra før kunne være:

x	-3	-2	-1	0	1	1,5	2	3	4
$f(x)$	-9	-7	-5	-3	-1	0	1	3	5

Lige en afsluttende bemærkning om matematik.
Matematik er, som tidligere nævnt, **ikke** en naturvidenskab. Men alligevel er der visse ligheder mellem matematik og naturvidenskaberne. En hypotese hedder indenfor matematik en *sætning*, og i stedet for et eksperiment lader vi et *bevis* afgøre sætningens rigtighed. De fleste beviser er udledninger af forskellige formler.

Opgaver

1.1 Lav sildeben og tegn graferne for funktionerne f, g og h fra før.

2. Den rette linie

Ligningen for den rette linie er

$$y = ax + b\,.$$

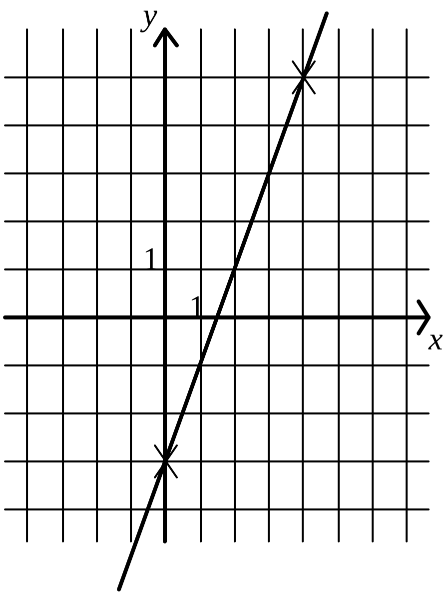
Tallet a kaldes *hældningskoefficienten*. Tallet b har ikke noget navn, men man kunne kalde det *skæringen med* y*-aksen*.
Vi skal nu undersøge dette i detaljer.

Eksempel

Vi vil tegne linien med ligningen $y = 2x - 3$.

Vi starter med at bemærke, at $a = 2$ og $b = -3$.

Den nemmeste måde at tegne en linie på er at finde to punkter på linien og forbinde disse med en lige streg, som gerne må fortsætte ud over punkterne.



Med linien til venstre kan vi nemt finde to punkter:

Vi sætter f.eks. $x = 0$ og får den tilsvarende y-værdi $y = 2 \cdot 0 - 3 = -3$. Det ene punkt er altså $(1,-1)$.

Det andet punkt kunne f.eks. være $(4, 2\cdot 4 - 3) = (4,5)$, hvor vi sætter $x = 4$.

Vi kan nu tegne linien i et koordinatsystem.

Vi vil nu undersøge den geometriske betydning af tallene a og b. Vi starter med b ved nedenstående øvelse:

Øvelse

Hvad er tallet b i linierne med ligningerne:

$$y = x + 1\,,\; y = 2x + 1\,,\; y = 3x + 1\,,\; y = 1\,,\; y = -x + 1\,,\; y = -2x + 1$$

Tegn linierne i samme koordinatsystem.
Hov, alle linierne skærer i y-aksen i samme punkt, $(0,1)$.

Som ovenstående øvelse kunne antyde, så har tallet b noget med liniens skæring med y-aksen at gøre. Vi formulerer det i følgende sætning:

Sætning 1

Linien med ligningen $y = ax + b$ skærer y-aksen i $(0,b)$

Bevis:

Linien skærer y-aksen, netop når x-koordinaten er 0. Vi sætter derfor $x = 0$ i liniens ligning og får, at

$$y = a \cdot 0 + b = b\ .$$

Linien skærer altså y-aksen i (0, b).

Vi skal nu kigge på hældningskoefficientens geometriske betydning:

Øvelse

Bestem hældningskoefficienten a og tegn i samme koordinatsystem linierne med ligningerne:

$$y = 2x - 2\ ,\ y = 2x - 1\ ,\ y = 2x\ ,\ y = 2x + 1\ ,\ y = 2x + 2$$

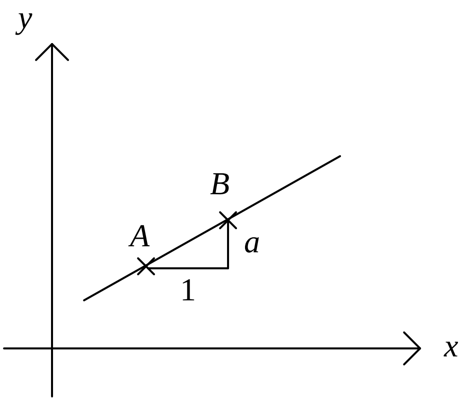
Som det ses af øvelsen, er **linier med samme hældningskoefficient parallelle**.

Øvelse

Tegn i samme koordinatsystem linierne med følgende ligninger:

$$y = -2x\ ,\ y = -x\ ,\ y = 0\ ,\ y = x\ ,\ y = 2x.$$

Det ses, at **linier med positiv hældning går opad**, mens **linier med negativ hældning går nedad**. Er hældningen 0, så er linien vandret. Endvidere, jo større hældningen er, jo stejlere er linien.



Populært sagt: Når vi går 1 enhed ud af x-aksen, så går vi a enheder op ad y-aksen - se figuren.

Bemærk, at hvis hældningskoefficienten a er negativ, så skal vi gå nedad.

Vi kan præcisere dette i følgende sætning:

Sætning 2

Betragt linien med ligningen $y = ax + b$

Tilvæksten i y-koordinaten ved en tilvækst på 1 for x-koordinaten er hældningskoefficienten a.

Bevis:

Betragt figuren nederst på forrige side.

Vi lader punktet A have koordinaterne $(x_{0,}\ y_0)$ og da A ligger på linien, så er A´s y-koordinat lig

$$y_0 = a \cdot x_0 + b.$$

Punktet B har x-koordinaterne $(x_{1,}\ y_1)$. Vi gik 1 x-aksen fra x_0 , så $x_1 = x_0 + 1$, og da B også ligger på linien, så er B's y-koordinat lig:

$$y_1 = a \cdot (x_0 + 1) + b = y_0 + a.$$

Det ses, at forskellen mellem de to y-koordinater netop er a:

$$y_1 - y_0 = y_0 + a - y_0 = a$$

Man er ofte i den situation, at man kender koordinaterne til to punkter på en linie, og at man skal finde ligningen for linien. Hertil kan benyttes formlen:

Sætning 3

Lad punkterne (x_0, y_0) og (x_1, y_1) ligge på linien med ligningen $y = ax + b$, og antag, at $x_0 \neq x_1$. Da gælder:

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Bevis:

Idet begge punkterne ligger på linien, så må der gælde, at

$$y_1 = ax_1 + b \quad \text{og} \quad y_0 = ax_0 + b$$

Vi manipulerer videre med disse to ligninger og starter med at trække dem fra hinanden. Vi får så

$$y_1 - y_0 = (ax_1 + b) - (ax_0 + b) = ax_1 + b - ax_0 + b = ax_1 - ax_0$$

$$\Downarrow$$

$$y_1 - y_0 = a(x_1 - x_0)$$
$$\Downarrow$$
$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Sætning 4

Lad den rette linie l have hældningskoefficienten a og gå gennem punktet (x_0, y_0). Da er

$$b = y_0 - ax_0$$

og ligningen for l bliver:

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

Bevis:

Vi ved, at ligningen for l er af formen $y = ax + b$ - problemet er bare, at vi ikke kender tallet b, men heldigvis kender vi a.

Vi sætter derfor punktet (x_0, y_0) ind i ligningen og får

$$y_0 = ax_0 + b \quad .$$
$$\Downarrow$$
$$b = -ax_0 + y_0$$

Dette udtryk for b kan vi nu sætte ind i den oprindelige ligning:

$$y = ax + b = ax - ax_0 + y_0$$
$$\Downarrow$$
$$y = a(x - x_0) + y_0$$

hvilket beviser sætningen.

Rustet med disse sætninger kan vi nu finde ligninger for alle mulige linier:

Eksempel

Bestem ligningen for den rette linie, som går gennem punkterne (-2,6) og (1,3).

Vi starter med at finde hældningskoefficienten:

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{3 - 6}{1 - (-2)} = \frac{-3}{3} = -1.$$

Sætning 5 fortæller os nu, at ligningen er

$$y = -1 \cdot (x - (-2)) + 6 .$$

Dette kan skrives lidt pænere som

$$y = -x + 5 .$$

Endelig kan man komme ud for at skulle finde skæringspunktet mellem to linier:

Eksempel

Find skæringspunktet mellem linierne l og m med ligningerne

$$l : y = 2x + 6 \qquad \text{og} \qquad m : y = -x + 3$$

Dette gøres ved at finde x-koordinaten til skæringspunktet først. Vi kan nemlig sætte de to liniers ligninger lig med hinanden og løse den derved fremkomne ligning

$$2x + 6 = -x + 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3x = -3 \qquad x = -1$$

y-koordinaten til skæringspunktet er ved indsættelse i en af liniernes ligninger:

$$y = 2(-1) + 6 = 4 .$$

Skæringspunktet er derfor $(-1,4)$.

Opgaver

2.1 Bestem en ligning for følgende linier:

a) l går gennem (2,4) og (8,10)

b) m går gennem $(7,-4)$ og $(1,-2)$

c) n går gennem $(-10,1)$ og $(-1,10)$

d) p går gennem (9,3) og (3,3)

e) q går gennem (0,4) og har hældningen 5

f) r går gennem (4,0) og har hældningen 8

2.2 To linier har ligningerne $y = 3x + 8$ og $y = -x - 12$.

a) Bestem liniernes skæringspunkt.

b) Tegn linierne i samme koordinatsystem.

c) Passede dit fundne skæringspunkt med graferne?

2.3 Grafen for en lineær funktion f går gennem punkterne $A = (-10,12)$ og $B = (9,22)$.

a) Bestem en regneforskrift for f.

b) Undersøg, om punktet $C = (7,19)$ ligger på grafen for f.

2.4 I Roskilde Kommune betaler beboerne for deres vandforbrug efter nedenstående bestemmelser. Ud over en fast afgift betales både en vandafgift og en vandledningsafgift, som begge afhænger af forbruget. I 1991 var taksterne:

Fast afgift:	91,50 kr.
Vandafgift:	5,20 kr. pr. 1000 liter vand.
Vandledningsafgift:	14,52 kr. pr. 1000 liter vand.

a) Bestem en regneforskrift for den funktion f, som angiver den samlede udgift til vand, målt i kr., som funktion af vandforbruget x, målt i 1000 liter.

En familie brugte 172000 liter vand i 1990.

b) Beregn familiens samlede udgift til vand i 1991 ved uændret forbrug.

Familien vil gerne nedsætte den samlede vandudgift for 1991 til 2500 kr.

c) Hvilket vandforbrug måtte familien så højst have i 1991?

2.5 En kunsthåndværker fremstiller en bestemt type krukker. Han vil levere 50 krukker pr. måned, hvis prisen sættes til 100 kr. stykket, og han vil levere 70 krukker pr. måned, hvis prisen sættes til 120 kr. stykket. Antallet af krukker, han leverer pr. måned, kaldes *udbuddet*, og det antages, at udbudet er en lineær funktion af prisen pr. krukke for priser mellem 80 kr. og 120 kr.

a) Tegn på grundlag af dette grafen for udbudsfunktionen i et koordinatsystem. Brug en (pris,udbud)-graf.

b) Bestem en regneforskrift for denne funktion.

Efterspørgslen på krukkerne er også en funktion af prisen. Det antages, at denne funktion er givet ved:

$$E(x) = -0.7x + 128 \quad , \quad 40 \le x \le 140$$

c) Bestem den pris, for hvilken det gælder, at udbud og efterspørgsel er lige store.

3. Lineære sammenhænge

Vi vil studere nogle situationer fra det virkelige liv, hvor lineære sammenhænge forekommer. Vi starter med et eksempel fra fysikken:

Eksempel (Ohm's lov)

En resistor (eller modstand) er en elektrisk komponent. Der er følgende sammenhæng mellem strømmen I og spændingsfaldet U over en resistor:

$$U = R \cdot I$$

Her kaldes størrelsen R for resistorens *resistans*.

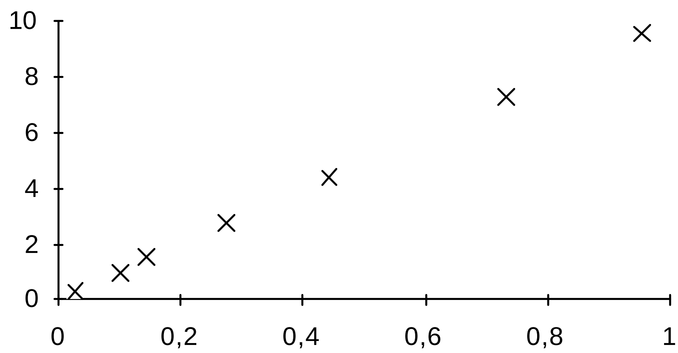
Denne lov, som i øvrigt kaldes Ohm's lov, er et eksempel på en lineær sammenhæng: Erstatter vi x med I og y med U, så er det jo ligningen for en ret linie med hældningskoefficienten R og skæringen 0 med y-aksen.

Antag, at vi i et forsøg har målt på en resistor og fundet følgende værdier:

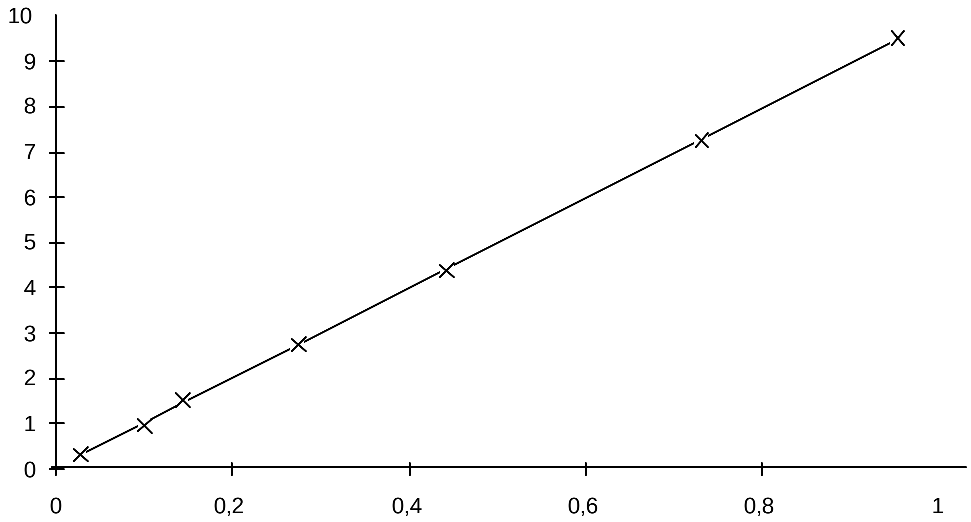
I (A)	0,027	0,100	0,142	0,274	0,442	0,731	0,954
U (V)	0,31	0,97	1,53	2,75	4,38	7,26	9,52

Hvad er nu resistansen for denne resistor?

Dette problem kan løses ved at indtegne målepunkterne på et stykke millimeterpapir: (Der er dog ikke anvendt millimeter-papir på figuren nedenunder!)



Desværre ligger punkterne ikke på en ret linie; der er små afvigelser, som skyldes måleusikkerhed osv.
For at finde R tegner vi derfor den bedste rette linie:



Vi aflæser to punkter **på linien** (ikke to målepunkter; de ligger jo ikke nødvendigvis på linien). Det er bedst, hvis disse to punkter ligger langt fra hinanden.
Her kan vi f.eks. bruge (2; 0,2) og (6; 0,6).
Ved at anvende sætning 3 så kan vi nu finde hældningskoefficienten:

$$a = \frac{6-2}{0,6-0,2} = \frac{4}{0,4} = 10$$

og resistansen R var altså på 10 Ω. (Resistans måles i Ohm (Ω)).

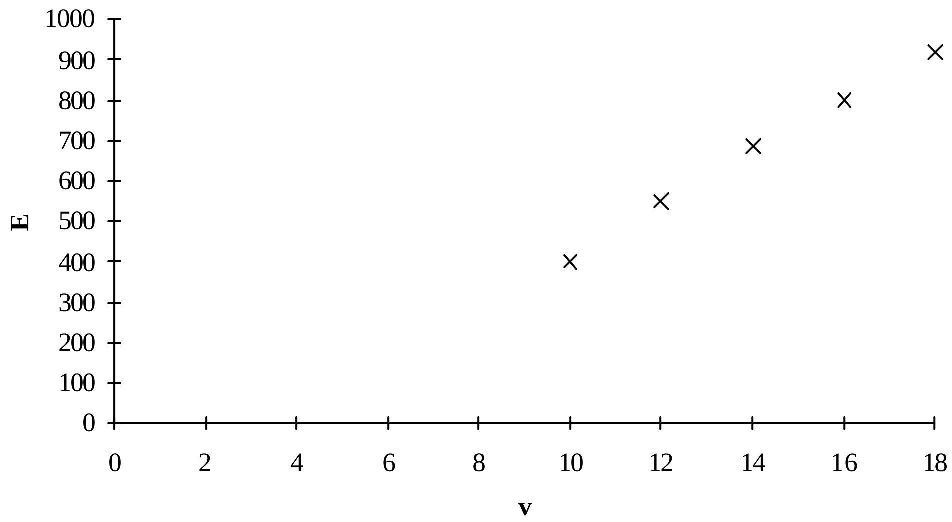
En sammenhæng af formen $y = a \cdot x$ kaldes ofte en *proportionalitet* (eller en *ligefrem proportionalitet*) mellem x og y. Størrelsen a kaldes så *proportionalitetskonstanten*.
Alternativt kan man sige, at i en proportionalitet er $b = 0$

Eksempel (Kalorieforbrug)

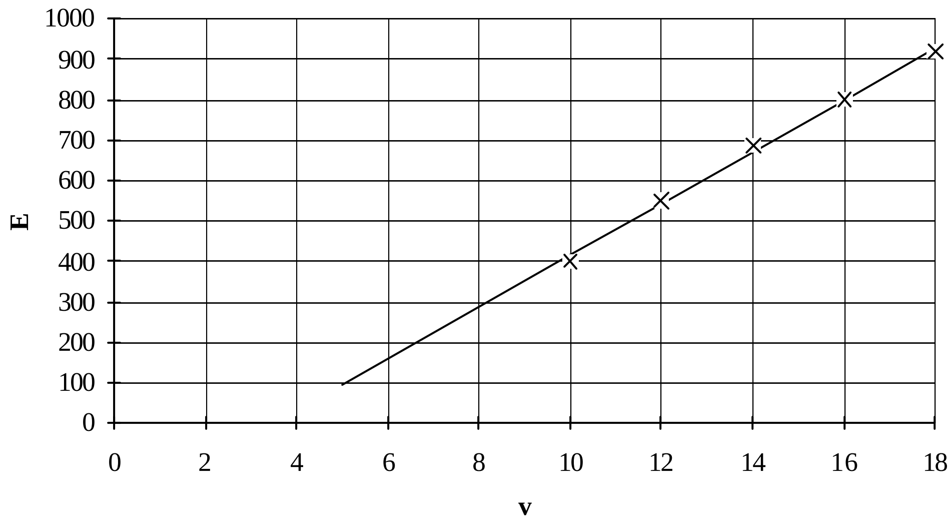
Nedenunder er vist sammenhængen mellem den hastighed v (i km/time), som en forsøgsperson løber, og hans kalorieforbrug E pr. time.

v	10	12	14	16	18
E	400	552	686	800	918

Man vil undersøge sammenhængen mellem v og E, og derfor indtegner man målepunkterne i et koordinatsystem:



Det ser ud til, at der er en lineær sammenhæng mellem v og E. Vi finder denne sammenhæng ved at tegne bedste rette linie og aflæse punkter til beregning:



Grafen ovenfor er ikke for god; men det ser ud til, at linien går gennem

(5 ; 100) og (12,8 ; 600).

Antager vi, at sammenhængen mellem v og E er af formen $E = a \cdot v + b$, så giver sætning 3 og 4, at

$$a = \frac{600 - 100}{12{,}8 - 5} = 64{,}10$$

$$b = 600 - 64{,}10 \cdot 12{,}8 = -220{,}51 .$$

Sammenhængen er altså $E = 64{,}10v - 220{,}51$

Bemærk, at E og v **ikke** er proportionale - idet b-værdien jo ikke er 0, men lig med $-220{,}51$.

Opgaver

3.1 En lodret hængende fjeder belastes med forskellige lodder, hvorved fjederen forlænges. I tabellen er der angivet sammenhørende værdier af loddets masse m (målt i g), og fjederens forlængelse x (målt i cm).

m	50	100	150	200	250	300
x	1,1	2,5	3,8	5,0	6,3	7,5

a) Afbild måleresultaterne på millimeter-papir.

b) Find ud fra grafen en sammenhæng mellem m og x.

c) Er m og x proportionale?

3.2 I en beholder er der luft, og sammenhørende værdier af luftens temperatur og tryk er målt. Resultaterne fremgår af tabellen - temperaturen T er målt i ^{0}C og trykket p i mmHg.

T	0	12	27	36	49	71	88	100	114	137
p	680	714	750	770	805	860	870	935	970	1030

Ifølge teorien er p en lineær funktion af T, men pga. måleusikkerheder passer dette ikke helt.

a) Indtegn resultaterne ovenfor på et stykke mm-papir.

b) Bestem en forskrift for p som funktion af T.

Den temperatur, der svarer til trykket 0 mmHg, kaldes det absolutte nulpunkt.

c) Bestem ud fra forskriften det absolutte nulpunkt.

3.3 På baggrund af et stort antal målinger foretaget i mange lande regner man med, at en persons maksimale pulsfrekvens er en lineær funktion af personens alger.
For en 20-årig er et maksimale pulsslag 200 slag pr. minut, og for en 60-årig er den 160 slag pr. minut.

a) Bestem en forskrift for den maksimale pulsfrekvens som funktion af alderen.

b) Tegn en (alder , maksimal pulsfrekvens)-graf.

c) Hvad er den maksimale pulsfrekvens for en 35-årig?

d) Hvilken alder svarer til en maksimal pulsfrekvens på 164 slag pr. minut?

3.4 To taxafirmaer A og B fastlægger deres takster forskelligt:

Firma A tager 7,00 kr. i startpenge og 7,50 kr. pr kørt km.
Firma B tager 12,00 kr. i startpenge og 3,50 kr. pr. kørt km.

Med $f(x)$ betegnes prisen for at køre x km med firma A. Med $g(x)$ betegnes prisen for at køre x km med firma B.

a) Angiv regneforskrifter for funktionerne f og g.

b) Løs uligheden $g(x) < f(x)$.

c) Hvad siger løsningen til uligheden om prisen på taxature med de to firmaer?

Et tredie firma C fastlægger taksten som: 7,00 kr. i startpenge, 10,00 kr. for den først kørte km og 6,00 kr. for hver af de næste km.

d) Indtegn i et koordinatsystem prisen for en tur med firma C som funktion af antal kørte km.

e) For hvor lange taxature er firma C det dyreste?

3.5 En *synodisk måned* er den tid, der går mellem to fuldmåner, eller, hvad der (næsten) er det samme, Månens omløbstid omkring Jorden.
Idet Månen langsomt bremses op i sin rotation omkring Jorden, kan man forvente, at længden af den synodiske måned langsomt aftager gennem årmillionerne.
En måde at måle, hvorledes den synodiske måned aftager, er ved at betragte forstenede muslinger. En muslingeskal er nemlig opdelt i perioder svarende til en synodisk måned, og som igen er opdelt i dag-vækstlag. Ved at optælle det gennemsnitlige antal dag-vækstlag i de forstenede muslinger kan man således finde ud af, hvorledes den synodiske måned har varieret gennem tiden.

I nedenstående tabel er angivet sammenhørende værdier af
t = forsteningens alder i mill. år
og
x = den synodiske måneds længde i døgn.

t	0	18	40	46	72	205	300	340	380	510
x	29,2	29,4	29,6	29,8	29,9	29,7	30,1	30,4	30,5	31,6

a) Gør rede for, om man med rimelighed kan antage, at der er en lineær sammenhæng mellem x og t.

b) Ifølge nutidige astronomiske observationer aftager den synodiske måneds længde med 2 millisekunder pr. århundrede. Er dette i overensstemmelse med målingerne ovenfor?

3.6 Man kommer engang i mellem ud for, at sammenhængen mellem to størrelser ikke er lineær; men at denne sammenhæng kan *transformeres* om til en lineær sammenhæng. Eksempelvis kan man undersøge et enzyms reaktionshastighed v som funktion af substratkoncentrationen c. (Et *enzym* er et protein, der virker som katalysator, typisk i en biologisk sammenhæng). Teoretiske overvejelser antyder, at sammenhængen mellem v og c er af formen

$$\frac{1}{v} = a\frac{1}{c} + b$$

altså en lineær sammenhæng mellem $\frac{1}{c}$ og $\frac{1}{v}$.

Nedenstående skema indeholder en række målinger af c og v:

c	137,0	99,5	67,6	26,2	13,6	10,0	7,9
v	22,0	20,5	19,0	12,5	9,0	7,0	6,0

a) Lav en tabel, som viser sammenhængen mellem $\frac{1}{c}$ og $\frac{1}{v}$.

b) Er der tale om en lineær sammenhæng mellem $\frac{1}{c}$ og $\frac{1}{v}$?

c) Bestem konstanterne a og b.

3.7 På et hus opsættes en plastictagrende, som sammensættes af to dele på hver 6 meter. Da plastic udvider sig ved opvarmning, må de to dele ikke sættes for tæt op ad hinanden, når de samles i et samlestykke. Af tabellen nedenfor fremgår f.eks., at afstanden mellem de to dele skal være 59 mm, hvis temperaturen er $-5°\text{C}$, når tagrenden sættes op. Afstanden d er med tilnærmelse en lineær funktion f af temperaturen T.

T (°C)	-30	-25	-20	-15	-10	-5	0
d (mm)	101	92	84	76	67	59	50
T (°C)	5	10	15	20	25	30	
d (mm)	42	34	28	17	8	0	

a) Lav en (T,d)-graf og undersøg, om d faktisk er en lineær funktion af T.

b) Bestem en regneforskrift for f.

c) Der er en trykfejl i tabellen, idet den opgivne afstand ved 15°C er forkert. Giv et skøn over den rigtige afstand i dette tilfælde.

4. Procenttal

Inden vi går i gang med den eksponentielle udvikling, så skal vi lige repetere procenttal.
Procenttal er en ofte benyttet måde at angive forhold på. Ordet *procent* kommer fra latin og betyder hundrededele.

Eksempel

Thomas' mor har et blomsterbed med 40 blomster. En dag river Thomas 12 af blomsterne op.
Hvor mange procent af blomsterbedet har Thomas ødelagt?

Svaret er, at den brøkdel af blomsterne, Thomas har ødelagt, er

$$\frac{12}{40} = 0,3$$

For at få angivet denne brøkdel i procent, så skal vi gange med 100%:

$$0,3 = 0,3 \cdot 100\% = 30\%$$

Man skal her tænke på, at $100\% = 1$ - der går jo 100 hundrededele på 1.

Når man angiver f.eks. stigninger eller fald i procent, så skal man passe lidt på:

Eksempel

Hansen er den lykkelige ejer af to aktier - en i Matmyst A/S og en i Mytmast A/S. Begge har en pålydende værdi på 10000 kr., og begge er nede i kurs 60.

Hvor meget er hver aktie værd?

Svar: Kurs 60 betyder, at aktierne i dag kan sælges til 60% af deres pålydende værdi. Hver af aktierne er altså

$$60\% \cdot 10000 = 0,60 \cdot 10000 = 6000 \text{ kr. værd.}$$

Aktien i Matmyst A/S stiger nu 10 points (eller 10 procentpoints). Hvad er den nu værd?

Svar: En stigning på 10 points betyder, at kursen stiger med 10 fra 60 til 70. Aktien er altså

$$70\% \cdot 10000 = 0,70 \cdot 10000 = 7000 \text{ kr. værd.}$$

Aktien i Mytmast A/S stiger med 10%. Hvor meget er den nu værd?

Svar: En stigning på 10% betyder, at aktiens værdi nu er $100\% + 10\% = 110\%$ af den gamle værdi. Aktien er altså

$$110\% \cdot 6000 = 1,10 \cdot 6000 = 6600 \text{ kr. værd.}$$

Opgaver

4.1 Omskriv nedenstående procenttal til decimaltal:

a)	45%	b)	17%	c)	72,4%	d)	0,16%
e)	0,01%	f)	1,01%	g)	192%	h)	0,0001%

Omskriv nedenstående decimaltal til procenttal:

i)	0,02	j)	0,352	k)	0,0352	l)	1,01
m)	0,101	n)	90	o)	1	p)	2

4.2
a) Hvor mange procent udgør 300 af 6000 ?
b) Hvor mange procent udgør 19 af 210 ?
c) Hvor meget er 15% af 230 ?
d) Hvor meget er 190% af 0,1 ?

4.3 En aktie med pålydende 50000,- ligger i kurs 140. Hvor meget er aktien værd?
Kursen siger nu med 40 points. Hvor meget er aktien nu værd?
Hvor mange procent af aktiens værdi udgjorde stigningen?

4.4 På Pladderballe Gymnasium er 25% af eleverne sproglige, 40% af eleverne matematikere og 35% af eleverne HF'ere. Der er 120 matematikere.
Hvor mange elever er der i alt?
Hvor mange sproglige og HF'ere er der?

5. Rentesregning

Som introduktion til eksponentiel udvikling vil vi kigge lidt på *rentesregning*.

Eksempel

Henrik sætter 1000 kr. ind på en bankbog til en rentefod på 6 % pr. år. Hvor mange penge står der på bankbogen efter 2 år?

At rentefoden (eller bare renten) er 6 % pr. år. betyder, at efter et år tager banken det beløb, der står på kontoen, udregner 6% heraf, og sætter det beløb ekstra ind på kontoen. Dette ekstra beløb kaldes også renten.
Efter et år får Henrik

$$1000 \cdot 6\% = 1000 \cdot 0{,}06 = 60 \text{ kr.}$$

i rente. Indestående efter et år er derfor $1000 + 60 = 1060$ kr.
Efter endnu et år får Henrik

$$1060 \cdot 6\% = 1060 \cdot 0{,}06 = 63{,}60 \text{ kr.}$$

og indestående efter to år er derfor $1060 + 63{,}60 = 1123{,}60$ kr.

Dette er en udmærket metode til at beregne renter med; men hvis vi vil finde indestående efter 45 år, så bliver det lidt kedeligt.

Lad os analysere ovenstående regnerier lidt nærmere. Efter 1 år havde Henrik

$$1000 + 60 = 1000 + 1000 \cdot 0{,}06 = 1000 \cdot (1 + 0{,}06) = 1000 \cdot 1{,}06$$

kroner på kontoen. Efter 2 år havde Henrik

$$1060 + 63{,}60 = 1060 + 1060 \cdot 0{,}06 = 1060 \cdot (1 + 0{,}06) = 1060 \cdot 1{,}06$$

Hmm - der er et mønster her:

Man kan finde beløbet på kontoen efter et år ved at gange med 1,06.

Dette tal 1,06 kaldes *fremskrivningsfaktoren*; vi fremskriver Henriks kapital (dvs. tilskriver rente) ved at gange med 1,06.

Dette gælder generelt:

Sætning 5

En kapital kan fremskrives med rentefoden $r\%$ ved at gange med fremskrivningsfaktoren $a = 1 + r\%$

Bevis:

Lad os kalde kapitalen for k. Renten, der tilskrives, må være $k \cdot r\%$, og det samlede beløb efter en rentetilskrivning er derfor

$$k + k \cdot r\% = k \cdot (1 + r\%) = k \cdot a$$

Rustet med denne formel kan vi beregne, hvor mange penge Henrik har efter 45 år:

Efter 1 år har Henrik $1000 \cdot 1{,}06$

Efter 2 år har Henrik $1000 \cdot 1{,}06 \cdot 1{,}06 = 1000 \cdot 1{,}06^2$.

Efter 3 år har Henrik $1000 \cdot 1{,}06^2 \cdot 1{,}06 = 1000 \cdot 1{,}06^3$

...

Efter 45 år har Henrik $1000 \cdot 1{,}06^{44} \cdot 1{,}06 = 1000 \cdot 1{,}06^{45}$

Indtastet på lommeregneren:

1000 $\boxed{\times}$ 1.06 $\boxed{y^x}$ 45 $\boxed{=}$

Resultatet bliver 13764,61 kr.

Dette eksempel giver anledning til *renteformlen*:

Sætning 6

En kapital k_0 til rentefoden $r\%$ er efter n rentetilskrivninger blevet til kapitalen

$$k_n = k_0 \cdot (1 + r\%)^n$$

Vi vil ikke bevise denne sætning, men i stedet lade læseren sig over**bevis**e af eksemplet ovenfor.

Man kalder ofte perioden mellem to rentetilskrivninger for en *termin*. I eksemplet med Henriks bankbog var terminen et år - der gik jo et år imellem rentetilskrivningerne.

Vi giver et par eksempler på anvendelse af sætning 6:

Regnede opgaver

Opgave: Niels indsætter 1000 kr. på en konto med årlig rente på 10%.

Hvor meget står der på kontoen efter 5 år?

Svar: Renteformlen giver

$$k_5 = 1000 \cdot (1+10\%)^5 = 1000 \cdot 1,10^5 = 1610,51$$

Der står altså 1610,51 kr. på kontoen efter 5 år.

Opgave: Jens får til sin 18 års fødselsdag en bankbog af sin grandtante. På bankbogen står der 4813,24 kr., den årlige rente er 5%, og grandtante Olga indsatte det oprindelige beløb, da Jens blev født. Hvor meget indsatte grandtante Olga?

Svar: Vi skal finde k_0 i renteformlen. $n = 18$, $k_{18} = 4813,24$ og $r = 5\%$, så dette kan gøres ved at omskrive renteformlen lidt:

$$k_{18} = k_0 \cdot (1+r)^{18} \quad \Leftrightarrow \quad k_0 = \frac{k_{18}}{(1+r)^{18}}$$

Indsættes vores tal, så fås

$$k_0 = \frac{4813,24}{(1+0,05)^{18}} = 2000,00$$

Grandtante Olga startede altså med at indsætte 2000,00 kr.

Opgave: I en reklame for en "Yngle-Penge-konto" lover Doggerbanken, at "1000 kroner bliver til 3000 kroner på kun 20 år".
Hvor meget giver Doggerbanken i årlig rente på en sådan konto?

Svar: Vi skal nu finde r i renteformlen:

$$k_n = k_0 \cdot (1+r)^n \;\Leftrightarrow\; (1+r)^n = \frac{k_n}{k_0} \;\Leftrightarrow\; 1+r = \sqrt[n]{\frac{k_n}{k_0}} \;\Leftrightarrow$$

$$r = \sqrt[n]{\frac{k_n}{k_0}} - 1$$

Indsættes værdierne $k_0 = 1000$, $k_{20} = 3000$ og $n = 20$, så fås

$$r = \sqrt[20]{\frac{3000}{1000}} - 1 \approx 0,0564 = 5,64\%$$

Den årlige rente er altså på ca. 5,64%.

Indenfor rentesregning er der mange fælder:

Eksempel

På en konto er den årlige rente på 12%. Hvad er den månedlige rente?

Svaret er **ikke** 1%.

Lad os se hvorfor: Hvis den månedlige rente er på 1%, så er den månedlige fremskrivningsfaktor på

$$a_{måned} = 1 + 1\% = 1 + 0{,}01 = 1{,}01.$$

Den årlige fremskrivningsfaktor er så på

$$a_{år} = a_{måned}{}^{12} = 1{,}01^{12} = 1{,}12682503 \approx 1{,}1268$$

Den årlige rente er derfor på

$$r_{år} = a_{år} - 1 = 1{,}1268 - 1 = 0{,}1268 = 12{,}68\%$$

og det er jo ikke det samme som 12%.

For at finde det rigtige svar skal vi tænke os lidt om. Lad os kalde den månedlige rente for r. Den månedlige fremskrivningsfaktor er nu $a_{måned} = 1 + r$, og den årlige fremskrivningsfaktor er

$$a_{år} = a_{måned}{}^{12} = (1 + r)^{12}$$

Idet den årlige rente er 12%, så er $a_{år} = 1 + 12\% = 1{,}12$.

Sætter vi disse to ting sammen:

$$(1 + r)^{12} = 1{,}12 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 + r = \sqrt[12]{1{,}12} \qquad \Leftrightarrow$$

$$r = \sqrt[12]{1{,}12} - 1 = 0{,}009488793 \approx 0{,}95\%$$

(På lommeregneren:

1,12 $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{y^x}$ 12 $\boxed{-}$ 1 $\boxed{=}$)

Eksempel

På en bankkonto er renten 3%, 5%, 2% og 6% i løbet af de fire første år. Hvor stor var den gennemsnitlige rente?

Med den gennemsnitlige rente forstås den rentesats som ville give der samme indestående som ovenstående, men hvor rentesatsen er konstant. For at finde denne, forestiller vi os, at vi indsætter f.eks. 100 kr. på kontoen.

I løbet af de fire første år trækker de 100 kr. renter og vokser til

$$100 \cdot (1 + 3\%) \cdot (1 + 5\%) \cdot (1 + 2\%) \cdot (1 + 6\%)$$

Var rentesatsen konstant lig med r, så skulle indestående ifølge renteformlen være $100\cdot(1+r)^4$. Sætter vi disse indeståender lig hinanden, så fås

$$100\cdot(1+3\%)\cdot(1+5\%)\cdot(1+2\%)\cdot(1+6\%)=100\cdot(1+r)^4$$

eller

$$1+r=\sqrt[4]{(1+3\%)(1+5\%)(1+2\%)(1+6\%)}=1,0398$$

Den gennemsnitlige rente var altså på 3,98%.

Bemærk, at startbeløbet på 100 kr. ikke betød noget for selve udregningen. Derfor undlader man normalt at anvende et startbeløb, men regner direkte på fremskrivningsfaktorerne.

Opgaver

5.1 I nedenstående skema forestiller man sig, at kapitalen k_0 indsættes i n terminer til rentesatsen r, hvorefter kapitalen er vokset til k_n. Udfyld de tomme felter:

k_0	r	n	k_n
2000	3%	12	
3500	1,25%	14	
	0,6%	4	500
	11%	18	1000000
100		10	1000
4000		4	7500
100		14	1000

5.2 Doggerbanken har netop lavet en ny kontoform, hvor renten det første år er 2%, renten den næste år er steget til 4 %, og fra det tredie år og fremover er rente på 7%.
Hvor stor er den gennemsnitlige rente i løbet af de første 5 år.

5.3 Firmaet Matmyst A/S's indtjening voksede i 1990 med 5%, i 1991 med 3%, men i 1992 faldt indtjeningen med 10%.
Hvor stor var den gennemsnitlige vækst i indtjeningen i løbet af denne periode på 3 år?

6. Eksponentiel udvikling

Renteformlen (sætning 6) er et udmærket eksempel på en *eksponentiel udvikling*:

> **Definition 7**
>
> En *eksponentiel udvikling* er en funktion med forskriften
>
> $$f(x) = b \cdot a^x$$
>
> a kaldes *grundtallet* eller *fremskrivningsfaktoren*.
> b kaldes *begyndelsesværdien*.
> $r = a - 1$ kaldes *vækstraten*.

Bemærk sammenhængen mellem renteformlen og forskriften for den eksponentielle udvikling:

$$k_n = k_0 \cdot (1+r)^n \qquad \text{og} \qquad f(x) = b \cdot a^x.$$

antallet af terminer n	svarer til	den uafhængige variabel x
kapitalen efter n terminer	svarer til	funktionsværdien $f(x)$
fremskrivningsfaktoren $1+r$	svarer til	fremskrivningsfaktoren a
startkapitalen k_0	svarer til	begyndelsesværdien b
rentefoden r	svarer til	vækstraten r

Men eksponentielle udviklinger kan også bruges til meget andet. Generelt gælder, at i situationer, hvor en størrelse vokser med en fast procentdel, så er der tale om en eksponentiel udvikling.

Eksempel

Jordens befolkning vokser med 1,8% om året. I 1984 var der 4,7 milliarder mennesker på Jorden. Hvor mange vil der være i år 2020?

Her har vi en eksponentiel udvikling. Begyndelsesværdien er 4,7 (milliarder), og fremskrivningsfaktoren er $a = 1 + 1{,}8\% = 1{,}018$.
Lader vi x betegne antal år efter 1984, og $f(x)$ befolkningstallet (i milliarder) i år x, så har vi $f(x) = 4{,}7 \cdot 1{,}018^x$
År 2020 svarer til $x = 2020 - 1984 = 36$, og

$$f(36) = 4{,}7 \cdot 1{,}018^{36} = 8{,}9$$

Der er derfor 8,9 milliarder mennesker på Jorden i 2020.

Vi kan også komme ud for situationer, hvor en størrelse aftager med en fast procentdel:

Eksempel

Arbejdsløsheden i Pladderballe Amt **aftager** med 2% om året. I 1995 er arbejdsløsheden på 20000 mennesker. Hvor stor er den i år 2020.

Igen lader vi x være antal år efter startåret - hér 1995, og $f(x)$ antal arbejdsløse i år x.
Begyndelsesværdien er $b = 20000$.
Væksten (eller 'rentefoden') er negativ, $r = -2\% = -0{,}02$, så fremskrivningsfaktoren er $a = 1 + r = 1 - 2\% = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$.
Forskriften bliver derfor $f(x) = 20000 \cdot 0{,}98^x$.

År 2020 svarer til $x = 2020 - 1995 = 25$, og derfor er der

$$f(25) = 20000 \cdot 0{,}98^{25} = 12069$$

arbejdsløse i år 2020.

Generelt gælder, at hvis fremskrivningsfaktoren $a > 1$, så vokser funktionen, men hvis $a < 1$, så aftager funktionen.

Ligesom i det lineære tilfælde er man ofte ude for, at man kender to punkter på grafen for en eksponentiel udvikling, og ud fra disse skal man finde forskriften, jvf. sætningerne 3 og 4. Her kan man bruge følgende sætning:

Sætning 8

Lad $f(x) = b \cdot a^x$ være en eksponentiel udvikling, med

$$f(x_1) = y_1 \quad \text{og} \quad f(x_2) = y_2$$

Da gælder, at

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} \quad \text{og} \quad b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

Beviset for denne sætning udelades.

Eksempel

Givet: f er en eksponentiel udvikling, med $f(2)=3$ og $f(5)=7$.

Find: Regneforskriften for f

Svar: $f(x)=b\cdot a^x$, da f er en eksponentiel udvikling

$(x_1,y_1)=(2,3)$ og $(x_2,y_2)=(5,7)$

$$a=\sqrt[x_2-x_1]{\frac{y_2}{y_1}}=\sqrt[5-2]{\frac{7}{3}}=1{,}326352403\approx 1{,}326$$

$$b=\frac{y_1}{a^{x_1}}=\frac{3}{a^2}=1{,}705310232\approx 1{,}705$$

Altså $f(x)=1{,}705\cdot 1{,}326^x$

Find: $f(11)$

Svar: $f(11)=1{,}705\cdot 1{,}326^{11}\approx 37{,}993$

En mere præcis værdi kan bruges ved at anvende værdierne for a og b, men med alle decimalerne:

$$f(11)=1{,}705310232\cdot 1{,}326352403^{11}\approx 38{,}111$$

På lommeregneren er det en god idé at gemme værdierne for a og b i en hukommelse med alle decimalerne. Dette kan gøres sådan:

a: $\boxed{(}$ 7 $\boxed{\div}$ 3 $\boxed{)}$ $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ $\boxed{(}$ 5 $\boxed{-}$ 2 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{STO}}$ 1

Værdien for a er nu gemt i hukommelsen 1 - displayet viser et lille M1 oppe i venstre hjørne.

b: 3 $\boxed{\div}$ $\boxed{\text{RCL}}$ 1 $\boxed{y^x}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{STO}}$ 2

b er nu gemt i hukommelse 2, og displayet viser et lille M2

$f(11)$: $\boxed{\text{RCL}}$ 2 $\boxed{\text{x}}$ $\boxed{\text{RCL}}$ 1 $\boxed{y^x}$ 11 $\boxed{=}$

Eksempel

Givet: $f(x) = b \cdot a^x$ med $b = 3{,}2$ og $f(4) = 9$

Find: Regneforskriften for f

Svar: $f(x) = 3{,}2 \cdot a^x$

a beregnes:

$$f(x_1) = b \cdot a^{x_1}$$

$\Updownarrow$

$$a = \sqrt[x_1]{\frac{f(x_1)}{b}}$$

$\Downarrow$

$$a = \sqrt[4]{\frac{9}{3{,}2}} \approx 1{,}295$$

Vi har nu $f(x) = 3{,}2 \cdot 1{,}295^x$

Opgaver

6.1 Tegn graferne for følgende eksponentielle udviklinger:

$f_1(x) = 2 \cdot 1{,}5^x$ $\quad f_2(x) = 3 \cdot 1{,}5^x$ $\quad g_1(x) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}7^x$ $\quad g_2(x) = 2 \cdot 0{,}7^x$

(Graferne bliver **ikke** rette linier)

6.2 I hver af nedenstående opgaver er f en eksponentiel udvikling. Bestem forskriften for f ud fra de givne oplysninger.

a) $f(8) = 6{,}3$ og $f(2{,}3) = 2$

b) $f(1{,}1) = 803$ og $f(2{,}4) = 921$

c) $f(-2) = 6$ og $f(2) = 3$

d) $f(0) = 6$ og $a = 4$

e) $b = 6$ og $f(3) = 12$

f) $a = 21{,}32$ og $f(2{,}41) = 11{,}24$

6.3 Ægyptens befolkning vokser eksponentielt og var i 1965 på 29,4 millioner og i 1970 på 33,3 millioner.

a) Opstil en forskrift for Ægyptens befolkning som funktion af tiden.

b) Hvor mange mennesker vil der være i Ægypten i år 2000.

c) Hvor stor er den årlige befolkningstilvækst i procent?

d) Hvor stor er den 10-årlige vækstrate?

6.4 I TV-Avisen den 8. september 1977 fremsatte en journalist følgende udtalelse om huslejen for en bestemt type lejlighed:

> *Den månedlige husleje er i øjeblikket på 1600 kroner. Hvis der ikke gribes ind fra politisk hold, vil huslejen stige med 15 % årligt. Det betyder, at huslejen i 1985 vil være på 5000 kroner.*

Har journalisten ret?

6.5 Antallet af landbrug i Danmark var i 1972 på 143093 og i 1976 på 130753. Det kan antages af antallet af landbrug følger en eksponentiel udvikling.

a) Bestem en forskrift for antallet af landbrug i Danmark.

b) Med hvor mange procent falder antallet af landbrug i Danmark pr. år?

c) Hvor mange landbrug er der tilbage i Danmark i år 2000?

7. Fordoblings- og halveringskonstant

Indenfor de eksponentielle udviklinger er det meget vigtigt at vide, hvor lang tid det tager, før funktionsværdien er halveret eller fordoblet.

Eksempel

Hr. T. Orsk opdrætter fisk. Han har dags dato 15000, og undersøgelser viser, at antallet vokser med 2 % om dagen. De yngler jo godt, de små pus.

Efter 1 dag har han	$15000 \cdot 1,02^1 = 15300$ fisk
Efter 2 dage har han	$15000 \cdot 1,02^2 = 15606$ fisk
Efter x dage har han	$f(x) = 15000 \cdot 1,02^x$ fisk

Hvornår mon han har **dobbelt** så mange fisk - altså omkring 30000 fisk?
Lad os prøve med 35 dage:

Efter 35 dage har han $15000 \cdot 1,02^{35} = 29998$ fisk

Den tid der går indtil han får **dobbelt** så mange fisk kalder vi *fordoblingskonstanten*, T_2. I dette tilfælde er $T_2 = 35$. Da det selvfølgelig er utilfredsstillende at prøve sig frem, så vil vi finde en formel, der kan udregne T_2.

Men først en mere generel definition.

Definition 9

Fordoblingskonstanten T_2 for en eksponentielt voksende udvikling er den x-tilvækst, der giver en fordobling af funktionsværdien : $f(x+T_2) = 2f(x)$

Halveringskonstanten $T_{1/2}$ for en eksponentielt aftagende udvikling er den x-tilvækst, der giver en halvering af funktionsværdien : $g(x+T_{1/2}) = \frac{1}{2}g(x)$

Vi husker på, at den eksponentielle udvikling $f(x) = b \cdot a^x$ er

voksende netop hvis $a > 1$
aftagende netop hvis $0 < a < 1$

Sætning 10

Lad den eksponentielle udvikling *f* være givet ved

$$f(x) = b \cdot a^x$$

a) Hvis *f* er voksende, så er fordoblingskonstanten givet ved

$$T_2 = \frac{\log 2}{\log a}$$

b) Hvis *f* er aftagende, så er halveringskonstanten givet ved

$$T_{1/2} = \frac{\log(0,5)}{\log a}$$

Det lidt mystiske 'log' er en logaritme. Vi stødte faktisk allerede på den, da vi snakkede *pH*.
Beviset for denne sætning udelades.

Eksempel

Fra forrige eksempel havde vi fiskeforskriften:

$$f(x) = 15000 \cdot 1,02^x$$

Dette er en eksponentiel udvikling med grundtal $a = 1,02$.
Vi finder fordoblingskonstanten ved ovenstående sætning.

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(1,02)} \approx 35,00$$

På lommeregneren:

$\boxed{\log}$ 2 $\boxed{/}$ $\boxed{\log}$ 1,02 $\boxed{=}$

Bemærk, at vi skulle kun vide, hvad grundtallet a var for at kunne finde fordoblingskonstanten. Og grundtallet a kan vi jo finde, bare vi kender vækstraten r.

Eksempel

Doggerbanken giver 6% i rente om året. Hvis Hr. T. Orsk sætter penge ind på en konto, hvornår er kontosummen fordoblet?

Det fås let af sætning 10 efter en udregning af grundtallet:

$$a = 1 + r = 1 + 6\% = 1 + 0,06 = 1,06$$

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(1{,}06)} \approx 11{,}90$$

Der går altså næsten 12 år før kontosummen er fordoblet.

Eksempel

T. Orsks gæld til Lakskøbing Bank **falder** 3% årligt. Hvornår er gælden halveret?

Det følger igen let ved brug af sætning 10, men først skal grundtallet udregnes

$$a = 1 + r = 1 + (-0{,}03) = 0{,}97$$

$$T_{1/2} = \frac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}97)} \approx 22{,}76$$

Så efter kun 23 år vil gælden i Lakskøbing bank være halveret.

Eksempel

T. Orsk har købt anparter i Terminal Original Business International System A/S (TOBIS A/S), og har fået lovet, at deres værdi vil være fordoblet efter kun 12 år. Med hvor mange procent stiger anparterne med pr. år?

Vi kender fordoblingstiden $T_2 = 10$, og skal i første omgang finde fremskrivningsfaktoren:

$$T_2 = \frac{\log 2}{\log a} \quad \Leftrightarrow \quad \log a = \frac{\log 2}{T_2} \quad \Leftrightarrow$$

$$a = \text{INV}\log\left(\frac{\log 2}{T_2}\right) = \text{INV}\log\left(\frac{\log 2}{10}\right) = 1{,}071773463 \approx 1{,}072$$

Vækstraten (eller renten) er derfor

$$r = a - 1 = 1{,}072 - 1 = 7{,}2\%$$

Anparternes værdi vokser altså med 7,2% om året.

På lommeregneren findes a sådan her:

2 $\boxed{\text{log}}$ $\boxed{\div}$ 10 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{log}}$ $\boxed{=}$

Eksempel

En eksponentiel udvikling f opfylder, at $f(2)=10$ og $f(10)=160$.
Bestem fordoblingskonstanen, men kun ved hovedregning.

Vi har, at fra $x=2$ til $x=10$ 16-dobles funktionsværdien. Men en 16-dobling er jo bare 4 fordoblinger. Da 4 fordoblinger tager 8 x-enheder, så må det tage 2 for en fordobling. Ergo, $T_2=2$.

Se figuren:

$$\begin{array}{ccccccccc} x=2 & \underset{T_2}{\longrightarrow} & x=4 & \underset{T_2}{\longrightarrow} & x=6 & \underset{T_2}{\longrightarrow} & x=8 & \underset{T_2}{\longrightarrow} & x=10 \\ 10 & & 20 & & 40 & & 80 & & 160 \end{array}$$

Opgaver

7.1 Find for nedenstående eksponentielle udviklinger fordoblingskonstanten, hvis der er tale om en voksende funktion, og halveringskonstanten, hvis der er tale om en aftagende funktion:

a) $f(x)=3\cdot 1{,}3^x$ b) $f(x)=0{,}97\cdot 25{,}9^x$

c) $f(x)=1{,}12\cdot 0{,}9^x$ d) $f(x)=0{,}9\cdot 1{,}12^x$

e) $f(x)=3{,}26\cdot 1{,}001^x$ f) $f(x)=3{,}26\cdot 0{,}998^x$

7.2 En eksponentiel udvikling f har halveringskonstanten 2,31 og opfylder, at $f(1{,}4)=2{,}6$. Bestem en forskrift for f.

7.3 En eksponentiel udvikling g har fordoblingskonstanten 1,1 og opfylder $g(4)=4$. Bestem en forskrift for g.

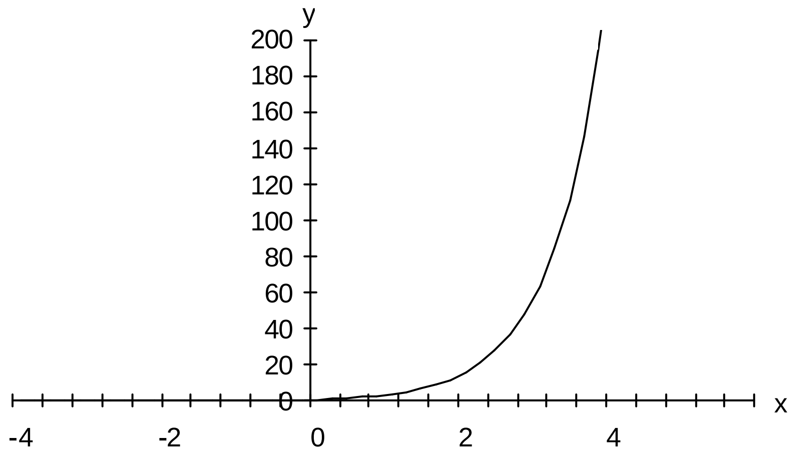
7.4 En eksponentiel udvikling h opfylder, at $h(8)=10$ og $h(12)=40$. Bestem, kun ved hovedregning, fordoblingskonstanten for h.

7.5 Den eksponentielle udvikling k opfylder, at
$$k(x+6)=8\cdot k(x)$$
uanset x's værdi. Bestem fordoblingskonstanten for k ved hovedregning.

8. Enkeltlogaritmisk papir

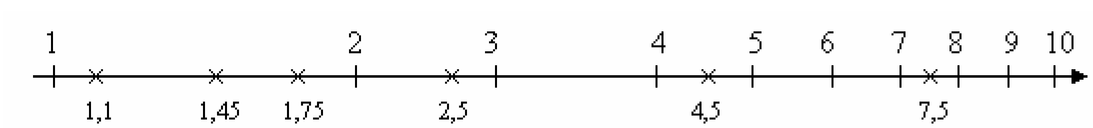
Betragt grafen for den eksponentielle udvikling *f* givet ved $f(x) = 1{,}5 \cdot 4^x$

x	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2	3	3,5
y	0,094	0,375	1,5	3	6	12	24	96	192



Grafen vokser ret hurtigt, så den er svær at tegne. Endvidere det er svært at se, om det rent faktisk er en graf for en eksponentiel udvikling.

I andre sammenhænge kommer man ud for at skulle afgøre, om nogle måledata følger en eksponentiel udvikling. Her ville det være rart at have et stykke værktøj, som kan afgøre dette.
Dette værktøj findes faktisk og hedder et **e**nkelt**l**ogaritmisk **k**oordinatsystem (forkortet ELK). I et ELK vil en eksponentiel udvikling være en ret linie.
I et ELK er *x*-aksen ganske normal, men *y*-aksen er en såkaldt *logaritmisk* akse.



En dekade af en sådan logaritmisk akse er vist ovenfor. (En *dekade* er et interval, som strækker sig fra f.eks. 1 til 10, 10 til 100, 100 til 1000, eller måske fra 0,001 til 0,01).

På en logaritmisk akse findes der ikke negative værdier eller nulpunkter. Til gengæld kan man selv bestemme, om man vil starte aksen ved 1; 100; 100000 eller måske ved 0,001.

Det er en ædel kunst at kunne anvende enkeltlogaritmisk papir, og man kan kun opfordre læseren til flittigt at øve sig.

Eksempel

Givet: Udviklingen de sociale og sundhedsmæssige udgifter i perioden 1960-1973:

Årstal	1960	1965	1970	1971	1972	1973
Udgifter (mill. kr.)	4356	8660	21330	25359	29391	33332

Kan ovenstående beskrives ved en eksponentiel udvikling?

Svar: Afsæt punkter direkte i et ELK. (Se næste side)

Ja, da punkterne **tilnærmelsesvis** ligger på en ret linie i et **elk f**ølger de **tilnærmelsesvis** en eksponentiel udvikling.

Find: Forskriften for den eksponentielle udvikling.

Svar: En eksponentiel udvikling er givet ved forskriften $f(x) = b \cdot a^x$, hvor vi skal finde a og b. (x er antal år efter 1960).

1 Find to punkter **på** linien ved aflæsning:

$$(x_1 \ , \ y_1) = (1963{,}7000) = (3{,}7000)$$

$$(x_2 \ , \ y_2) = (1969{,}18000) = (9{,}18000)$$

2 $a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \sqrt[9-3]{\frac{18000}{7000}} \approx 1{,}1705$

$b = \frac{y_1}{a^{x_1}} = \frac{7000}{a^3} \approx 4365$

3 Forskriften er da givet ved $f(x) = 4365 \cdot 1{,}1705^x$

Find: Giv en prognose for udgiften i 1975, hvis udviklingen fortsætter.

Svar: Dette kan gøres på to måder:

1) Indsæt årstallet 1975 i forskriften.

$$x = 1980 - 1960 = 15$$

$$f(15) = 4365 \cdot 1{,}1705^{15} = 46297$$

I år 1975 må man altså forvente, at de social- og sundhedsmæssige udgifter bliver på ca. 46297 mill. kr.

2) Find tallet 15 på x-aksen, og gå op og aflæs på y-aksen, og gå op og aflæs på y-aksen. Her aflæses omkring 45000.

Find: Fordoblingskonstanten T_2

Svar: Det kan gøres på to måder:

1) Aflæs to punkter, hvor den enes y-værdi er dobbelt så stor som den anden. f.eks. $(x_1\ ,\ y_1) = (\ 3{,}9\ ,\ 8000)$ og $(x_2\ ,\ y_2) = (\ 8{,}3\ ,\ 16000)$.

$$T_2 = x_2 - x_1 = 8{,}3 - 3{,}9 = 4{,}4$$

2) Brug formlen for T_2

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)} = \frac{\log(2)}{\log(1{,}1705)} \approx 4{,}4$$

Man undersøger altså, om der er en eksponentiel sammenhæng mellem to størrelser ved at indtegne på ELK-papir. Får man en ret linie, så er der en eksponentiel sammenhæng.

Opgaver

8.1 Tag et almindeligt stykke enkeltlogaritmisk papir og inddel y-aksen, således at den går fra 0,1 til 100. Inddel x-aksen, så den går fra -5 til 13 - dvs.1 cm pr. enhed.
Indtegn nedenstående punkter:

$A=(-3\,;0{,}4)$ $\quad B=(-1;1{,}4)$ $\quad C=(0{,}1\,;0{,}25)$
$D=(1{,}4\,;0{,}5)$ $\quad E=(3{,}8\,;0{,}17)$ $\quad F=(6\,;0{,}6)$
$G=(0\,;3)$ $\quad H=(7\,;1{,}1)$ $\quad I=(9\,;4)$
$J=(2\,;15)$ $\quad K=(6{,}2\,;9)$ $\quad L=(9{,}5\,;5{,}8)$
$M=(3{,}4\,;48)$ $\quad N=(11;16)$

Indtegn derefter liniestykkerne *AB, AC, CD, CE, EF, GH, HI, JK, KL, KM* og *KN*.
Hvis du har gjort ovenstående rigtigt, så skulle liniestykkerne danne et ord. Hvilket?

8.2 Prisen i øre på cigaren *Lille Aroma* i perioden 1970-1977 er angivet nedenfor:

År	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
Pris	58,5	62,0	64,5	69,0	72,0	76,0	80,0	87,0

a) Gør rede for, at cigar-prisen tilnærmelsesvist vokser eksponentielt med tiden.
b) Find en forskrift for denne eksponentielle udvikling.
c) Hvor meget koster mon en cigar i 1994?
d) Bestem, hvor lang tid der går, før cigarprisen fordobles.

8.3 Antallet af ansøgere til sygeplejerskolen i Hillerød er angivet i tabellen:

År	1984	1985	1986	1987	1988
Antal	564	465	373	303	257

a) Undersøg, om talmaterialet bedst følger en lineær eller en eksponentiel udvikling.
b) Giv en prognose for antallet af ansøgere i 1989.

8.4 Når man dyrker idræt i bjergene, kan den tynde luft være et problem, idet luftens indhold af ilt aftager med højden. Luftens indhold af ilt kan måles ved ilttrykket. Tabellen viser sammenhængen mellem ilttryk og højde over havoverfladen. Højden er angivet i meter, ilttrykket i mmHg.

Højde	0	500	1000	1500	2000	2500	3000
Ilttryk	150	140	131	123	115	107	100

a) Gør rede for, at illtrykket tilnærmelsesvist er en eksponentielt aftagende funktion af højden over havoverfladen.
b) Bestem ilttrykket i højden 2350 m over havoverfladen.
c) Bestem den højde, i hvilket ilttrykket er halvt så stort som ved havoverfladen.

8.5 Under passende omstændigheder kan opløsning af sukker i vand beskrives ved, at den uopløste sukkermængde aftager eksponentielt med tiden.
Af en oprindelig mængde på 200 gram sukker opløses de 100 gram i løbet af 2 minutter.
Hvor lang tid varer det, inden 180 gram af de oprindelige 200 gram er opløst?
(Vink: Indtegn på ELK og aflæs).

8.6 Se forsiden

Givet: Verdensbefolkningen var i 1984 på 4,7 mia. personer og voksede med ca. 1,8% om året.

a) Tegn en graf i ELK, der viser udviklingen i verdensbefolkningen, hvis denne vækst fortsatte fra 1984 til 2034.

b) Hvor mange personer vil der være i 2022? (Aflæs på grafen).

c) Hvornår vil der være 10 mia. mennesker på Jorden?

d) Med hvor mange procent vokser Jordens befolkning på et årti?

8.7 Latinamerikas befolkning var i 1950 på 162 millioner og i 1970 på 246 millioner. Dette befolkningstal vokser eksponentielt.

a) Opskriv en forskrift, som angiver Latinamerikas befolkning som funktion af antal år efter 1950.

b) Tegn en passende graf i ELK.

c) Hvornår vil der være 1000 millioner mennesker i Latinamerika?

d) Bestem fordoblingstiden grafisk.

9. Kernefysik

Et sted, hvor der optræder masser af eksponentielle udviklinger, er indenfor kernefysikken.

Vi husker på, at et atom består af en kerne og nogle elektroner, som svæver rundt om kernen. Selve kernen er positivt ladet og består af protoner og neutroner. Tilsammen kalder vi protoner og neutroner for *nukleoner*.

Hver enkelt type kerne (eller *nuklid*) har et symbol. F.eks. kan vi betragte en kerne, som indeholder 8 protoner og 8 neutroner. Denne kerne har ladningen 8 (fordi protonerne hver har en plus-ladning, og neutronerne er neutrale), og nukleontallet 16. Kernen er en oxygen-kerne, fordi atomnummeret (eller ladningen) er 8. Vi giver derfor kernen symbolet:

$$^{16}_{8}\mathrm{O}$$

Generelt bruger vi symbolet

$$^{A}_{Z}\mathrm{X}$$

for kernen af grundstoffet X med *A* nukleoner og ladningen *Z*.

Nogle lidt specielle 'kerner' er følgende partikler:

$^{1}_{1}\mathrm{H}$	- en proton	$^{1}_{0}\mathrm{n}$	- en neutron
$^{0}_{-1}\mathrm{e}$	- en elektron	$^{0}_{1}\mathrm{e}$	- en positron
γ	- en foton		

(En *positron* en positivt ladet elektron. Positroner optræder aldrig i den frie natur, men kan dannes ved kernefysiske forsøg.)
(En *foton* er en klump elektromagnetisk stråling)

Undersøgelser har vist, at de fleste grundstoffer forekommer i udgaver med forskelligt antal neutroner. Vi taler om *isotope* kerner - eller bare om *isotoper*.
F.eks. forekommer der i naturen følgende isotoper af kul:

$$^{12}_{6}\mathrm{C} \quad ^{13}_{6}\mathrm{C} \quad ^{14}_{6}\mathrm{C}$$

Idet forskellen mellem disse tre isotoper blot er nukleontallet, forkorter man ofte de tre isotoper til C-12, C-13 og C-14. (C-14 udtales 'kulstof-fjorten').

Hydrogen findes også i tre isotoper, nemlig H-1, H-2 og H-3. Som de eneste isotoper har H-2 og H-3 specielle navne - de kaldes *deuterium* og *tritium.*

Man kan godt få kerner til at reagere med hinanden. Sådanne *kernereaktioner* kræver meget energi for at kunne foregå, og de forekommer derfor kun under specielle omstændigheder.

Man har observeret, at i samtlige kernereaktioner gælder der nogle *bevarelsessætninger*:

1) **Det samlede nukleontal er bevaret.**
2) **Den samlede elektriske ladning er bevaret.**

Hvad betyder det? Jo betragt følgende to kernereaktioner:

$${}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \qquad \text{og} \qquad {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{2}_{1}\mathrm{H}$$

I den første reaktion er begge bevarelsessætninger opfyldt: Lægger man de øverste tal sammen, så ser man, at der er 5 nukleoner både på venstre og højre side. Ligeledes ser man, at der er 3 ladninger på begge sider (de nederste tal). Denne reaktion kan altså godt forekomme.

Den anden reaktion kan aldrig finde sted! Der er nemlig 6 nukleoner på venstre side, men kun 5 på højre side. Der mangler altså en nukleon!

Eksempel

I nedenstående kernereaktion dannes der en ukendt partikel X. Hvad er X?

$${}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{27}_{13}\mathrm{Al} \rightarrow {}^{30}_{15}\mathrm{P} + \mathrm{X}$$

Vi ser med det samme, at der på venstre side er $4+27=31$ nukleoner og $2+13=15$ ladninger. På højre side er der kun 30 nukleoner og 15 ladninger. Der mangler altså én nukleon og 0 ladninger.
Partiklen X er altså ${}^{1}_{0}\mathrm{n}$ - en neutron!

En vigtig type af kernereaktioner er de såkaldte *radioaktive henfald*. Nogle kerner viser sig at være ustabile, og de udsender derfor forskellige former for stråling for at blive stabile.
Der er tre former for radioaktive henfald: Alfa-, beta- og gamma-henfald.

Ved et alfa-henfald splittes kernen i to dele. Den ene del er altid en såkaldt α-partikel, som egentligt bare er en He-4-kerne, ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$.
Et typisk α-henfald er henfaldet af U-238:

$${}^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

Beta-henfaldet forekommer i to varianter. Den mest almindelige er β^--henfaldet, hvor der udsendes en elektron. Et eksempel er

$$^{137}_{55}\text{Cs} \rightarrow {}^{137}_{56}\text{Ba} + {}^{0}_{-1}\text{e}$$

Ser man efter, så er der 55 protoner før og 56 protoner efter. Samtidigt er der $137-55=82$ neutroner før, men kun $137-56=81$ neutroner efter. Dette tyder jo på, at det der egentligt er sket, er at en neutron er blevet lavet om til en proton og en elektron.
Denne proces kan man faktisk godt se, hvis man tager en **fri** neutron, som altså ikke sidder i en kerne. Den vil henfalde efter reaktionen:

$$^{1}_{0}\text{n} \rightarrow {}^{1}_{1}\text{H} + {}^{0}_{-1}\text{e}$$

β^+-henfaldet forekommer kun i nuklider, der er fremstillet i laboratoriet. I et sådant henfald udsendes der en positron, som er en positivt ladet elektron. En typisk reaktion er

$$^{98}_{45}\text{Rh} \rightarrow {}^{98}_{44}\text{Ru} + {}^{0}_{+1}\text{e}$$

I et β^+-henfald sker der det, at en proton omdannes til en neutron og en positron. Denne proces kræver energi, så derfor kan frie protoner (hydrogenkerner) heldigvis ikke henfalde. (I en β^+-aktiv kerne tages den nødvendige energi fra selve kernens bindingsenergi.)

En variant af β^+-henfaldet er *elektronindfangning* (også kaldet *Electron Capture* eller *K-Einfang*). I dette tilfælde 'spiser' kernen en elektron fra K-skallen, hvorved elektronen går sammen med en proton og danner en neutron. Et eksempel er

$$^{93}_{43}\text{Tc} + {}^{0}_{-1}\text{e} \rightarrow {}^{93}_{42}\text{Mo}$$

Den sidste type henfald er γ-henfaldet. I dette tilfælde er der tale om kerner med et energioverskud - *exciterede kerner* - der kommer af med dette overskud ved at udsende energien som en energipakke - en γ-stråle. Et eksempel er

$$^{137}_{56}\text{Ba}^* \rightarrow {}^{137}_{56}\text{Ba} + \gamma$$

En exciteret kerne er markeret med den lille stjerne (*) øverst.
Normalt sker der det, at en kerne henfalder ved en α- eller β-proces, hvorefter den nye kerne er exciteret og γ-henfalder.

På et *kernekort* kan man se, om de forskellige nuklider er stabile, eller om de henfalder ved en af de forskellige processer. Et kernekort er groft sagt et koordinatsystem. Ud af x-aksen har vi neutrontallet N, og op ad y-aksen har vi protontallet Z.

I hvert punkt i koordinatsystemet er angive, f.eks. ved en prik, om kernen henfalder ved en α-proces, eller hvad den nu gør.
Der findes et kernekort bag i hæftet.

Sammenhængen mellem radioaktivitet og eksponentielle udviklinger er den, at

antallet af radioaktive kerner aftager eksponentielt

Dette kaldes henfaldsloven.
I praksis kan man ikke i et forsøg måle antallet af kerner. I stedet måler man *aktiviteten*, som er antallet af henfald pr. sekund. (SI-enheden for aktivitet er Bq - en forkortelse for Bequerel).
Hertil bruger man et Geiger-rør og en Geiger-tæller. Dette er et rør, som afgiver et elektrisk signal, når det passeres af en radioaktiv stråle. Tælleren optæller så antallet af signaler i løbet af f.eks. et sekund.
En konsekvens af henfaldsloven er

aktiviteten aftager eksponentielt

Normalt er man ikke interesseret i fremskrivningsfaktoren i forbindelse med radioaktivitet, men kun i *halveringstiden*. Det viser sig, at forskellige nuklider har forskellige halveringstider, og at disse halveringstider kan variere temmeligt meget. F.eks. har nuklidet Fm-258 en halveringstid på 0,38 ms, mens K-40 har en halveringstid på $1{,}28 \cdot 10^{12}$ år .

Opgaver

9.1 Opskriv reaktionsskemaer for følgende *fire* kernereaktioner:

I. Pu-239 indfanger en neutron, hvorved der dannes en ny kerne.
II. Den i reaktion I dannede kerne indfanger en neutron, hvorved der dannes en ny kerne.
III. Den i reaktion II dannede kerne henfalder ved en β-proces, hvorved der udsendes en elektron.
IV. Den ved henfaldet i reaktion III dannede kerne henfalder ved en α-proces.

9.2 Et præparat indeholder den radioaktive isotop ${}^{24}_{11}\mathrm{Na}$, som udsender β^--stråling.
Ved henfaldet dannes en stabil isotop af magnesium (Mg).

a) Opskriv reaktionsligningen.

Halveringstiden er 15,0 timer. Til tiden $t = 0$ er aktiviteten 30 MBq.

b) Bestem aktiviteten til tiden $t = 24{,}0$ timer. (Brug ELK).

9.3 Terbium-isotopen $^{151}_{65}Tb$ henfalder ved udsendelse af en α-partikel til grundstoffet europium (Eu).

a) Skriv reaktionsskemaet for henfaldet.

Aktiviteten fra en prøve af Tb-151 måles. Til tiden $t = 0$ s er aktiviteten 140 Bq, mens den til tiden t = 60 s er 16 Bq.

b) Bestem halveringstiden for Tb-151.

c) Bestem den tid, der går, indtil aktiviteten er faldet til 10% af den oprindelige.

9.4 Når man skal fremstille frie neutroner, så er den letteste måde at bombardere noget Be-9 med α.partikler. Herved dannes der to nye partikler, hvoraf den ene er en neutron.
Opskriv reaktionsskemaet.

9.5 Kulstof-14 (C-14) anvendes indenfor arkæologien til at bestemme organiske materialers alder. Naturligt kulstof indeholder de stabile isotoper C-12 og C-13, samt den radioaktive isotop C-14.
De relative forekomster af de tre isotoper er 98,9% af C-12, 1,1% af C-13 og $1{,}37 \cdot 10^{-10}\%$ af C-14.

C-14 skabes i atomsfæren ved, at nitrogenkerner (N-14) bombarderes med neutroner fra kosmisk stråling. Herved dannes protoner og C-14-kerner

a) Opskriv reaktionsskemaet for denne reaktion.

C-14 henfalder til N-14.

b) Opskriv reaktionsskemaet for dette henfald. Hvilken type henfald er der tale om?

Da produktionen og henfaldet af C-14 er omtrent lige store, regner man med, at procentindholdet af C-14 i naturligt kulstof har holdt sig konstant i atmosfæren. Det samme gælder også i levende organismer, som jo hele tiden udveksler kulstof med atmosfæren. I døde organismer derimod sker der ingen udveksling af kulstof. Derfor må procentindholdet af C-14 aftage på grund af henfald.
Man ved, at 1 kg naturligt kulstof fra en levende organisme har en aktivitet fra C-14 på 226 Bq
Halveringstiden for C-14 er 5730 år.

c) Lav en graf på ELK, som viser, hvorledes aktiviteten af C-14 aftager.

d) 1 kg af kulstof fra Grauballe-manden har en aktivitet på 185 Bq. Hvor gammel er han?

9.6 Mængden af et bestemt radioaktivt materiale aftager eksponentielt med tiden. Efter 6 timer er 70% af stoffet tilbage.

a) Hvor mange procent af stoffet er tilbage efter 18 timer?

b) Efter hvor lang tid er 5% af stoffet tilbage?

c) Hvad er halveringstiden?

9.7 I begyndelsen af 1980 deponeres forskellige radioaktive isotoper. Som bekendt aftager mængden af en radioaktiv isotop eksponentielt med tiden.

a) Der deponeres 2,00 g af isotopen Sr-90, der har en halveringstid på 28 år.
Hvor mange gram vil der være tilbage af denne isotop i begyndelsen af år 2000?
I hvilket år vil der være 0,80 g tilbage af det deopnerede Sr-90?

b) Ligeledes deponeres et kvantum Ni-63, der har halveringstiden 92 år.
Hvis der i begyndelsen af år 2020 viser sig at være 1,45 g tilbage, hvor mange gram blev så deponeret i 1980?

c) Endelig deponeres 2,00 af Pb-210.
Bestem halveringstiden for denne isotop, idet der antages, at der i begyndelsen af år 2022 vil være 0,50 g tilbage.

10. Potentiel udvikling

Vi vil nu betragte potentielle udviklinger.

Definition 11

Lad f have forskriften

$$f(x) = b \cdot x^a \qquad x > 0$$

f kaldes en potentiel udvikling med eksponent a

Potentielle udviklinger optræder sjældent i forbindelse med vækst. Derimod er der mange steder i fysik og biologi, hvor potentielle sammenhænge er relevante.

Eksempel

Hvis du har kørekort, så ved du forhåbentligt, at jo hurtigere en bil kører, jo længere er bremselængden. Sammenhængen er faktisk

$$B = B_1 \cdot v^2$$

hvor v er hastigheden og B er bremselængden.

Dette er en potentiel udvikling, og idet eksponenten er 2, så kan man faktisk se, at hvis hastigheden fordobles, så firdobles bremselængden ($2^2 = 4$).

Vi vil i det følgende finde formler og lignende, som kan hjælpe med at behandle potentielle udviklinger. Nogle af sætningerne minder faktisk om tilsvarende sætninger for eksponentielle udviklinger.

Sætning 12

Lad f være en potentiel udvikling: $f(x) = b \cdot x^a$

Lad $f(x_1) = y_1$ og $f(x_2) = y_2$

Så findes a og b ved:

$$a = \frac{\log y_2 - \log y_2}{\log x_2 - \log x_1} \qquad b = \frac{y_1}{{x_1}^a}$$

Vi beviser ikke denne sætning.

Eksempel

Givet: f er en potentiel udvikling opfyldende $f(4) = 35$ og $f(8) = 100$.

Find: Forskriften for f

Svar: Af ovenstående sætning får vi

$$a = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1} = \frac{\log 100 - \log 35}{\log 8 - \log 4} \approx 1{,}514$$

og

$$b = \frac{y_1}{x_1{}^a} = \frac{35}{4^{1{,}514}} \approx 4{,}288$$

Forskriften er altså

$$f(x) = 4{,}288 \cdot x^{1{,}514}.$$

På lommeregneren ville vi taste:

a:	$\boxed{(}$	100	$\boxed{\log}$	$\boxed{-}$	35	$\boxed{\log}$	$\boxed{)}$	$\boxed{\div}$
	$\boxed{(}$	8	$\boxed{\log}$	$\boxed{-}$	4	$\boxed{\log}$	$\boxed{)}$	$\boxed{=}$

Vi gemmer a i den første hukommelse: $\boxed{\text{STO}}$ 1

b: 35 $\boxed{\div}$ 4 $\boxed{y^x}$ $\boxed{\text{RCL}}$ 1 $\boxed{=}$

Hvor eksponentielle udviklinger gav rette linier på **enkeltlogaritmisk papir**, så giver potentielle udviklinger rette linier på **dobbeltlogaritmisk papir**:

Et **do**bbelt**l**ogaritmisk **k**oordinatsystem (DOLK) er et koordinatsystem, hvori begge akserne er logaritmiske.

Eksempel

I tabellen nedenfor er angivet omløbstiden T og afstanden R til Saturn for nogle af Saturns måner. (T er målt i døgn og R i Saturn-radier).

Måne	T	R
Enceladus	1,37	3,9
Tethys	1,89	4,9
Dione	2,74	6,2
Rhea	4,52	9,7
Titan	15,95	20,2
Hyperion	21,28	24,5
Iapetus	79,33	58,9

Kan ovenstående beskrives ved en potentiel udvikling?

Ja, plotter man T ad x-aksen og R ad y-aksen i et DOLK, så får man en ret linie.

Forskriften for den potentielle udvikling findes:

Punkterne $(x_1, y_1) = (2\,; 5{,}4)$ og $(x_2, y_2) = (15\,; 20)$ aflæses på selve linien. Sætning 12 fortæller nu, at

$$a = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1} = \frac{\log 20 - \log 5{,}4}{\log 15 - \log 2} \approx 0{,}6498$$

og

$$b = \frac{y_1}{{x_1}^a} = \frac{5,4}{2^{0,6498}} \approx 3,442$$

Ergo er sammenhængen mellem T og R givet ved

$$R = 3,442 \cdot T^{0,6498}$$

Givet: Saturn-månen Phoebe har omløbstiden 550,5 døgn.

Find: Afstanden fra Phoebe til Saturn.

Svar: Vi indsætter $T = 550{,}5$ i ovenstående sammenhæng og får

$$R = 3,442 \cdot 550{,}5^{0,6498} \approx 207,9$$

Phoebe befinder sig altså ca. 207,9 Saturn-radier fra Saturn.

Opgaver

10.1 Tag et stykke DOLK-papir, og inddel x-aksen i dekaderne 1 - 10 - 100 og y-aksen i dekaderne 0,1 - 1 - 10 - 100.

Indtegn derefter punkterne

$A = (2\,;22)$	$B = (5\,;40)$	$C = (10\,;66)$
$D = (3{,}2\,;11)$	$E = (7{,}8\,;19)$	$F = (18\,;36)$
$G = (3{,}8\,;7)$	$H = (10\,;13)$	$I = (24\,;22)$
$J = (9\,;2)$	$K = (16\,;6{,}8)$	$L = (42\,;9)$
$M = (56\,;5{,}6)$	$N = (95\,;2{,}4)$	$P = (18\,;0{,}8)$
$Q = (11\,;1{,}1)$	$R = (11\,;1{,}9)$	

Indtegn endelig liniestykkerne *AB, BC, BE, DE, EF, GH, HI, GJ, HK, IL, MN, NP, PQ* og *QR*.

Herved dannes der et ord - hvilket?

10.2 Hvilke af nedenstående funktioner har en graf, som er en ret linie i

a) et almindeligt koordinatsystem?
b) et enkeltlogaritmisk koordinatsystem?
c) et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem?

$f(x) = x^3$	$g(x) = 3x - 4$	$h(x) = \sqrt{x}$
$i(x) = 2 \cdot 7^x$	$j(x) = \dfrac{5}{3^x}$	$k(x) = \dfrac{5}{\sqrt[3]{x}}$
$l(x) = \sqrt{x} - 4$	$m(x) = 5$	$n(x) = 2x\sqrt{x}$

10.3 Tabellen nedenfor viser nogle funktionsværdier for en funktion f:

x	0,2	0,5	3	7	8
$f(x)$	2,7	4	7,9	11	12

Gør rede for, at f tilnærmelsesvist er en potentiel udvikling, og find en forskrift for f.

10.4 En potentiel udvikling f opfylder, at

$$f(2)=8 \quad \text{og} \quad f(3)=18$$

a) Bestem en forskrift for f.

b) Bestem $f(7)$ og $f(0{,}8)$

c) Løs ligningen $f(x)=2$.

10.5 I bogen *Elektriske installationer* af E. Hviid Christensen findes nedenstående tabel over sammenhængen mellem elektriske pærers effektforbrug, målt i Watt, og deres lysstrøm, målt i lumen.

Effekt	15	25	40	60	75	100
Lysstrøm	130	240	430	730	980	1380

a) Gør rede for, at lysstrømmen som funktion af effektforbruget med tilnærmelse kan beskrives ved en funktion af formen

$$f(x)=b\cdot x^{a}$$

b) Bestem tallene a og b.

c) Med hvor mange procent øges lysstrømmen, når effektforbruget fordobles?

d) Med hvor mange procent skal effektforbruget forøges, hvis lysstrømmen ønskes fordoblet?

10.6 En funktion f opfylder

$$f(2)=7{,}2 \quad \text{og} \quad f(4)=3{,}1$$

Bestem $f(5)$, når det oplyses, at

a) f er en lineær funktion

b) f er en eksponentiel udvikling

c) f er en potentiel udvikling.

10.7 Tabellen viser for såkaldt 3-slået polyester tovværk sammenhængen mellem tovværkets diameter d (målt i mm) og tovværkets brudstyrke b (målt i kg).

d	4	5	6	7	8	10	12

b	250	400	600	750	1000	1550	2250
d	14	16	18	20	22	24	26
b	3200	4000	4700	6000	7100	8600	10000

a) Undersøg, om der er en lineær sammenhæng mellem d og b.

b) Undersøg, om der er en eksponentiel sammenhæng mellem d og b.

c) Undersøg, om der er en potentiel sammenhæng mellem d og b.

d) Forudsig brudstyrken for tovværk med diameteren 30 mm.

10.8 Nedenstående tabel viser for en række forskellige pattedyr sammenhørende værdier af legemsvægt M i kg og iltforbrug V i liter ilt pr. time:

dyr	legemsvægt M (kg)	iltforbrug V (L/kg)
mus	0,025	0,041
rotte	0,290	0,25
hund	11,7	3,87
menneske	70	14,76
hest	650	71,10
elefant	3833	268,00

a) Indtegn tallene i et DOLK. Lav en (M,V) -graf.

b) Konklusion på a)?

c) Hvad er iltforbruget for en hval med massen 10000 kg.

d) Hvad er iltforbruget for en spidsmus med massen 1,0 g ?

Ved intensiteten af et pattedyrs stofskifte forstår dets iltforbrug pr. kilogram legemsvægt, dvs. $I = \dfrac{V}{M}$.

e) Beregn intensiteten for de 6 pattedyr ovenfor.

f) Indtegn resultaterne i en (M, I) -graf i et ELK.

g) Gør rede for, at intensiteten af et pattedyrs stofskifte er større, jo mindre dyret er.

h) Hvorfor snakker Mickey Mouse med en meget hurtig stemme?

i) "En lille og vågen er bedre end en stor og doven". Passer dette?

11. Logistisk vækst

Som tidligere nævnt vokser befolkninger og andre populationer gerne eksponentielt. Men den eksponentielle model er ved nærmere eftertanke

problematisk. F.eks. kan Jordens befolkning ikke vokse uhæmmet, for det er der ganske simpelt ikke plads eller ressourcer til.
En mere realistisk model er den *logistiske vækst*.

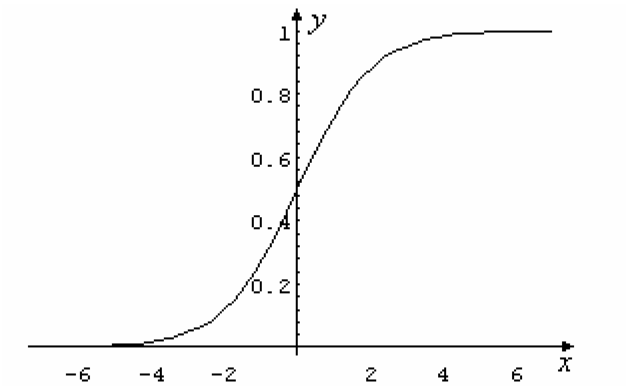
Definition 13

En *logistisk sammenhæng* er en sammenhæng af formen

$$f(x) = \frac{M}{1 + b \cdot a^x}$$

Den eneste af de tre konstanter *a*, *b* og *M*, der har en simpel tolkning er *M* - det er nemlig *populationens øvre grænse*.

Nedenfor er vist en typisk logistisk kurve $(a = b = M = 1)$.



Analyserer man denne graf, så er der tale om en næsten eksponentiel vækst indtil vendepunktet $x = 0$. Herefter vokser grafen meget mere hæmmet, og den nærmer sig langsomt den øvre grænse *M*.

Der findes ikke noget 'logistisk papir', så det er noget besværligt at afgøre, om en størrelse vokser logistisk:

Eksempel

I tabellen nedenfor er angivet USA's befolkningstal i tusinder i perioden 1790-1950:

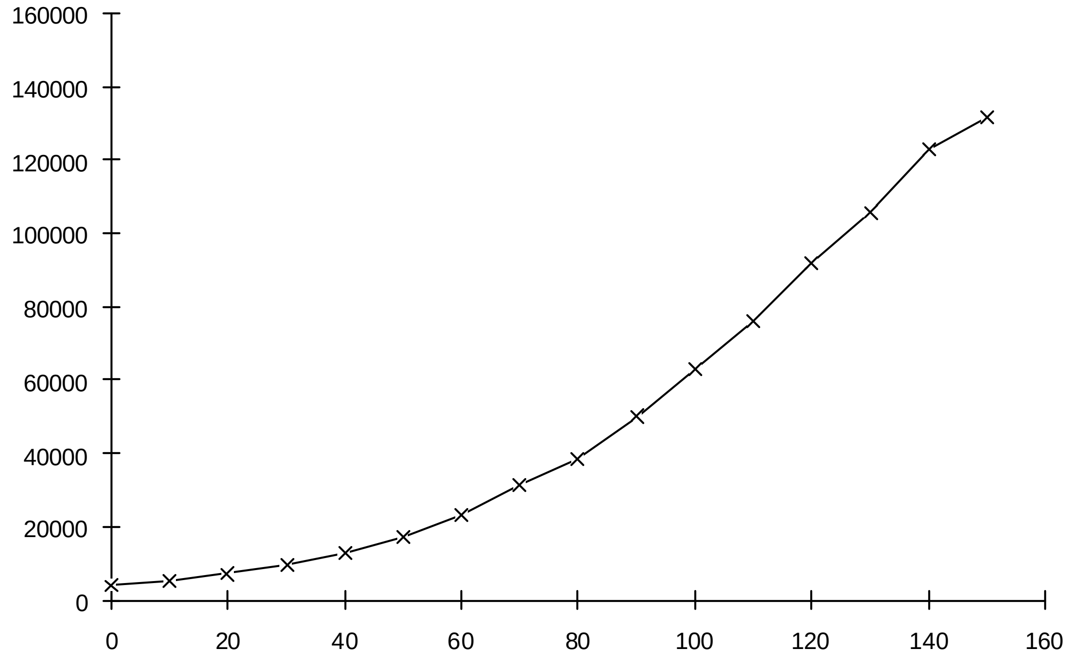
år	1790	1800	1810	1820	1830	1840

befolkn.	3929	5308	7240	9638	12866	17096

år	1850	1860	1870	1880	1890	1900
befolkn.	23192	31443	38558	50156	62948	75995

år	1910	1920	1930	1940	1950	
befolkn.	91972	105711	122775	131669	150697	

Grafen for disse data er angivet nedenfor - x-aksen angiver antal år efter 1790 og y-aksen befolkningstallet i tusinder.



Grafen ligner en del af en logistisk kurve.
En kompliceret matematisk analyse viser, at $M = 197200$, hvilket antyder, at USA's maksimale befolkning er på 197,2 mill. mennesker.
Dette holder dog ikke, i 1980 var USA's befolkning på 226,5 millioner.
Dette kan man forklare ved, at den kraftige mekanisering af USA's landbrug i efterkrigstiden har øget mængden af ressourcer og dermed bæreevnen for USA's befolkning.

Facitliste

1.1 Graferne udelades. Sildebenene er eksempelvis

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-9	-7	-5	-3	-1	1	3
$g(x)$	9	4	1	0	1	4	9
$h(x)$	---	---	---	0	1	1,414	1,732

2.1 a) $y = x + 2$ b) $y = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$ c) $y = -x + 11$ d) $y = 3$
e) $y = 5x + 4$ f) $y = 8x - 32$

2.2 $(-5,-7)$

2.3 a) $f(x) = \frac{10}{19}x + \frac{328}{19}$ b) Nej, for $f(7) = \frac{308}{19} \approx 16{,}21$

2.4 a) $f(x) = 19{,}72x + 91{,}50$ b) 3483,34 c) 1257860 liter

2.5 b) $f(x) = x - 50$ c) 104,71 kr.

3.1 b) $x = -0{,}0255m$ c) Ja (næsten da)

3.2 $p = 2{,}4966T + 680{,}1131$ c) $-272{,}4°\text{C}$ (bør være $-273{,}15°\text{C}$)

3.3 a) $f(x) = -x + 220$ c) 195 d) 56 år

3.4 a) $f(x) = 7{,}5x + 7{,}0$ $g(x) = 3{,}5x + 12{,}0$ b) $x > 1{,}25$
c) Her er B billigst

3.5 a) $x = 0{,}0035t + 29{,}3560$ b) Ja

3.6 b) Ja c) $a = 1{,}0212$ og $b = 0{,}0285$

3.7 a) Ja b) $f(T) = -1{,}68T + 50{,}39$ c) 25

4.1 a) 0,45 b) 0,17 c) 0,724 d) 0,0016 e) 0,0001 f) 0,0101
g) 1,92 h) 0,000001 i) 2% j) 35,2% k) 3,52% l) 101%
m) 10,1% n) 9000% o) 100% p) 200%

4.2 a) 5% b) 9,05% c) 34,5 d) 0,19

4.3 70000,- 90000,- 28,57%

4.4 300 i alt 75 sproglige 105 HF'ere

5.1 2851,52 4164,84 396,05 152822,18 25,89%
17,02% 17,88%

5.2 5,38% **5.3** -0,90%

6.2 a) $1{,}2588 \cdot 1{,}2230^x$ b) $715{,}0429 \cdot 1{,}1112^x$ c) $2{,}1213 \cdot 1{,}1892^x$
d) $6 \cdot 4^x$ e) $6 \cdot 1{,}2599^x$ f) $0{,}00710 \cdot 21{,}32^x$

6.3 a) $f(x) = 29{,}4 \cdot 1{,}0252^x$ b) 70,31 mill c) 2,52% d) 28,26%

6.4 14894,49 Ja, sådan da.

6.5 a) $f(x) = 143093 \cdot 0{,}9777^x$, x er antal år efter 1072
b) 2,23% c) 76112

7.1	a) $T_2 = 2{,}6419$	b) $T_2 = 0{,}2130$	c) $T_{1/2} = 6{,}5788$	
	d) $T_2 = 6{,}1163$	e) $T_2 = 693{,}4937$	f) $T_{1/2} = 346{,}2269$	
7.2	$f(x) = 3{,}9572 \cdot 0{,}7408^x$		**7.3** $g(x) = 0{,}3217 \cdot 1{,}8779^x$	
7.4	2		**7.5** 2	
8.1	ELK			
8.2	b) $58{,}2877^x \cdot 1{,}0561^x$, x er antal år efter 1970			
	c) 216,0 øre	d) 12,70 år		
8.3	a) exp	b) 207		
8.4	b) 109 mmHg	c) 5000 m		
8.5	6,6 mm			
8.6	b) 9,3 mm	c) 2026	d) 19,63%	
8.7	a) $162 \cdot 1{,}0211^x$, x antal år efter 1980		c) 2037	d) 33 år
9.1	I: $^{239}_{94}\text{Pu} + ^{1}_{0}\text{n} \rightarrow ^{240}_{94}\text{Pu}$		II: $^{240}_{94}\text{Pu} + ^{1}_{0}\text{n} \rightarrow ^{241}_{94}\text{Pu}$	
	III: $^{241}_{94}\text{Pu} \rightarrow ^{0}_{-1}\text{e} + ^{241}_{95}\text{Am}$		IV: $^{241}_{95}\text{Am} \rightarrow ^{4}_{2}\text{He} + ^{237}_{93}\text{Np}$	
9.2	a) $^{24}_{11}\text{Na} \rightarrow ^{24}_{12}\text{Mg} + ^{0}_{-1}\text{e}$	b) 9,90 MBq		
9.3	a) $^{151}_{65}\text{Tb} \rightarrow ^{4}_{2}\text{He} + ^{147}_{63}\text{Eu}$	b) 19,2 s	c) 64 s	
9.4	$^{9}_{4}\text{Be} + ^{4}_{2}\text{He} \rightarrow ^{1}_{0}\text{n} + ^{12}_{6}\text{C}$			
9.5	a) $^{14}_{7}\text{N} + ^{1}_{0}\text{n} \rightarrow ^{14}_{6}\text{C} + ^{1}_{1}\text{H}$	b) $^{14}_{6}\text{C} \rightarrow ^{14}_{7}\text{N} + ^{0}_{-1}\text{e}$	β^-	d) 1650 år
9.6	a) 34,3%	b) 50,4 h	c) 11,7 h	
9.7	a) 1,22 g 2017	b) 1,96 g	c) 21 år	
10.1	HEJ			
10.2	a) g,m	b) i,j,m	c) c,k,m,n	
10.3	$f(x) = 5{,}1662 \cdot x^{0{,}3965}$			
10.4	a) $f(x) = 2 \cdot x^2$	b) 98 og 1,28	c) x=1	
10.5	b) $a = 1{,}2544$ og $b = 4{,}2864$		c) 138,6%	d) 73,8%
10.6	a) 10,5	b) 2,03	c) 2,36	
10.7	a) nej	b) nej	c) ja	d) 13300
10.8	b) potentiel smg. ml. *M* og *V*		c) 547 L/h	d) 0,0039 L/h

Massefylde af en væske

Formål:
Formålet med denne øvelse er at bestemme massefylden af en væske.

Målinger:
Et måleglas vejes. Herefter fyldes en smule (ca. 10 mL) væske i, og hele molevitten vejes igen. Dette gentages et passende antal gange.
Dine målinger skal indføres i et passende måleskema.

Databehandling:
1) På et stykke mm-papir skal du lave en graf, som viser sammenhængen mellem rumfanget V af væsken (x-aksen) og massen m (y-aksen).
   Markér dine målepunkter med krydser og lav den bedste rette linie.
2) Beregn/aflæs hældningskoefficienten og skæringen med y-aksen.
3) Lav grafen på regnearket EXCEL.
4) Brug EXCEL til at finde hældningskoefficienten og skæringen med y-aksen.

Afleveringen:
Denne skal indeholde dine grafer og beregninger fra databehandlingen. Endvidere skal du give en tolkning af hældningskoefficienten og skæringen med y-aksen.
Hvad er væskens massefylde?

Måling af halveringstid

Formål

Formålet med denne rapport er at måle halveringstiden for et radioaktivt stof samt at eftervise henfaldsloven.

Teori

Halveringstiden måles på to stoffer, nemlig Ba^*-137 og Pa-234.

Ba^*-137 er γ-radioaktivt, og henfalder med en halveringstid på 2,6 minutter. Det produceres ved at malke en såkaldt *nuklid-generator*. I denne befinder der sig en mængde Cs-137, som ved β-henfald producerer Ba^*-137. Når nuklid-generatoren 'malkes', så udskilles kun Ba^*-137.

I Pa-234-beholderen befinder der sig bl.a. U-238. Dette henfalder ved **to** henfald til det γ-aktive Pa^*-234. Når beholderen rystes, blandes en vandfase med en sort, olie-agtig fase. Pa^*-234, men ikke U-238, er opløselig i denne fase, så man adskiller på denne måde de to stoffer. Halveringstiden for Pa^*-234 er 77 sekunder.

Udførelse

Et Geiger-rør kobles til en tæller. Sæt tælletiden til 10 s. Man starter med at måle baggrundsstrålingen 10 gange. Derpå måles uafbrudt aktiviteten fra Ba^*-137'en, indtil den er nede på baggrundsstrålingen. Do. for Pa-234.

Databehandling

De korrigerede tælletal, som er det målte tælletal minus den gennemsnitlige baggrundsstråling, indtegnes på enkeltlogaritmisk papir som funktion af tiden. Halveringstiden aflæses og sammenlignes med tabelværdien.

Spørgsmål, som skal besvares i rapporten:

1) I nuklid-generatoren befinder sig stoffet Cs-137, som ved β-henfald producerer Ba^*-137, som igen henfalder ved udsendelse af γ-stråling. Opskriv reaktionsskemaerne for disse to henfald.

2) Opskriv reaktionsskemaerne for de to henfald af U-238 til Pa^*-234 og for henfaldet af Pa^*-234 til Pa-234.

3) Lav to grafer på enkeltlogaritmisk papir, visende tiden på x-aksen og det korrigerede tælletal på y-aksen.

4) Aftager tælletallet eksponentielt med tiden?

5) Bestem ud fra graferne de to halveringstider for de to stoffer.
Passer disse halveringstider med de oplyste?

6) Angiv mindst 5 kilder til baggrundsstrålingen

Svækkelse af g-stråling

Formål

Formålet med forsøget er undersøge to forskellige måder, hvorpå man kan svække γ-stråling, nemlig ved absorption i bly og ved spredning af strålingen.

Teori

Når radioaktiv stråling passerer gennem stof, svækkes strålingens intensitet (dvs. tælletallet) eksponentielt med tykkelsen af det anvendte stof. Et af de bedste stoffer viser sig at være bly.

Man kan også svække stråling ved ganske simpelt at bevæge sig længere væk fra den. *Afstandskvadratloven* siger, at strålingens intensitet I i afstanden r fra kilden er

$$I = \frac{I_0}{r^2}$$

hvor I_0 er intensiteten i afstanden 1 meter fra kilden.

Udførelse - absorption i bly

Det er vigtigt, at kilde og detektor fastholdes i en bestemt afstand, når målingerne påbegyndes.

Geiger-røret anbringes på en optisk bænk, og baggrundsstrålingen måles (5x60 s).

Herefter anbringes kilden i en fast afstand fra Geiger-røret, og der placeres stoflag af forskellig tykkelse mellem kilde og detektor. Undervejs måles tælletallet i 60 s.

Endelig måles tykkelsen af den enkelte metalplade.

Udførelse - spredning

Igen placeres Geiger-røret på en optisk bænk, og man måler baggrundsstrålingen (man kan evt. genbruge tallene fra før).

Herefter anbringes kilden tæt på røret, og man måler tælletallet i 60 s. Herefter ændres afstanden til røret, og man måler igen. Dette gøres en del gange.

Bemærk, at man kan bruge den optiske bænk som lineal.

Databehandling - absorption

De korrigerede tælletal, som er tælletallet minus den gennemsnitlige baggrundsstråling, plottes på enkeltlogaritmisk papir som funktion af stoftykkelsen. Halveringstykkelsen aflæses på grafen.

Spørgsmål, som skal besvares i rapporten

1) Hvorfor skal afstanden mellem kilde og detektor holdes konstant?
2) Cs-137 er kun β-aktivt. Hvor kommer γ-strålingen så fra?

Databehandling - spredning

De korrigerede tælletal plottes på et dobbeltlogaritmisk papir som funktion af afstanden mellem kilde og tællerør.

Spørgsmål, som skal besvares i rapporten

3) Hvorfor bruges der DOLK i dette tilfælde.
4) Er afstandskvadratloven en potentiel udvikling?
5) Passer afstandskvadratloven med dine målinger?

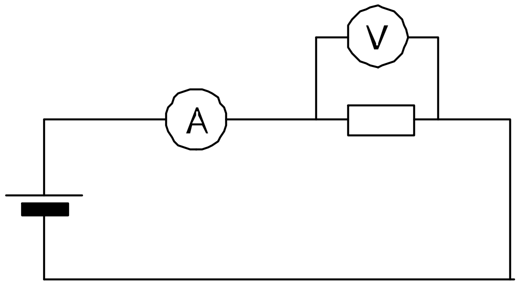
Resistorer og andre komponenter

Formål

Formålet med denne rapport er at undersøge en resistor, en diode og en pære, og at finde eventuelle sammenhænge mellem strømmen I og spændingen U for disse komponenter - en såkaldt *karakteristik*.

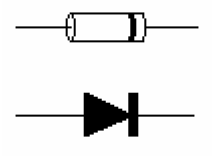
Udførelse

a) Opbyg kredsløbet til højre. Resistoren skal være på ca. 100 Ω. Variér spændingen på strømforsyningen i trin på ca. 0,5 V, og optag sammenhørende værdier af strømmen I og spændingen U. Afslut med at måle resistorens resistans på et Ohmmeter.

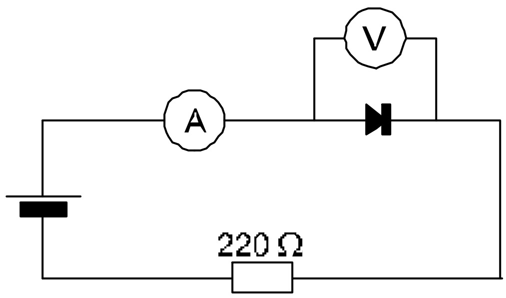


b) Lav en karakteristik for en pære. Pas på - pæren sprænger, hvis spændingen over den bliver mere end ca. 6 V.

c) En diode er en komponent, som kun tillader strømmen at passere gennem i en retning, *lederretningen*. Selve dioden er en lille cylinder med en ring i den ende, der sluttes til den negative pol - se figuren til højre.



Lav en karakteristik for dioden i lederretningen. Der skal indsættes en beskyttelsesresistor på ca. 220 Ω. Dioden brænder over, hvis strømmen gennem den bliver mere end 50 mA.



Databehandling

a) Lav en (I, U)-graf for resistoren i et almindeligt koordinatsystem. Find ud fra grafen hældningskoefficienten og sammenlign med den værdi, du målte vha. Ohmmeteret. (De skulle gerne være ens). Hvad har du eftervist?

b) Lav en (U, I)-graf for dioden på alm. mm-papir, i et ELK og i et DOLK. Hvad kan du konkludere ud fra graferne?

c) Lav en (U, I)-graf for pæren på alm. mm-papir, i et ELK og i et DOLK. Hvad kan du konkludere ud fra graferne?