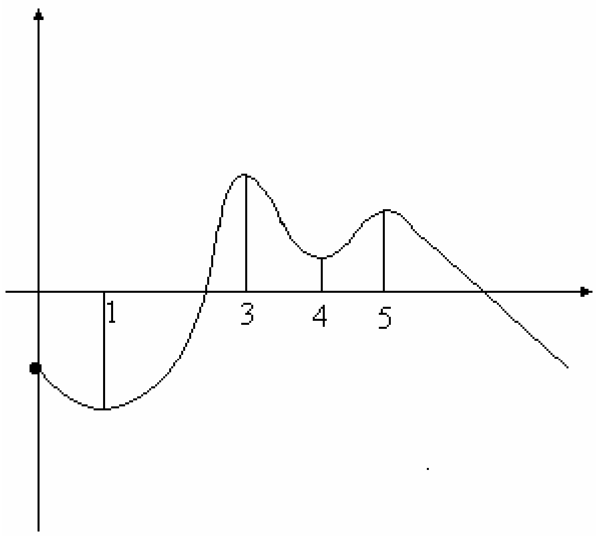
Matematikkens mysterier
- på et obligatorisk niveau

af

Kenneth Hansen

8. Funktioner



Hvornår er denne funktion størst?

8. Funktioner

8.0 Introduktion

I dette kapitel skal du lære mere om funktioner - først og fremmest de trigonometriske funktioner - og om, hvorledes man kan anvende differentialregning til at undersøge funktioner.

Det viser sig, at de trigonometriske funktioner, sinus, cosinus og tanegns, kan bruges til meget mere end bare trekantsberegning. Faktisk viser de sig at være eminente til at beskrive *svingninger*. For at kunne beskrive sådanne svingninger, og for at kunne differentiere disse funktioner, er det nødvendigt at indføre de såkaldte *radiantal*, som er et mere naturligt vinkelmål end de gammelkendte grader.

Du skal også lære om, hvorledes fortegnet for differentialkvotienten af en funktion fortæller noget om funktionens opførsel, nemlig de såkaldte *monotoniforhold*. Bl.a. skal de lære, at når $f'(x) > 0$, så er funktionen *voksende*.

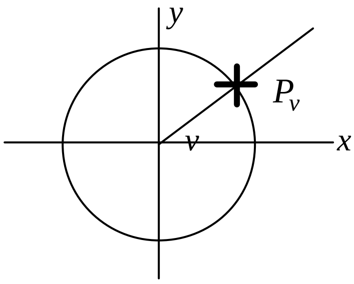
Endelig omtales *omvendte funktioner*, som er en generel metode til at løse ligninger af typen $f(x) = a$, hvor a er et eller andet tal. Herunder kommer man ind på begreberne *injektivitet*, *surjektivitet* og *bijektivitet*, som fortæller noget om antallet af løsninger til denne type ligning.

8.1 Trigonometriske funktioner

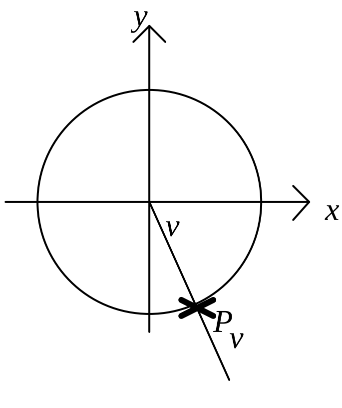
I denne sektion vil vi give en definition af $\sin v$, $\cos v$ og $\tan v$ for alle vinkler v, herunder negative vinkler og vinkler som er større end 360°. Endvidere vil vi definere de såkaldte *radiantal*.

> **Definition 1**
>
> *Enhedscirklen* er en cirkel med centrum i (0,0) og radius 1.

En vinkel giver anledning til et bestemt punkt på cirklen, vinklens *retningspunkt* P_v. Dette punkt er bestemt som skæringspunktet mellem enhedscirklen og den rette (halv-)linie gennem (0,0), som danner vinklen v med førsteaksen.



Man kan også snakke om retningspunkter for negative vinkler - i så fald er det linien med negativ hældning, og som danner vinklen v med x-aksen, man skal skære med enhedscirklen.



Ja, faktisk kan man tale om retningspunkter for et hvilket som helst vinkelmål, uanset størrelse eller fortegn. En hel cirkel er jo på 360°, så hvis man f.eks. vil finde retningspunktet for vinklen $v = 800°$, så ser man

$$800° = 360° + 360° + 80°$$

Derfor ligger retningspunktet $P_{800°}$ to hele omgange om enhedscirklen og ekstra 80°.

Derfor må der gælde, at

$$P_{800°} = P_{80°}.$$

Et andet, og måske mere naturligt vinkelmål er det såkaldte *radianmål*. Forestil dig en bille, som står i (1,0) med hovedet pegende opad. Den bille vil gerne kravle hen til et givet retningspunkt. Hvor lang en strækning skal billen tilbagelægge?

Tjah - nu er enhedscirklens omkreds på 2π, svarende til $360°$, så hvis billen skal kravle v grader, så skal den tilbagelægge strækningen $\dfrac{2\pi}{360°}v$, dette gælder uanset v's størrelse eller fortegn. Hvis v er negativ, så skal billen kravle baglæns, og det regnes for en negativ længde.

Den strækning, billen skal kravle, kaldes *radianmålet* for vinklen v, og der er som sagt følgende sammenhæng:

Sætning 2 (LS)

Lad v være gradtallet og x radiantallet for en vinkel. Så:

$$x = \frac{2\pi}{360°}v \quad \text{og} \quad v = \frac{360°}{2\pi}\cdot x\,.$$

Eksempel

En vinkel på $v = 60°$ svarer til et radiantal på $x = \dfrac{2\pi}{360°}\cdot 60° = \dfrac{\pi}{3}$

Et radiantal på $x = 0{,}5$ svarer til en vinkel på $v = \dfrac{360°}{2\pi}\cdot 0{,}5 = 114{,}6°$

Vi skal nu til at definere sinus, cosinus og tangens ved hjælp af enhedscirklen:

Definition 3 (FS)

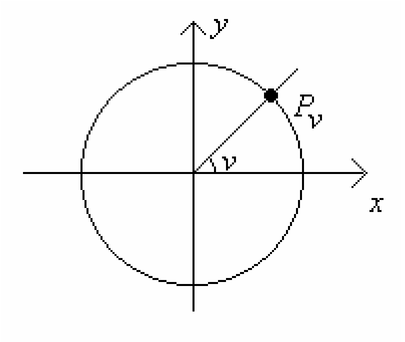
Lad v være gradtallet for en vinkel. Så defineres

a) $\cos v$ som x-koordinaten for retningspunktet P_v,

b) $\sin v$ som y-koordinaten for retningspunktet P_v,

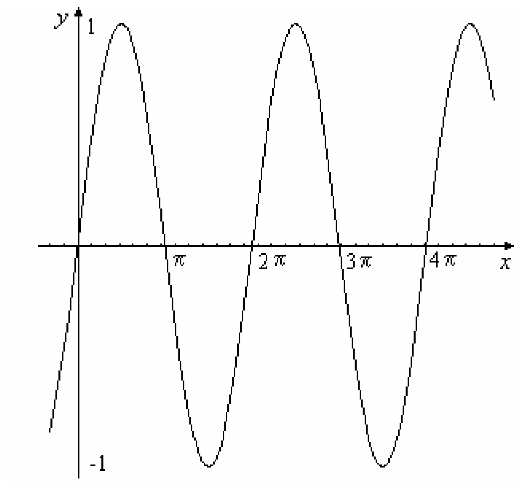
c) $\tan v$ som $\tan v = \dfrac{\sin v}{\cos v}$, forudsat $\cos v \neq 0$.

Hvis man ønsker at finde sinus til **radiantallet** x, så tager man bare y-koordinaten til retningspunktet P_x - man kan altså både lave trigonometri ved brug af gradtal eller ved brug af radiantal.



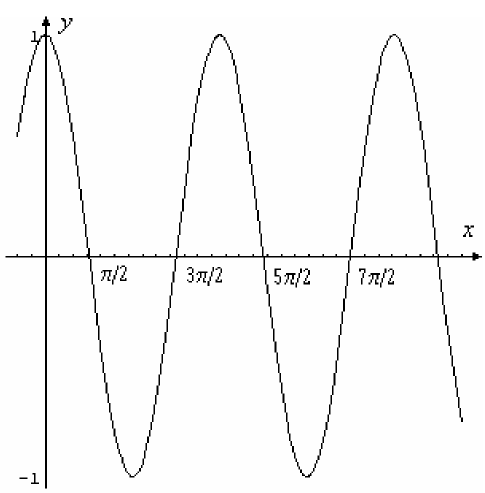
I de næste sektioner skal vi udforske disse funktioner. Som opvarmning viser vi her graferne for sin, cos og tan:

Grafen for sinus:



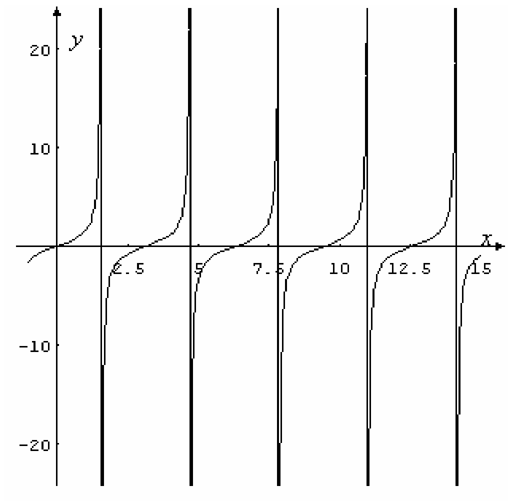
Sinus er faktisk meget velegnet til at beskrive bølgefænomener. Af grafen kan man nok se grunden. Bemærk, at *x* er et radiantal.

Grafen for cosinus:



Den minder en del om sinusgrafen. Faktisk er det blot en forskydning af sinusgrafen henad x-aksen på en halv p.

Grafen for tangens:



Bemærk grafens mange lodrette asymptoter.

Opgaver

1.1 Overbevis dig om, at definitionen af sin, cos og tan svarer til den definition, vi tidligere gav med standardtrekanter.

1.2 Bevis, at tangens-funktionens graf har den lodrette asymptote med ligningen $y = \frac{\pi}{2}$.

(Vink: Hvad er $\cos(\frac{\pi}{2})$?)

8.2 Trigonometriske formler

Der gælder et utal af trigonometriske formler, som vi skal bevise i denne og den næste sektion. Beviserne i denne sektion er hovedsageligt geometriske:

Den første formel er den velkendte *idiotformel*.

Sætning 4 (Idiotformlen) (FS)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Bevis

Retningspunktet $P_x = (\cos x, \sin x)$ ligger på enhedscirklen, som jo har ligningen

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Indsættes retningspunktets koordinater i denne ligning, så fås

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Følgende sætning tolkes som, at sin og cos er *periodiske funktioner*.

Sætning 5 (FS)

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \quad \text{og} \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

Bevis

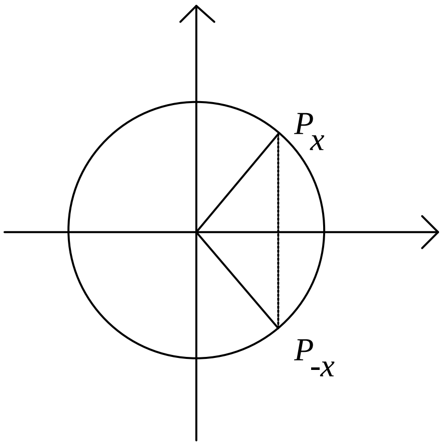
Idet et omløb på enhedscirklen svarer til 2π radianer, så har vinklerne x og $x + 2\pi$ ens retningspunkter. Derfor får vi

$$(\cos x, \sin x) = P_x = P_{x+2\pi} = (\cos(x + 2\pi), \sin(x + 2\pi))$$

Sætning 6 (FS)

$$\cos(-x) = \cos x \quad \text{og} \quad \sin(-x) = -\sin x$$

Bevis



Af figuren ses, at retningspunkterne P_x og P_{-x} har den samme x-koordinat, men modsat y-koordinat.
x-koordinaterne er

$$\cos x \quad \text{og} \quad \cos(-x)$$

og da disse er ens, så er

$$\cos x = \cos(-x)\ .$$

y-koordinaterne er

$$\sin x \quad \text{og} \quad \sin(-x)$$

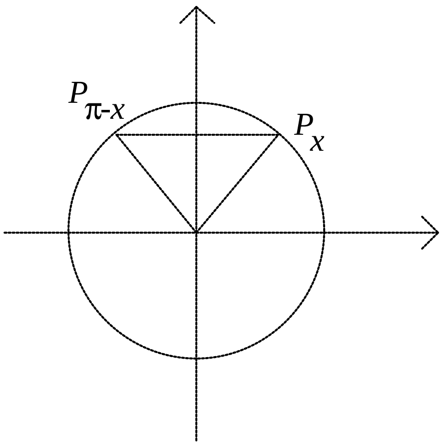
og da disse har modsat fortegn, så

$$-\sin x = \sin(-x)$$

Sætning 7 (FS)

$$\cos(\pi - x) = -\cos x \quad \text{og} \quad \sin(\pi - x) = \sin x$$

Bevis



På figuren ses:

$$P_x = (\cos x, \sin x)$$

$$P_{\pi - x} = (\cos(\pi - x), \sin(\pi - x))$$

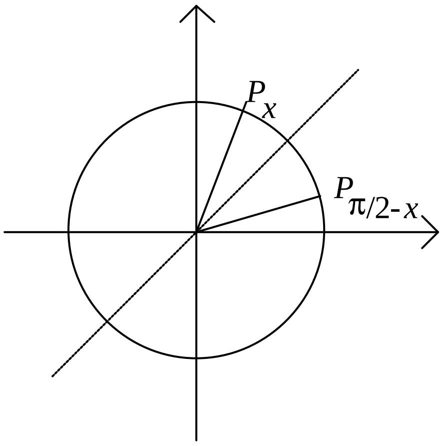
Punkterne har modsat x-koordinat, men den samme y-koordinat.

Resten af beviset forløber som ved sætning 6.

Sætning 8 (FS)

$$\cos(\tfrac{\pi}{2} - x) = \sin x \quad \text{og} \quad \sin(\tfrac{\pi}{2} - x) = \cos x$$

Bevis



På figuren ses

$$P_x = (\cos x, \sin x)$$

Ved spejlingen i den stiplede linie med ligningen $y = x$ sendes den over i punktet

$$P_{\frac{\pi}{2}-x} = (\cos(\tfrac{\pi}{2} - x), \sin(\tfrac{\pi}{2} - x)) .$$

Men denne spejling bytter bare om på x- og y-koordinaterne, hvilket beviser sætningen.

For tangens gælder formlerne:

> **Sætning 9 (FS)**
>
> a) $\tan(-x) = -\tan x$
>
> b) $\tan(x + \pi) = \tan x$

Bevis:

a) Her benyttes sætning 6:

$$\tan(x-) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

b) Her benyttes både sætning 6 og sætning 7:

$$\tan(x + \pi) = \tan(\pi - (-x)) = \frac{\sin(\pi - (-x))}{\cos(\pi - (-x))} =$$

$$\frac{\sin(-x)}{-\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

Opgaver

2.1 Formlerne 6-9 kan også formuleres for vinkler målt i gradtal. Opskriv disse formler.

2.2 Der findes faktisk yderligere 3 trigonometriske funktioner, omend de sjældent bruges:

cotangens: $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

sekans: $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

cosekans: $\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

Bevis følgende formler:

a) $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$

b) $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$

c) $\cot(-x) = -\cot x$

d) $\sec(-x) = \sec x$

e) $\csc(-x) = -\csc x$

Prøv, om du kan formulere (og bevise) flere formler involverende disse tre trigonometriske størrelser.

2.3 Tegn graferne for funktionerne

$f(x) = \cot x$

$g(x) = \sec(x)$

$h(x) = \csc(x)$

Har graferne nogle asymptoter?

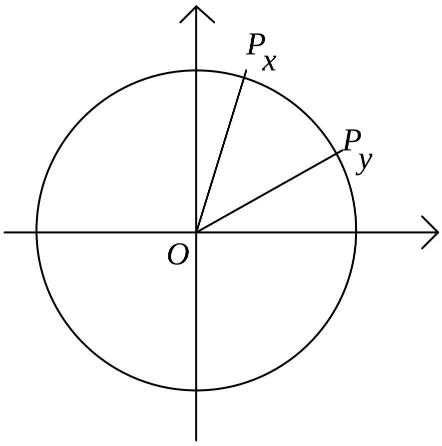
8.3 Additionsformlerne og de logaritmiske formler

Nu skal vi bevise additionsformlerne, dobbeltvinkelformlerne og de logaritmiske formler. Vi starter med det eneste tekniske bevis:

Sætning 10

$$\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y$$

Bevis:



På figuren til højre er afmærket punkterne

$$O=(0,0)$$
$$P_x=(\cos x,\sin x)$$
$$P_y=(\cos y,\sin y)$$

Vi vil anvende cosinus-relationen på trekanten $\Delta OP_x P_y$, og derfor har vi brug for at kende nogle vinkler og sidelængder:

$\angle P_x OP_y = x-y$ ifølge tegningen.

$|OP_x|=|OP_y|=1$, idet de to liniestykker er radier i enhedscirklen.

$|P_x P_y|=\sqrt{(\cos x-\cos y)^2+(\sin x-\sin y)^2}$ pr. afstandsformlen.

Vi regner lidt videre:

$$|P_x P_y|^2=(\cos x-\cos y)^2+(\sin x-\sin y)^2=$$
$$\cos^2 x+\cos^2 y-2\cos x\cos y+\sin^2 x+\sin^2 y-2\sin x\sin y=$$
$$2-2(\cos x\cos y+\sin x\sin y)$$

Her brugte vi idiotformlen to gange for at få det første 2-tal.
Cosinus-relationen i trekant $\Delta OP_x P_y$ hedder:

$$|P_xP_y|^2 = |OP_x|^2 + |OP_y|^2 - 2|OP_x|\cdot|OP_y|\cos(\angle P_xOP_y)$$

$\Downarrow$

$$2 - 2(\cos x\cos y + \sin x \sin y) = 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cdot \cos(x-y)$$

$\Downarrow$

$$-2(\cos x\cos y + \sin x \sin y) = -2\cos(x-y)$$

$\Downarrow$

$$\cos x\cos y + \sin x\sin y = \cos(x-y)$$

Ialt er der 4 additionsformler:

Sætning 11 (additionsformlerne)

a) $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$
b) $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$
c) $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$
d) $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

Bevis:

Formel a) er sætning 10, og de andre formler udledes heraf ved brug af sætning 5 og 7:

b) $\cos(x+y) = \cos(x-(-y)) = \cos x\cos(-y) + \sin x\sin(-y) =$
$\cos x\cos y - \sin x\sin y$

c) $\sin(x-y) = \cos(\frac{\pi}{2} - (x-y)) = \cos(\frac{\pi}{2} - x + y) =$
$\cos(\frac{\pi}{2} + x)\cos y - \sin(\frac{\pi}{2} - x)\sin y = \sin x\cos y - \cos x\sin y$

d) $\sin(x+y) = \sin(x-(-y)) = \sin x\cos(-y) - \cos x\sin(-y) =$
$\sin x\cos y - \cos x\cdot(-\sin y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$

Et specialtilfælde af additionsformlerne er dobbeltvinkelformlerne. De fås ved at sætte $x = y$ i additionsformlerne:

Sætning 12 (dobbeltvinkelformlerne)

a) $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

b) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

Bevis:

a) Vi sætter $x = y$ i sætning 11d og får:

$$\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2\sin x \cos x$$

b) Vi sætter $x = y$ i sætning 11b og får:

$$\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Ved at bruge idiotformlen kan man udlede de andre former af 12b.

De logaritmiske formler hedder sådan, fordi de laver et produkt om til en sum, ligesom logaritmefunktionen. Oprindelig blev de brugt til komplicerede astronomiske beregninger (før man opfandt lommeregneren) af bla. Tycho Brahe. De logaritmiske formler gav også inspiration til skotten John Napier, som opfandt logaritmerne.

Sætning 13 (de logaritmiske formler)

a) $\sin s + \sin t = 2\sin\frac{s+t}{2}\cos\frac{s-t}{2}$

b) $\sin s - \sin t = 2\cos\frac{s+t}{2}\sin\frac{s-t}{2}$

c) $\cos s + \cos t = 2\cos\frac{s+t}{2}\cos\frac{s-t}{2}$

d) $\cos s - \cos t = 2\sin\frac{s+t}{2}\sin\frac{s-t}{2}$

Bevis:

Beviset for a) og b) hænger sammen:

Sæt $x = \frac{s+t}{2}$ og $y = \frac{s-t}{2}$

Så er $x + y = s$ og $x - y = t$

Anvendes dette i 11c og 11d, så fås

$$\sin s = \sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin t = \sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x \sin y$$

Dette betyder

$$\sin s + \sin t = (\sin x\cos y + \cos x\sin y) + (\sin x\cos y - \cos x\sin y) =$$
$$2\sin x\cos y = 2\sin\frac{s+t}{2}\cos\frac{s-t}{2}$$

Tilsvarende for $\sin s - \sin t$.

c) og d) bevises på samme måde ved at benytte 11a og 11b.

Opgaver

3.1 Bevis sætning 13, punkterne c) og d).

3.2 Det vides, at

$$\sin 30° = \frac{1}{2} \qquad \text{og} \qquad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

og

$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{og} \qquad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bestem vha. formlerne i dette og det foregående kapitel **eksakte** værdier for:

a)	$\sin 60°$	b)	$\cos 60°$	c)	$\cos 75°$
d)	$\sin 75°$	e)	$\sin 15°$	f)	$\cos 15°$

3.3 Udled *tripelvinkel-formlerne*:

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

og

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

3.4 Udled *additionsformlerne for tangens:*

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

og

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y} .$$

8.4 Differentiation af sin, cos og tan

I denne sektion skal vi finde differentialkvotienterne af de tre trigonometriske funktioner. Vi regner hele tiden i radianer!

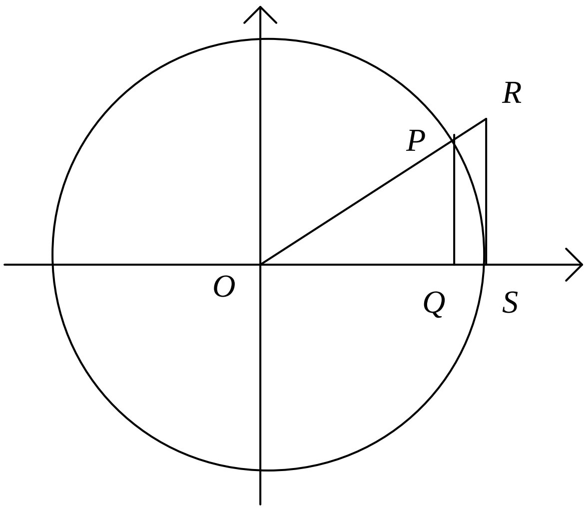
Under beviset kommer vi ud for at skulle bruge en grænseværdi:

Sætning 14

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$$

Bevis:

Vi lader h være et radiantal mellem 0 og $\frac{\pi}{2}$. Vi kan da lave nedenstående figur:



Punkterne har koordinaterne

$$\begin{aligned}O&=(0,0)\\P&=(\cos h,\sin h)\\Q&=(\cos h,0)\\R&=(1,\tan h)\\S&=(1,0)\end{aligned}$$

Det er vel egentligt kun R's koordinater, der er lidt mystiske:

Trekant OPQ er en standardtrekant, og derfor er

$$|OQ|=\cos h \quad \text{og} \quad |PQ|=\sin h\,.$$

Cirklen er en enhedscirkel så derfor er

$$|OS|=1$$

Trekanterne OPQ og ORS er ensvinklede og har derfor proportionale sider, hvilket vi benytter ved 3. lighedstegn i ligningen nedenfor:

$$\tan h=\frac{\sin h}{\cos h}=\frac{|PQ|}{|OQ|}=\frac{|RS|}{|OS|}=\frac{|RS|}{1}=|RS|$$

Nå, men af figuren ses ulighederne

$$
\begin{aligned}
&|PQ| \le |PS| \le |RS| \\
\Downarrow \\
&\sin h \le h \le \tan h \\
\Downarrow \\
&\sin h \le h \le \frac{\sin h}{\cos h} \\
\Downarrow \\
&1 \le \frac{h}{\sin h} \le \frac{1}{\cos h} \\
\Downarrow \\
&1 \ge \frac{\sin h}{h} \ge \cos h
\end{aligned}
$$

Når nu h går imod 0, så vil størrelsen $\frac{\sin h}{h}$ blive presset inde mellem 1 og $\cos 0 = 1$. Grænseværdien er derfor pisket til at være 1.

Tilsvarende kan man nu argumentere, når h er negativ.
(Dette kaldes et *sandwich-bevis*).

Vi har nu maskineriet til at kunne differentiere sin, cos og tan:

Sætning 15 (FS)

a) $(\sin x)' = \cos x$

b) $(\cos x)' = -\sin x$

c) $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$

Bevis:

a) Tretrinsraketten:

Trin 1:

$$\Delta(\sin) =$$

$$\sin(x+h) - \sin(x) = 2\cos(\frac{x+h+x}{2})\sin(\frac{x+h-x}{2}) =$$

$$2\cos(x+\tfrac{h}{2})\sin\tfrac{h}{2}$$

Trin 2:

$$\frac{\Delta(\sin)}{h} = \frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h} = \cos(x+\tfrac{h}{2})\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

Trin 3:

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta(\sin)}{h} = \lim_{h\to 0}(\cos(x+\tfrac{h}{2})\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \lim_{h\to 0}\cos(x+\tfrac{h}{2})\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

Når $h\to 0$, så vil den første faktor give $\cos x$ (idet cos er en kontinuert funktion), og pr. sætning 14 vil den anden faktor vil give 1. Alt i alt fås

$$(\sin x)' = \cos x$$

b) Her kunne man igen bruge tretrinsraketten; men det er nu lettere at bruge kædereglen:

$$(\cos x)' = (\sin(\tfrac{\pi}{2}-x))' = \cos(\tfrac{\pi}{2}-x)\cdot(\tfrac{\pi}{2}-x)' = \sin x\cdot(-1) = -\sin x$$

c) Her bruges kvotientreglen:

$$(\tan x)' = \quad (\frac{\sin x}{\cos x})' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} =$$

$$1 + \tan^2 x$$

Vi er nu i stand til at differentiere alle mulige funktioner:

Eksempler

$$(\cos(2x+3))' = \sin(2x+3)\cdot(2x+3)' = 2\sin(2x+3)$$

$$(\sqrt{\sin x})' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$$

$$(\ln(\tan x))' = \frac{1}{\tan x}(\tan x)' = \frac{1+\tan^2 x}{\tan x}$$

$$(\frac{2+\sin x}{3\cos x})' = \qquad \frac{(2+\sin x)'\cdot 3\cos x - (2+\sin x)\cdot(3\cos x)'}{9\cos^2 x} =$$

$$\frac{\cos x \cdot 3\cos x - (2+\sin x)(-3\sin x)}{9\cos^2 x} =$$

$$\frac{3\cos^2 x + 6\sin x + 3\cos^2 x}{9\cos^2 x} =$$

$$\frac{1+2\sin x}{3\cos^2 x}$$

Opgaver

4.1 Differentiér nedenstående udtryk:

a) $\sin x - \tan x$ b) $\sqrt{\cos x}$ c) $e^{\sin x + 2}$

d) $\dfrac{\tan x}{1+\tan x}$ e) $\cos x \cdot \sqrt{x}$ f) $\tan(x+3)$

g) $\sin(e^x) - \sqrt{x}$ h) $2\sin x - \sin^2 x$ i) $\dfrac{\cos x}{\cos(x+1)}$

j) $\cos(x^2 + 2x - 3)$ k) $\cos(3x) + 5x$ l) $\sin(\sin(x))$

4.2 Årsagen til, at den variable x i udtrykket $\sin x$ skal være i radiantal, for at sætning 15 gælder, er faktisk, at x i udtrykket

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

skal være i radiantal. Hvad sker der, hvis x er et gradtal?
Udfyld følgende to skemaer

x	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$\sin x$						
$\sin x \,/\, x$						

x	1°	0,1°	0,01°	0,001°	0,0001°	0,00001°
$\sin x$						
$\sin x \,/\, x$						

og kommentér resultatet.
(Bemærk, at i det første skema regner vi i radianer, i det andet i grader).

4.3 Løs, vha Newton-Raphsons iterationsmetode, ligningen

$$\cos x = x$$

med 4 decimaler. x er naturligvis et radiantal.

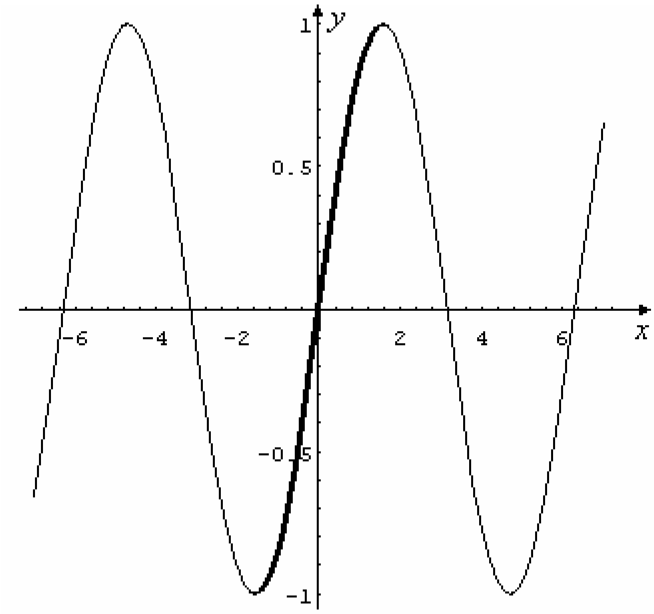
8.5 Arcus-funktionerne

Man er ofte i den situation, at man kender f.eks. sinus til en vinkel, men ikke selve vinklen. Man ønsker måske at løse ligningen $\sin x = 0{,}74$. Dette kan gøres vha. arcus-funktionerne.

Man vil gerne definere $\arcsin a$, som løsningen til ligningen $\sin x = a$, altså

$$x = \arcsin a \quad \Leftrightarrow \quad a = \sin x .$$

Men der er et problem - ligningen $\sin x = a$ har uendeligt mange løsninger. Vi er derfor nødt til at udvælge en bestemt løsning og kalde den for $\arcsin a$.

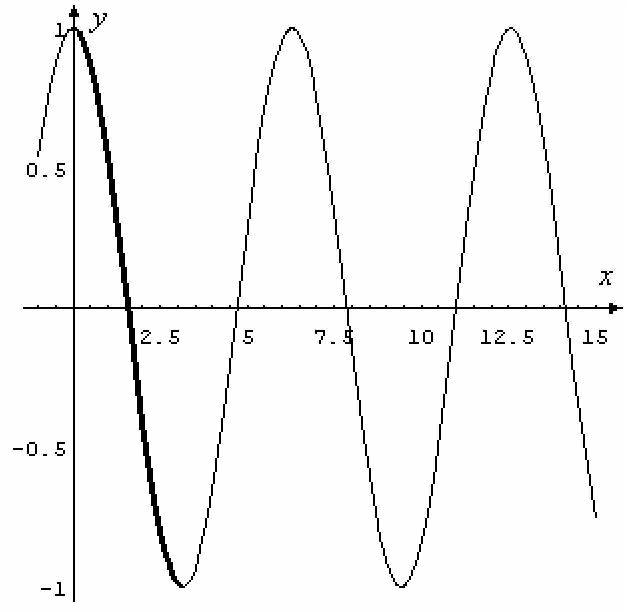


Til venstre er der vist grafen for sinusfunktionen.

Man ser, at der er uendeligt mange x-værdier, der bliver sendt over i f.eks. 0,5; men kun en x-værdi fra den tykt optegnede del af grafen, der sendes over i 0,5.
Udvælger vi derfor en x-værdi i intervallet $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ så er løsningen til ligningen

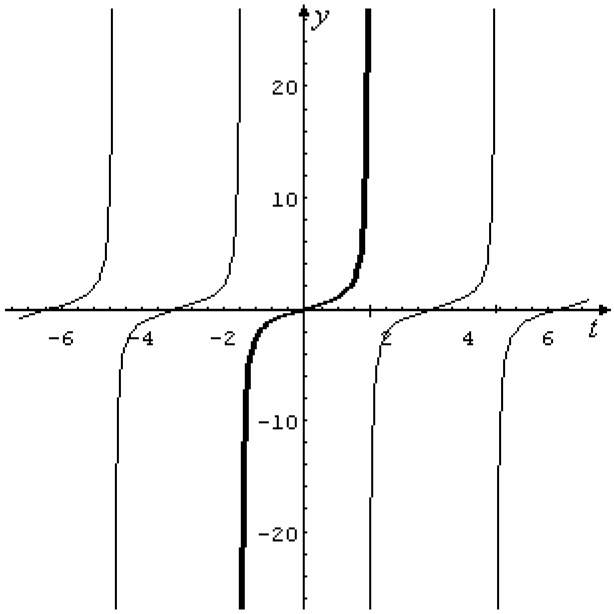
$$\sin x = a$$

entydigt bestemt!



Ved cosinusfunktionen kan man i stedet bruge intervallet

$$[0; \pi]$$



Ved tangensfunktionen kan man bruge intervallet

$$\left]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right[$$

Vi samler alt dette i nedenstående definition:

Definition 16 (LS)

a) Lad $a \in [-1;1]$. $\arcsin a$ er den entydigt bestemte løsning til ligningen $\sin x = a$, som ligger i intervallet $\left[-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}\right]$.

b) Lad $a \in [-1;1]$. $\arccos a$ er den entydigt bestemte løsning til ligningen $\cos x = a$, som ligger i intervallet $[0;\pi]$

c) Lad a være et reelt tal. $\arctan a$ er den entydigt bestemte løsning til ligningen $\tan x = a$, som ligger i intervallet $\left]-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}\right[$.

I det barske funktionssprog har vi defineret tre funktioner, de såkaldte *arcus-funktioner*:

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right]$$
$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$
$$\arctan : \mathbf{R} \to \left]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right[$$

Lad os se, hvordan man bruger disse funktioner til at løse trigonometriske ligninger.

Sætning 17 (LS)

Lad $a \in [-1,1]$. Løsningerne til ligningen

$$\sin x = a$$

er alle af formen

$$\arcsin a + 2\pi z \quad , \quad z \in \mathbf{Z}$$

eller af formen

$$\pi - \arcsin a + 2\pi z \quad , \quad z \in \mathbf{Z} .$$

Før beviset kommer et eksempel:

Eksempel

Løsningerne til ligningen

$$\sin x = \tfrac{1}{2}$$

skal findes.

Nu er $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, så $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Sætningen fortæller nu, at alle løsningerne til ligningen er

$$\ldots, \tfrac{\pi}{6} - 4\pi \,,\, \tfrac{\pi}{6} - 2\pi \,,\, \tfrac{\pi}{6} \,,\, \tfrac{\pi}{6} + 2\pi \,,\, \tfrac{\pi}{6} + 4\pi \,,\, \tfrac{\pi}{6} + 6\pi \,, \ldots$$

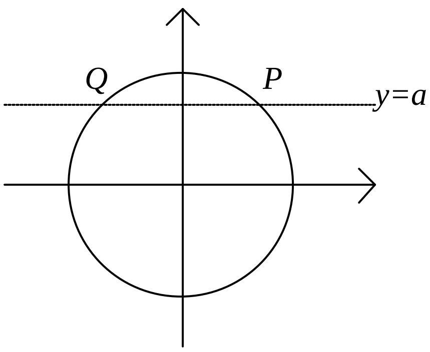
og

$$\ldots, \tfrac{5\pi}{6} - 4\pi \,,\, \tfrac{5\pi}{6} - 2\pi \,,\, \tfrac{5\pi}{6} \,,\, \tfrac{5\pi}{6} + 2\pi \,,\, \tfrac{5\pi}{6} + 4\pi \,,\, \tfrac{5\pi}{6} + 6\pi \,, \ldots$$

(bemærk, at $\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$).

Bevis (for sætning 17):

Vi skal finde alle retningspunkter på enhedscirklen, som har andenkoordinaten a.



På figuren ses, at der kun er to muligheder, nemlig punkterne P og Q.
Punktet P er retningspunktet for

$$\arcsin a$$

men også for

$$\arcsin a + 2\pi ,\ \arcsin a + 4\pi ,\ \ldots.$$

og for

$$\arcsin a - 2\pi ,\ \arcsin a - 4\pi ,\ \ldots.$$

Alt i alt er P retningspunktet for vinklerne

$$\arcsin a + 2\pi z \quad , \quad z \in \mathbf{Z} .$$

Af symmetrien i figuren ser man, at *Q* er retningspunkt for

$$\pi - \arcsin a + 2\pi z \quad , \quad z \in \mathbf{Z}$$

Vi har nu fundet alle de relevante løsninger.

Sætning 18 (LS)

Lad $a \in [-1,1]$. Løsningerne til ligningen

$$\cos x = a$$

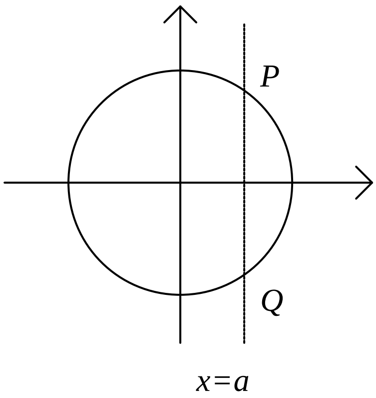
er alle af formen

$$\arccos a + 2\pi z \quad , \quad z \in \mathbf{Z}$$

eller af formen

$$-\arccos a + 2\pi z \quad , \quad z \in \mathbf{Z}$$

Bevis:



Øvelse. Se på figuren til venstre.

Sætning 19 (LS)

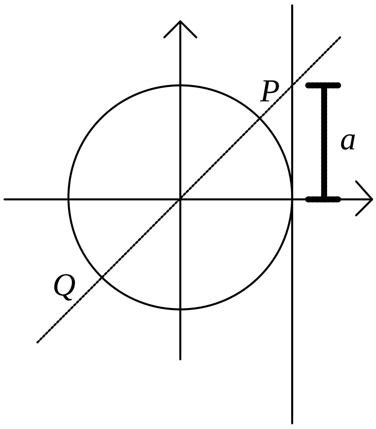
Lad $a \in \mathbf{R}$. Løsningerne til ligningen

$$\tan x = a$$

er alle af formen

$$\arctan a + \pi z \quad , \quad z \in \mathbf{Z}$$

Bevis:



Igen en øvelse.

Eksempel

Ligningen $\cos x = -0{,}234$ skal løses. Ifølge sætning 18 er løsningerne

$$x = \pm\arccos(-0{,}234) + 2\pi z \quad , \quad z \in \mathbf{Z}$$

eller, ved brug af lommeregneren

$$x = \pm 1{,}808 + 2\pi z \quad , \quad z \in \mathbf{Z}$$

Eksempel

Ligningen $\tan x = 23$ skal løses, men vi er kun interesserede i løsninger i intervallet [0,10].

Den generelle løsning er

$$x = \arctan(23) + \pi z = 1{,}527 + \pi z \ .$$

Vi indsætter nu forskellige *z*-værdier:

$$\begin{array}{lll} z = -1 & \Rightarrow & x = -1{,}614 \\ z = 0 & \Rightarrow & x = 1{,}527 \\ z = 1 & \Rightarrow & x = 4{,}669 \\ z = 2 & \Rightarrow & x = 7{,}811 \\ z = 3 & \Rightarrow & x = 10{,}952 \end{array}$$

Det ses, at for $z < 0$ og for $z > 2$ ligger løsningerne udenfor intervallet [0,10]. De ønskede løsninger er derfor - med 4 betydende cifre:

1,527   4,669 og 7,811

Eksempel

Ligningen $\sin v = 0{,}67$ skal løses, men v er nu et gradtal i intervallet $[0°, 360°]$.

Der er to løsninger, nemlig
$$v = \arcsin(0{,}67) = 42{,}07°$$
og
$$v = 180° - \arcsin(0{,}67) = 137{,}93° .$$

Alle formlerne og metoderne gælder nemlig også for gradtal i stedet for radiantal.

Endelig kan man også komme ud for trigonometriske uligheder:

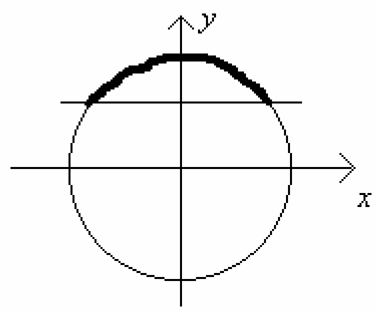
Eksempel

Man skal løse uligheden
$$\sin x \geq 0{,}5 \text{, hvor } x \in [0\,,\,2\pi]$$

Først løser man den tilsvarende ligning:

$$\sin x = 0{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad x = \arcsin(0{,}5) \vee x = \pi - \arcsin(0{,}5) \quad \Leftrightarrow$$
$$x = \tfrac{\pi}{6} \;\vee\; x = \tfrac{5\pi}{6}$$

Herefter betragter man nedenstående tegning:



Løsningsmængden er de vinkler, hvis retningspunkter ligger på den tyktoptrukne del af enhedscirklen. Vi kan derfor konstatere, at løsningsmængden til uligheden er
$$L = \left[\tfrac{\pi}{6}\,,\,\tfrac{5\pi}{6}\right]$$

Opgaver

5.1 Løs følgende ligninger:

a) $\cos x = -0{,}23$

b) $\sin x = 1{,}57$

c) $\tan x = 1{,}57$

d) $\sin x = 0{,}47 \quad , \quad x \in [0{,}10]$

e) $\cos v = -0{,}632 \quad , \quad v \in [0°, 250°]$

f) $\tan x = 3 \quad , \quad x \in [-5{,}5]$

5.2 Løs følgende uligheder:

a) $\sin x < 0{,}5 \quad , \quad x \in [0\,,2\pi]$

b) $\cos x > 0{,}7 \quad , \quad x \in [0\,,2\pi]$

c) $\tan x > 1{,}2 \quad , \quad x \in [0{,}1]$

d) $\tan x > 1{,}5 \quad , \quad x \in [0°\,,1000°]$

e) $\sin x > -0{,}2 \quad , \quad x \in [-6\,,10]$

f) $\cos x < 2$

5.3 Formålet med denne opgave er at vise differentiationsformlerne

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

a) Differentiér udtrykket

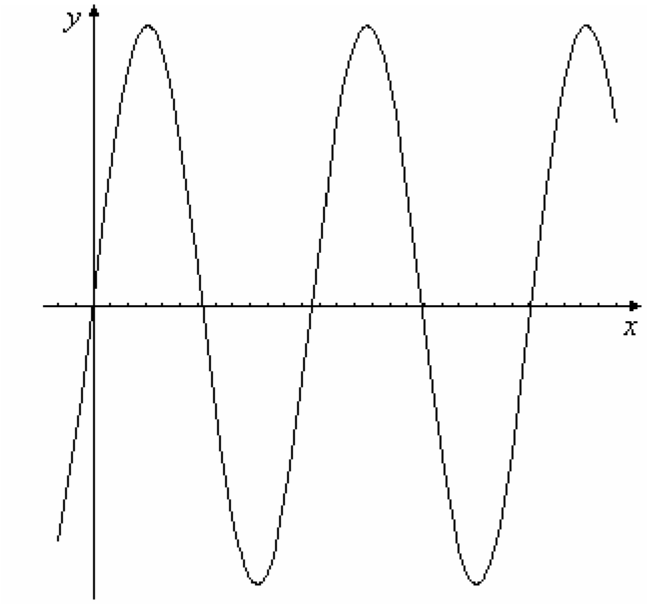
$$t = \arcsin(\sin t)$$

på begge sider. Brug kædereglen

b) Erstat alle forekomster af $\sin t$ med x og alle forekomster af $\cos t$ med $\sqrt{1-x^2}$

c) Bevis de to andre formler på samme måde.

8.6 Svingninger



Betragt en gang grafen for sinus.

Det er jo faktisk en bølge - eller en svingning.

Faktisk kan alle mulige bølger beskrives vha. sinus-kurver.

Normalt er bølger noget, der **varierer i tiden**. Derfor bruger man indenfor svingningsteorien t og ikke x som den uafhængige variabel, så det vil blive brugt fremover.

Definition 20 (LS)

En funktion f af typen

$$f(t) = a\sin(bt + c)$$

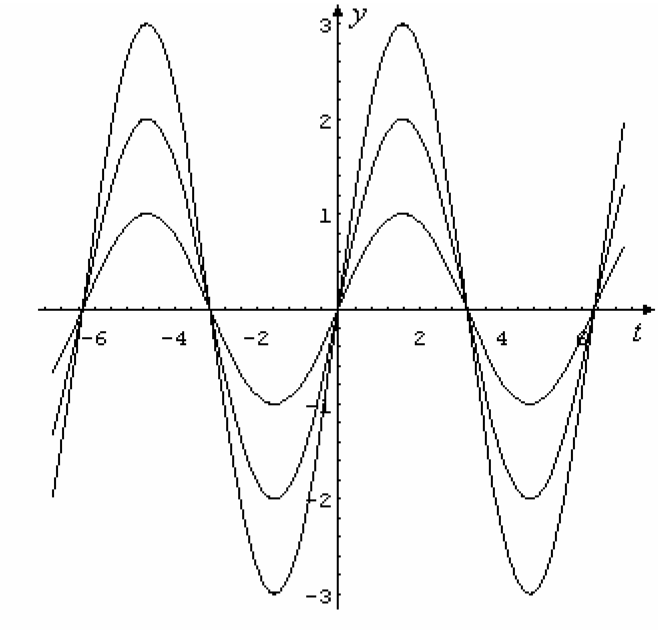
kaldes en *svingning*

Tallet a kaldes *amplituden*.
Tallet b kaldes *bølgetallet*.
Tallet c kaldes *fasevinklen*.

Vi vil nu forklare betydningen af tallene a, b og c.

Amplituden (udtales 'amplityden' - c'est français...) fortæller noget om, hvor store udsvingene er. På grafen på næste side er der tegnet graferne for de tre funktioner

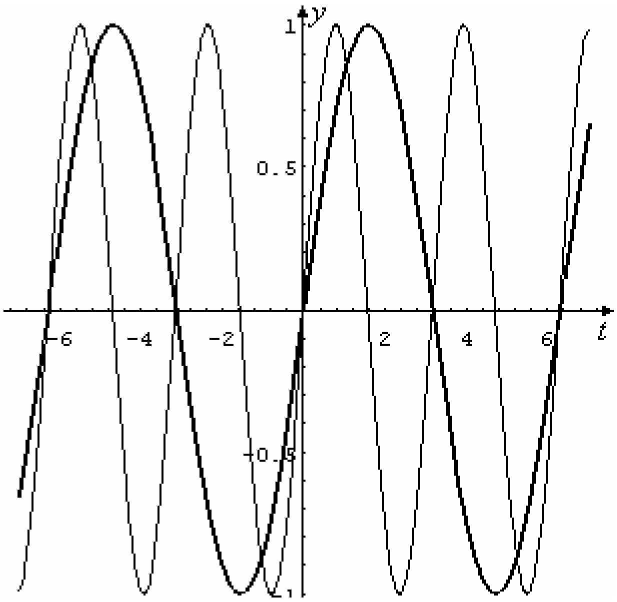
$$f(t) = \sin t\,,\quad g(t) = 2\sin t \quad \text{og} \qquad h(t) = 3\sin t$$



Disse tre funktioner er alle ens pånær amplituderne, som er henholdsvis: 1, 2 og 3. Det ses, at jo større, amplituden er, jo større bliver udsvingene - faktisk har de maksimale udsving "højden" a og $-a$.

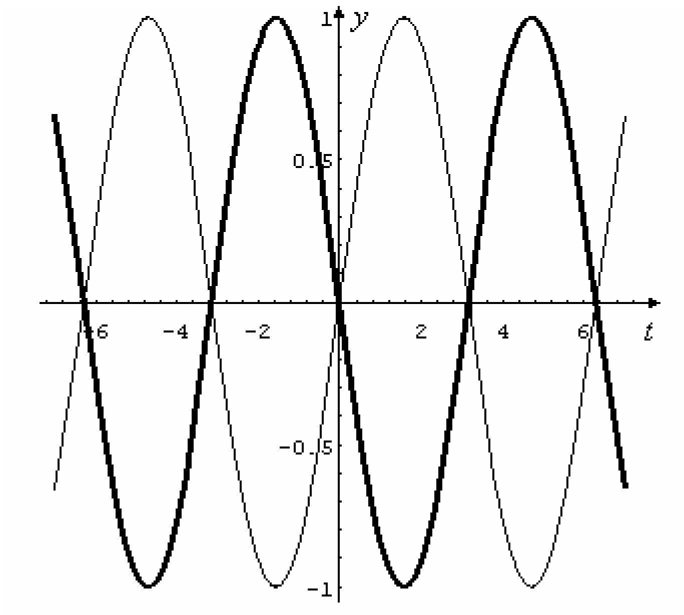
Bølgetallet b har noget at gøre med, hvor hurtigt funktion svinger op og ned. Betragt graferne for

$$f(t) = \sin t \quad \text{og} \qquad g(t) = \sin(2t)$$



Det ses, at jo større b er, jo hurtigere svinger funktionen op og ned.

Fasevinklen c kontrollerer, hvornår svingningen starter:



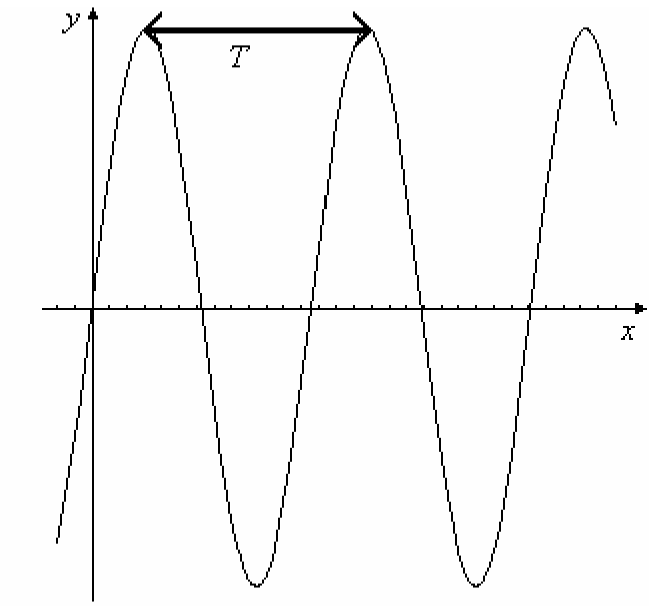
Denne figur viser graferne for

$$f(t) = \sin t \qquad \text{og} \qquad g(t) = \sin(t - \pi)$$

Som det ses, så starter g-svingningen π senere end f-svingningen.

Generelt vil fasevinklen b forsinke svingningen med $2\pi - c$

Perioden er et mål for, hvor hurtigt funktionen svinger op og ned:



Perioden T er defineret som afstanden mellem to på hinanden følgende bølge-toppe.

Sammenhængen mellem perioden og bølgetallet er:

> **Sætning 21 (FS)**
>
> Perioden T for funktionen f med forskriften
> $$f(t) = a\sin(bt + c)$$
> er givet ved
> $$T = \frac{2\pi}{b}$$

Bevis:

To på hinanden følgende bølgetoppe falder i punkterne

$$(t_0, a) \qquad \text{og} \qquad (t_0 + T, a).$$

Dvs.

$$a = a\sin(bt_0 + c) \qquad \text{og} \qquad a = a\sin(b(t_0 + T) + c)$$

$\Downarrow$

$$1 = \sin(bt_0 + c) \qquad \text{og} \qquad 1 = \sin(bt_0 + bT + c)$$

Men ser vi på grafen for sinusfunktionen, så er afstanden mellem to på hinanden følgende bølgetoppe lig 2π. Dette betyder, at differensen mellem indmaden i de to udtryk er 2π:

$$(bt_0 + bT + c) - (bt_0 + c) = 2\pi$$

$\Downarrow$

$$bT = 2\pi$$

$\Downarrow$

$$T = \frac{2\pi}{b}$$

Eksempel

På næste side er vist grafen for en svingning. Hvad er mon forskriften?

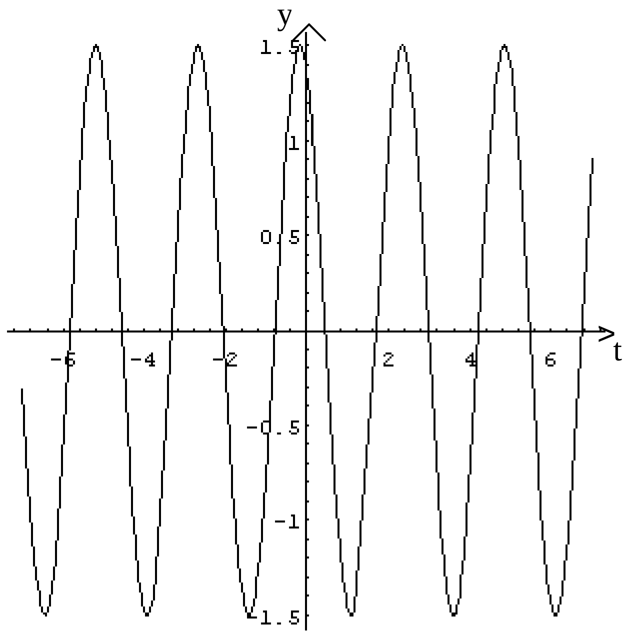
For det første ses, at svingningerne går fra maksimummet 1,5 til minimummet -1,5. Dette fortæller, at amplituden er $a = 1{,}5$.

Det ses endvidere på grafen , at de to første toppe efter at t er blevet positiv forekommer for t-værdierne ca. 2,3 og 4,9. Perioden er altså

$$T = 4{,}9 - 2{,}3 = 2{,}6$$

og af sætning 21 får vi

$$b = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2{,}6} = 2{,}4$$



Endelig betragtes den første gang, grafen krydser t-aksen i opadgående retning efter at t er blevet positiv:

$$a\sin(bt_0 + c) = 0 \qquad \text{(Da vi } \textbf{krydser } t\text{-aksen)}$$

$\Downarrow$

$$\sin(bt_0 + c) = 0$$

$\Downarrow$

$$bt_0 + c = \arcsin(0) = 0 \qquad \text{(Fordi det er } \textbf{første} \text{ gang)}$$

$\Downarrow$

$$c = -bt_0 = -2{,}4 \cdot 2 = -4{,}8$$

Fasevinkler er kun veldefinerede op til multipla af 2π, så vi kunne ligeså godt vælge

$$c = -4{,}8 + 2\pi = 1{,}5\,.$$

Forskriften blev altså

$$f(t) = 1{,}5\sin(2{,}4t + 1{,}5)$$

Opgaver

6.1 I en elektrisk kreds er spændingsfaldet $U(t)$ til tiden t over en komponent givet ved $$U(t) = 8{,}6 + 3{,}2\sin(20\pi t)\ ,\ t \geq 0$$

a) Hvor stort er spændingsfaldet til tiden $t = 0$?

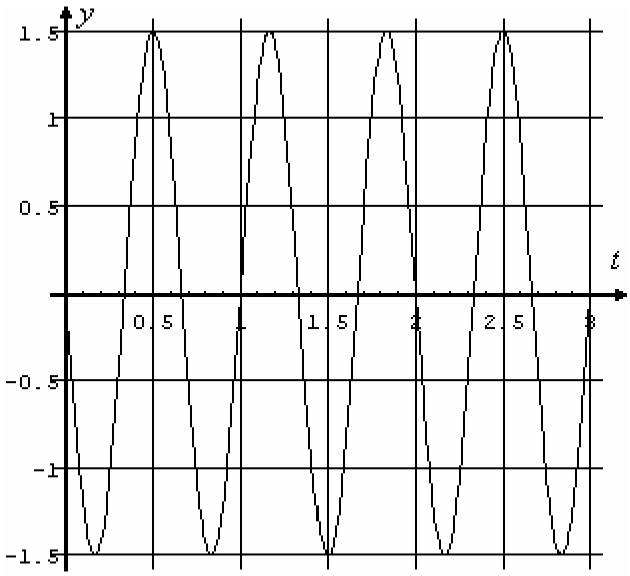
b) Angiv den maksimale og den minimale værdi af U.

c) Hvornår er spændingsfaldet første gang 10 ?

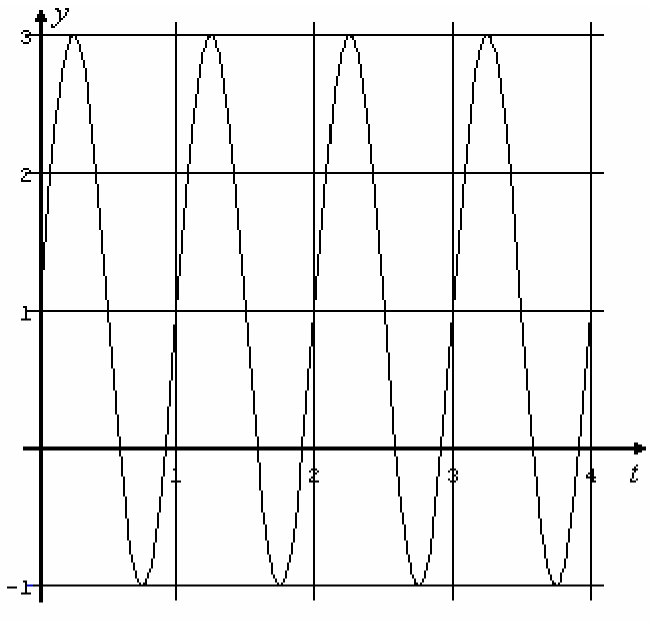
d) Hvor stor er $\dfrac{dU}{dt}$ til tiden $t = 2$? Hvordan kan dette tolkes?

6.2 Find forskrifterne for funktionerne, hvis grafer er vist nedenfor:

a)



b)



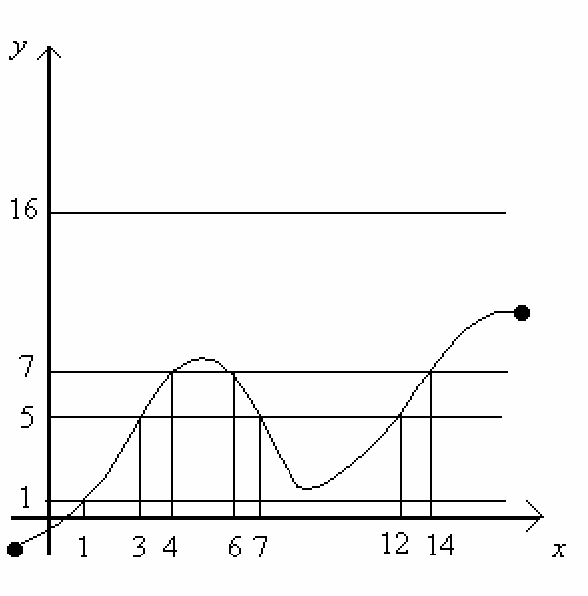
8.7 Injektivitet, surjektivitet, bijektivitet Omvendt funktion

I denne sektion skal vi studere ligninger af formen $f(x) = b$, hvor *f* er en funktion. Begreberne injektivitet og surjektivitet indføres som et mål for antallet af løsninger til denne ligning, og endelig kæder vi disse to sammen i begrebet bijektivitet. Det endelig mål er at præcisere, hvad der menes med en omvendt funktion.

Men først skal vi se lidt på, hvordan man kan løse ligningen $f(x) = b$ grafisk.

Eksempel

Nedenfor er tegnet grafen for en funktion *f*.



Lad os løse et par ligninger grafisk:

$f(x) = 1$ har løsningsmængden $L = \{1\}$ - man finder samtlige skæringspunkter mellem grafen for *f* og den vandrette linie med ligningen $y = 1$. Skæringspunkternes x-koordinater giver hver en løsning.
$f(x) = 5$ har løsningsmængden $L = \{3, 7, 12\}$.
$f(x) = 7$ har løsningsmængden $L = \{4, 6, 14\}$
$f(x) = 16$ har løsningsmængden $L = \varnothing$.

Vi indfører nu et par definitioner, som har noget at gøre med antallet af løsninger til ovennævnte type ligninger:

Definition 22

Funktionen $f : A \to B$ kaldes *injektiv*, hvis

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$$

for alle tal $x_1, x_2 \in A$.

En anden måde at sige dette på er

Sætning 23

Funktionen $f : A \to B$ er injektiv, hvis og kun hvis ligningen

$$f(x) = b$$

højst har en løsning, for alle $b \in B$.

Grafisk giver injektivitet sig udslag i, at den lodrette linie $y = b$ højst skærer grafen for *f* ét sted.

I praksis bruger man enten definition 22 direkte eller en undersøgelse af funktionens monotoniforhold (mere herom senere) til at bevise, at en funktion er injektiv. Vi giver et eksempel på den direkte anvendelse af definition 22.

Eksempel

$f : [-2;\infty[\to \mathbf{R} : x \mapsto \sqrt{x+2} + 6$ er injektiv. Vi har nemlig:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{x_1 + 2} + 6 = \sqrt{x_2 + 2} + 6$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{x_1 + 2} = \sqrt{x_2 + 2}$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1 + 2 = x_2 + 2$$

$$\Updownarrow$$

$$x_1 = x_2$$

Surjektivitet er et mere mystisk begreb, som er knyttet sammen med begrebet *værdimængde*:

Definition 24

Værdimængden $\mathrm{Vm}(f)$ for funktionen $f : A \to B$ er mængden

$$\mathrm{Vm}(f) = \left\{ f(x) \mid x \in A \right\}$$

Værdimængden, som altså er en delmængde af sekundærmængden *B*, er mængden af alle funktions**værdier** for *f*.

Eksempel

Betragt funktionen

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto x^2$$

Denne funktion har værdimængden $\mathrm{Vm}(f) = [0\,;\infty[$, idet det ikke-negative tal *b* er funktionsværdien af f.eks. $\sqrt{b}$.

Definition 25

Funktionen $f : A \to B$ kaldes *surjektiv*, hvis

$$\mathrm{Vm}(f) = B$$

For en surjektiv funktion er sekundærmængden og værdimængden altså ens!

Sætning 26

Funktionen $f : A \to B$ er surjektiv, hvis og kun hvis ligningen

$$f(x) = b$$

har mindst en løsning for alle $b \in B$.

Man kan ikke umiddelbart se på grafen for en funktion, om den er surjektiv, idet man jo ikke kan aflæse funktionens sekundærmængde på grafen. Derfor beviser man surjektivitet ved at finde værdimængden. Værdimængden kan findes ved hjælp af en såkaldt funktionsundersøgelse - mere herom senere.

Eksempel

Betragt nedenstående funktioner:

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto \sin x$$

$$g : \mathbf{R} \to [-1;1] : x \mapsto \sin x$$

$$h : [0;\pi] \to [-1;1] : x \mapsto \sin x$$

Ved at betragte f.eks. enhedscirklen ses, at $\mathrm{Vm}(f) = \mathrm{Vm}(g) = [-1;1]$, og $\mathrm{Vm}(h) = [0;1]$.

Ved sammenligning med sekundærmængderne for de tre funktioner ses, at kun funktionen g er surjektiv.

Særligt fint bliver det, hvis en funktion både er injektiv og surjektiv. En sådan funktion kaldes bijektiv:

Definition 27

Funktionen $f : A \to B$ er *bijektiv*, hvis og kun hvis f er både injektiv og surjektiv.

Sætning 28

Funktionen $f : A \to B$ er bijektiv, hvis og kun hvis ligningen

$$f(x) = b$$

har netop én løsning for alle $b \in B$.

Eksempel

Nedenstående funktioner er alle bijektioner:

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto x^3$$

$$g : [0;\infty[\to [0;\infty[: x \mapsto x^2$$

$$h :]0;\infty[\to \mathbf{R} : x \mapsto \ln x$$

For bijektive funktioner, og kun for bijektive funktioner, kan vi definere den *omvendte funktion*.

Definition 29

Lad $f : A \to B$ være en bijektiv funktion. Den *omvendte funktion*

$$f^{-1} : B \to A$$

defineres ved at sætte $f^{-1}(b)$ lig den entydigt bestemte løsning til ligningen $f(x) = b$.

Eksempel

De omvendte funktioner til de tre funktioner fra eksemplet før er alle velkendte:

$$f^{-1}: \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$$
$$g^{-1}: [0;\infty[\to [0;\infty[: x \mapsto \sqrt{x}$$
$$h^{-1}: \mathbf{R} \to]0;\infty[: x \mapsto e^x$$

Sætning 30

Lad $f : A \to B$ være en bijektion. Da gælder, at de sammensatte funktioner $f^{-1} \circ f$ og $f \circ f^{-1}$ har forskrifterne

$$f^{-1} \circ f : A \to A : x \mapsto x$$
$$f \circ f^{-1} : B \to B : y \mapsto y$$

Bevis:

Vi beregner $f^{-1} \circ f(x_0)$. Ifølge definition 20 er $f^{-1}(f(x_0))$ den eneste løsning til ligningen

$$f(x) = f(x_0).$$

Men denne ligning har en løsning, nemlig x_0, og da f er bijektiv, er dette den eneste løsning. Ergo, $f^{-1} \circ f(x_0) = x_0$.

Opgaver

7.1 Som tidligere påstået er de tre funktioner:

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto x^3$$
$$g : [0;\infty[\to [0;\infty[: x \mapsto x^2$$
$$h :]0;\infty[\to \mathbf{R} : x \mapsto \ln x$$

Bevis dette, og find deres omvendte funktioner.

7.2 Tegn grafen for en injektiv funktion, som har definitionsmængden $[-1, 2]$ og værdimængden $[3,5]$.

7.3 Bevis, at den lineære funktion

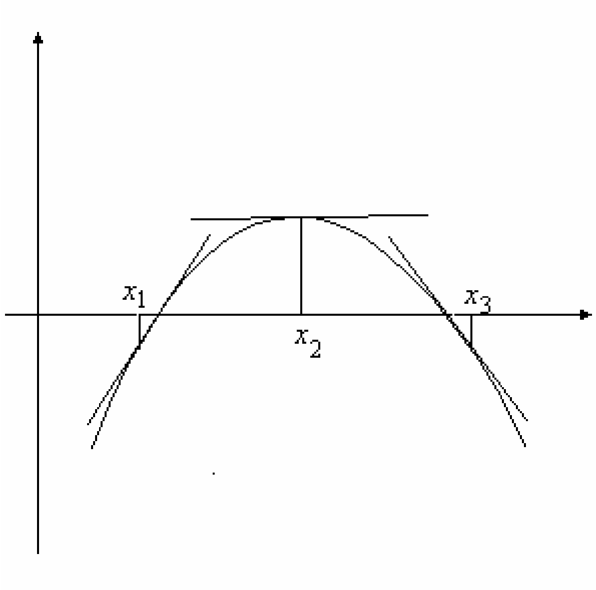
$$f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R} : x \mapsto ax + b$$

er en bijektion, hvis og kun hvis $a \neq 0$.
Tolk dette grafisk.

8.8 Monotoniforhold og ekstrema

Vi skal nu studere funktioners opførsel vha. differentialregning. Det viser sig, at fortegnsvariationen for differentialkvotienten f' til en funktion *f* fortæller temmeligt meget om *f*.

Betragt nedenstående funktionsgraf:



Tangenterne i punkterne x_1, x_2 og x_3 er indtegnet, og man ser ved betragtning af hældningskoefficienterne for tangenterne, at

$$f'(x_1) > 0$$
$$f'(x_2) = 0 \qquad \text{og}$$
$$f'(x_3) < 0$$

Samtidigt ser vi, at grafen for *f* i punktet x_1 går opad (eller at funktionen *f* her er voksende), at grafen for *f* 'topper' i punktet x_2, og at det igen går nedad i x_3.

For at formalisere de observationer, vi netop har gjort, så er det nødvendigt at konkretisere, hvad vi mener med en voksende eller aftagende funktion.

Definition 31

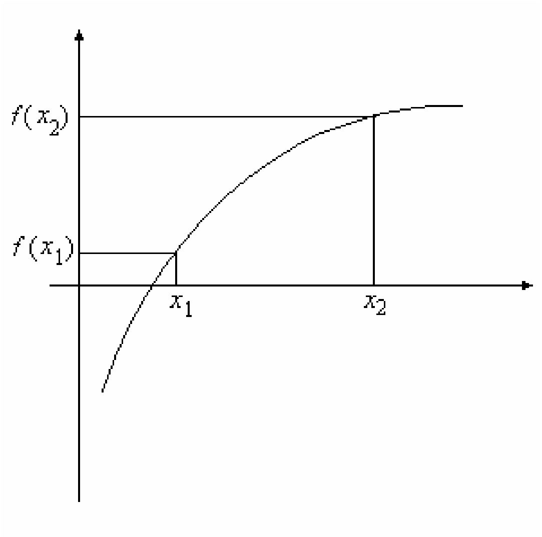
Funktionen $f : A \to B$ er *voksende*, hvis det for **alle** tal $x_1, x_2 \in A$ gælder, at

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

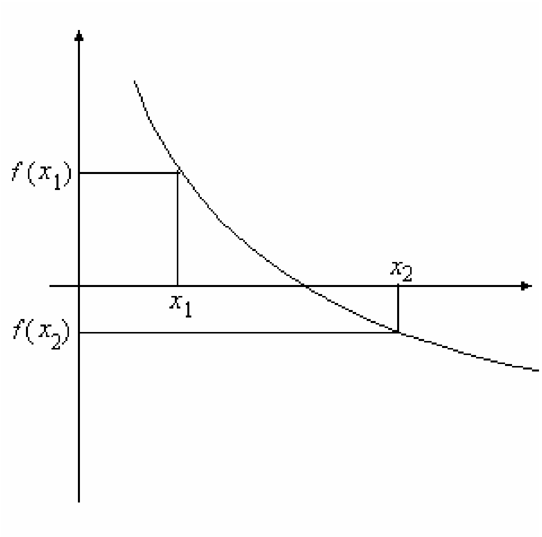
Funktionen $f : A \to B$ er *aftagende*, hvis det for **alle** tal $x_1, x_2 \in A$ gælder, at

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

En funktion, som enten er voksende eller aftagende, kaldes *monoton*.



En voksende funktion.



En aftagende funktion.

Man kan i visse tilfælde vise direkte, at en funktion er voksende eller aftagende:

Sætning 32

Den lineære funktion $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}:x\mapsto ax+b$ er

1) voksende, hvis $a>0$
2) aftagende, hvis $a<0$

Bevis:

1) Vi lader $x_1,x_2\in\mathbf{R}$ og beviser, at $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$:

$$x_1<x_2$$
$$\Downarrow$$
$$ax_1<ax_2 \qquad \text{(idet } a>0\text{)}$$
$$\Downarrow$$
$$ax_1+b<ax_2+b$$

$$\Downarrow$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

2) Dette bevises på stort set samme måde - det kritiske skridt er multiplikationen med a på begge sider af uligheden: Idet $a < 0$ skal ulighedstegnet vendes!

Nu er det en temmeligt restriktiv betingelse, at en funktion skal være voksende eller aftagende i hele sin definitionsmængde. Vi definerer derfor nedenstående begreber:

Definition 33

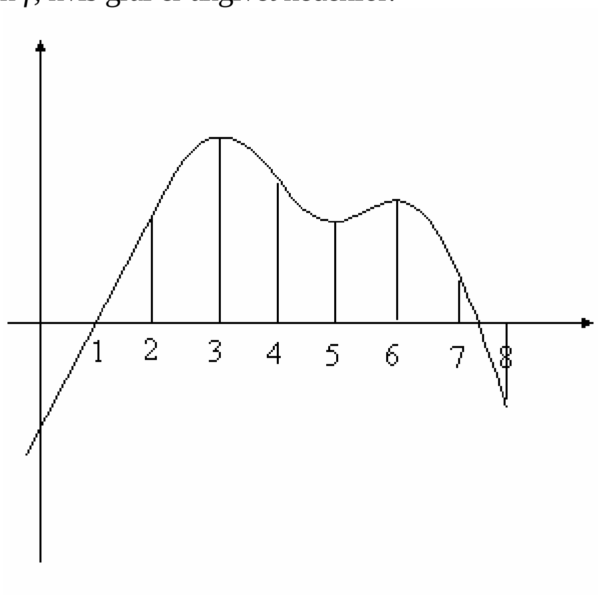
Funktionen $f : A \to B$ er *voksende i punktet* $x \in A$, hvis der eksisterer et åbent interval $]x-\varepsilon; x+\varepsilon[$, således at funktionen *f* er voksende i dette interval.

Funktionen $f : A \to B$ er *aftagende i punktet* $x \in A$, hvis der eksisterer et åbent interval $]x-\varepsilon; x+\varepsilon[$, således at funktionen *f* er aftagende i dette interval.

Dette åbne interval $]x-\varepsilon; x+\varepsilon[$ kaldes af matematikere en *omegn* omkring *x*.

Eksempel

Betragt funktionen *f*, hvis graf er angivet nedenfor:



Ved at se på grafen kan man direkte se, at *f* er voksende i f.eks. i 0, i 1 i 2 og i 5.5, mens *f* er aftagende i 4 og i 7.

Endvidere er *f* hverken voksende eller aftagende i 3 eller i 5.

Monotoni-intervallerne for funktionen *f* er de intervaller, hvori funktionen er voksende eller aftagende. Ved aflæsning på grafen ses, at

f er voksende i $]-\infty\,,3[$

f er aftagende i $]3\,,5[$

f er voksende i $]5\,,6[$

f er aftagende i $]6\,,\infty[$

Bemærk, at det er **forkert** at sige, at *f* er voksende i $]-\infty\,,3[\,\cup\,]5\,,6[$.
(F.eks. er $2{,}5 < 5{,}5$, men $f(2{,}5) > f(5{,}5)$).

Hovedsætningen omkring monotoniforhold er nedenstående sætning, som forbinder monotoniforhold med differentialkvotientens fortegn. Vi vil vente med at bevise denne sætning til næste sektion.

Sætning 34

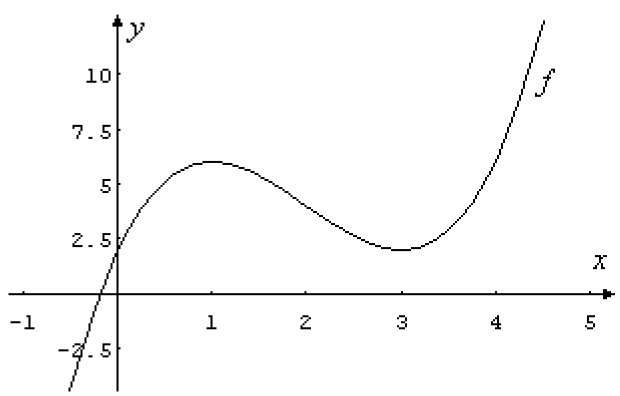
Lad $f : A \to B$ være en differentiabel funktion med kontinuert differentialkvotient, og lad $x \in A$. Så gælder:

$$f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ er voksende i } x$$

$$f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ er aftagende i } x$$

Eksempel

Betragt funktionen *f* med forskriften $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$
Denne funktions graf har udseendet:



Vi vil undersøge monotoniforholdene for *f* vha. differentialregning.
Først differentierer vi funktionen *f*:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

Herefter finder vi nulpunkterne for differentialkvotienten:

$$
\begin{aligned}
& f'(x) = 0 \\
\Updownarrow \\
& 3x^2 - 12x + 9 = 0 \\
\Updownarrow \\
& x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 9}}{2 \cdot 3} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Bemærk nu, at f' er et polynomium og derfor er kontinuert i hele sin definitionsmængde, som i dette tilfælde er $\mathbf{R}$. Den eneste måde, f' kan skifte fortegn på, er derfor ved at passere gennem et af de to nulpunkter, som jo er 1 eller 3. (Havde funktionen nogle diskontinuitetspunkter eller lodrette asymptoter, så skulle vi også tage hensyn til disse i den følgende undersøgelse).

Vi laver nu en tallinie, som viser fortegnsvariationen for f'. På denne tallinie indsætter vi de to nulpunkter:

x		1		3	$\to$
f'		0		0	
f					

Pga. kontinuiteten af f' må denne funktion have konstant fortegn på hver af intervallerne $]-\infty;1[$, $]1;3[$ og $]3;\infty[$. Vi finder dette fortegn ved at beregne værdien af f' for et enkelt punkt fra hver af de 3 intervaller:

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= 3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 9 = 9 > 0 \\
f'(2) &= 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 < 0 \\
f'(4) &= 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9 > 0
\end{aligned}
$$

Vi kan nu udfylde fortegnene på tallinien, og bruge sætning 6 til at oversætte den opnåede information til monotoniforholdene for *f* (symboliseret ved pilene i nederste række).

x		1		3	$\to$
f'	+	0	-	0	+
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Det ses, at

f er voksende i $]-\infty;1[$

f er aftagende i $]1;3[$
f er voksende i $]3;\infty[$

En anden ting, vi har brug for, er definitionen af minima og maksima (bemærk, at de oprindeligt latinske ord *minimum* og *maksimum* faktisk hedder *minima og maksima* i flertal).

Definition 35

Funktionen $f : A \to B$ har et *globalt maksimum* i punktet x_0, hvis det for alle $x \in A$ gælder, at

$$f(x_0) \geq f(x)$$

x_0 kaldes et *globalt maksimumspunkt*, og tallet $f(x_0)$ er det *globale maksimum*.

Funktionen $f : A \to B$ har et *globalt minimum* i punktet x_0, hvis det for alle $x \in A$ gælder, at

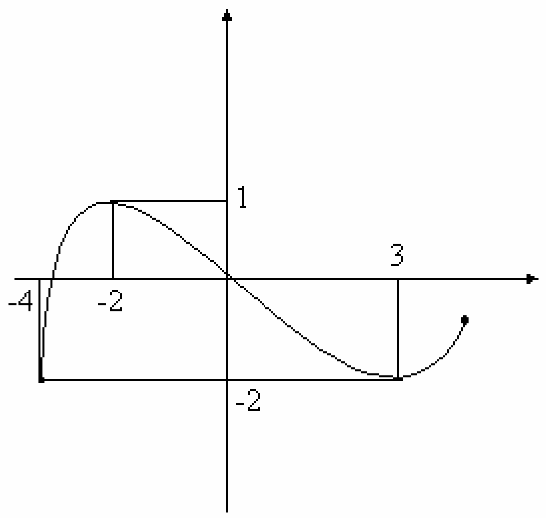
$$f(x_0) \leq f(x)$$

x_0 kaldes et *globalt minimumspunkt*, og tallet $f(x_0)$ er det *globale minimum*.

Under ét kalder man globale minima og globale maksima for *globale ekstrema*. (Ental: Ekstremum)

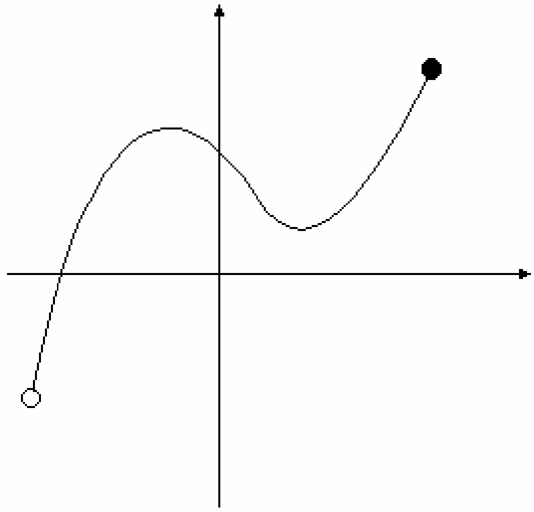
Eksempel

Betragt funktionen f med grafen nedenfor:



Det ses, at *f* har det globale maksimum 1, og det globale maksimumspunkt -2, og det globale minimum -2, og de to globale minimumspunkter -4 og 3.

Bemærk, at en funktion godt kan have flere globale maksimumspunkter og minimumspunkter, men kun ét globalt maksimum og ét globalt minimum.
En funktion behøver faktisk ikke at have et globalt minimum eller maksimum:



Denne funktion har et globalt maksimum, men ikke noget globalt minimum.

Vi har også **lokale** minima og maksima:

Definition 36

Funktionen $f : A \to B$ har et *lokalt maksimum* i $x_0 \in A$, hvis der findes en omegn $]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$ omkring x_0, således at for alle $x \in]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$ gælder, at

$$f(x) \leq f(x_0)$$

x_0 kaldes *et lokalt maksimumspunkt*, og tallet $f(x_0)$ et *lokalt maksimum.*

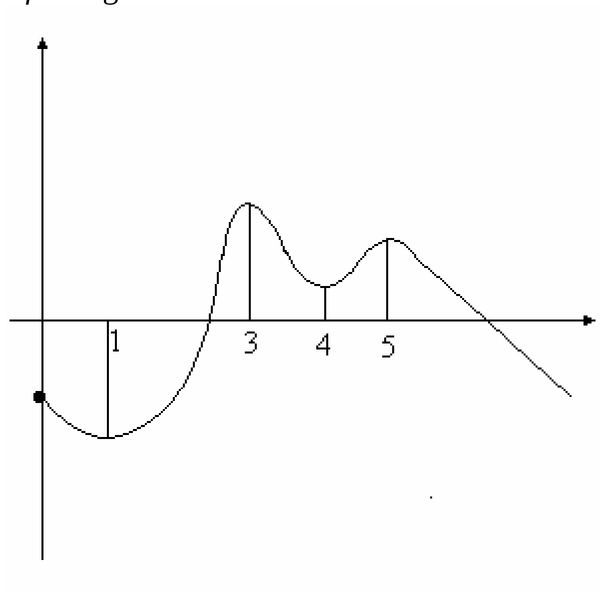
Funktionen $f : A \to B$ har et *lokalt minimum* i $x_0 \in A$, hvis der findes en omegn $]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$ omkring x_0, således at for alle $x \in]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[$ gælder, at

$$f(x) \geq f(x_0)$$

x_0 kaldes *et lokalt minimumspunkt*, og tallet $f(x_0)$ et *lokalt minimum.*

Eksempel

Betragt funktionen *f* med grafen:



Funktionen *f* har det globale maksimumpunkt 3, men intet globalt minimum.
Funktionen har følgende lokale maksimumspunkter: 0, 3 og 5.
Funktionen har følgende lokale minimumspunkter: 1 og 4

En vigtig anvendelse af disse begreber er følgende:

Sætning 37

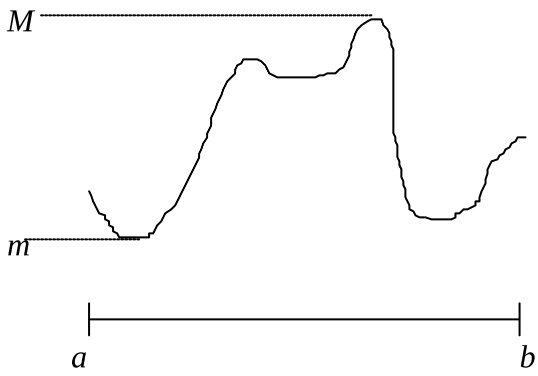
Lad $f:[a\,;b]\rightarrow \mathbf{R}$ være en kontinuert funktion. Så gælder

a) *f* antager sit minimum m og sit *maksimum* M på $[a\,;b]$.

b) $Vm(f)=[m\,;\,M]$

Vi vil ikke bevise sætningen - det er temmeligt svært. Men vi kan fortælle, hvorfor sætningen er intuitivt klar.

Forestil dig en elastiksnor - det er dit interval på x-aksen. Du hiver nu i elastiksnoren, så den bugter sig godt. Men elastiksnoren må ikke gå i stykker - funktionen *f* er jo kontinuert!



Vi hiver i elastiksnoren

Elastiksnor

Der må være et sted, hvor du har hevet mest opad - det er dit maksimum *M*; og der må være et sted, hvor du har hevet mest nedad - det er dit minimum m.

Sætningen er især velegnet til at finde værdimængder - men funktionen skal altså være kontinuert og have et **lukket** interval som definitionsmængde.

Hvis funktionen er diskontinuert, ikke er defineret på et lukket interval, har lodrette asymptoter eller laver andre narrestreger, så går det galt!

En måde at finde lokale ekstremumspunkter på, er ved brug af nedenstående sætning:

Sætning 38

Lad $f : A \to B$ være en differentiabel funktion. Så gælder

$$f \text{ har et lokalt ekstremum i punktet } x_0$$
$$\Downarrow$$
$$f'(x_0) = 0$$

Bevis:

Vi viser kun sætningen i det tilfælde, hvor det lokale ekstremum er et lokalt maksimum.

Vi skal altså vise, at $f'(x_0) = 0$. Vi skal derfor vise, at

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0$$

Da vi har et lokalt maksimum i x_0, så får vi at

$$f(x_0 + h) \leq f(x_0)$$

og dermed at

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$$

Derfor gælder der om de to differenskvotienter

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \le 0 \qquad \text{for } h>0$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \ge 0 \qquad \text{for } h<0$$

I grænsen får vi

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \ge 0$$

$$\lim_{h\to 0-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \le 0$$

Da *f* er differentiabel, så skal de to grænseværdier være ens, og derfor må den fælles grænseværdi være 0. Ergo, $f'(x_0)=0$.

Bemærk, at den omvendte sætning ikke gælder. Man kan sagtens have punkter x_0, hvor $f'(x_0)=0$, men hvor x_0 ikke er et lokalt ekstremumspunkt. Man taler her om en vandret *vendetangent*.

Eksempel

Betragt funktionen *f* med forskriften

$$f(x)=x^4-6x^2+8x+20$$

Vi ønsker at bestemme samtlige lokale ekstremumspunkter for *f*.
For det første differentierer vi funktionen:

$$f'(x)=4x^3-12x^2+8$$

og finder differentialkvotientens nulpunkter - disse er 1 og -2, som man let overbeviser sig om ved brug af f.eks. *p*/*q*-metoden.
Herefter laves en fortegnslinie for f':

x		-2		1	
f'	-	0	+	0	+
f	↘		↗		↗

Af fortegnsvariationen kan man se, at *f* har et lokalt minimum i -2 og en vendetangent i 1.

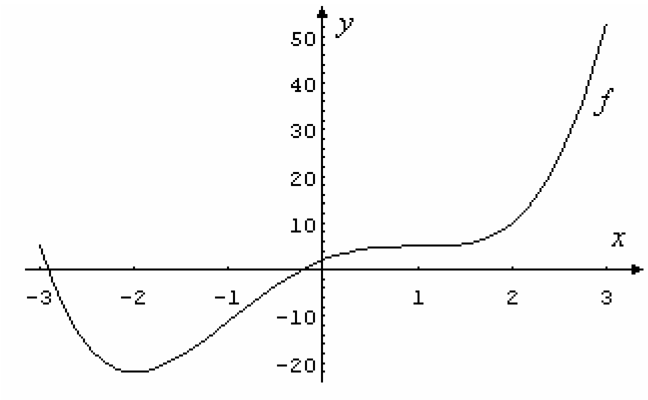
(Vendetangenter optræder, når f' har samme fortegn på begge sider af punktet, dvs. fortegnsvariationen -0- eller +0+, mens lokale minima kræver fortegnsvariationen -0+. +0- giver et lokalt maksimum).

Faktisk kan man se, at funktionen *f* har værdimængden

$$Vm(f) = [f(-2);\infty[= [-4;\infty[$$

idet $f(x) \to \infty$ for $x \to \pm\infty$.

Grafen for *f* er skitseret nedenfor:



Eksempel

Funktionen *g* er givet ved

$$g:[-3;3] \to \mathbf{R}: x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$$

Hvad er $\mathrm{Vm}(g)$?

Idet *g* klart er kontinuert (*g* er jo differentiabel), så er $\mathrm{Vm}(g)$ ifølge sætning 37 et lukket interval, og *g* har et globalt minimum og et globalt maksimum.
Kandidater til disse minimums- og maksimumspunkter er dels intervalendepunkterne for definitionsmængden, dels nulpunkter for g'. Vi finder disse nulpunkter:

$$g'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

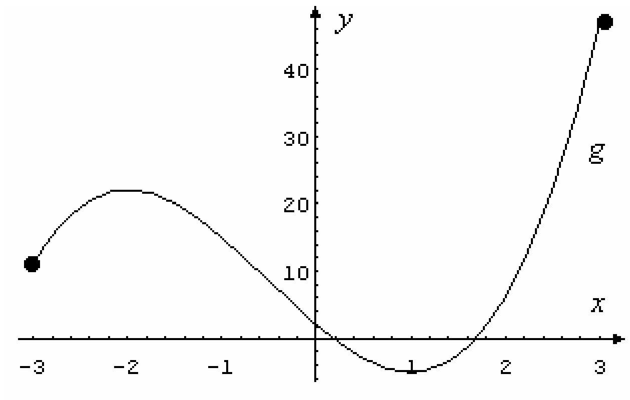
og løsning af en passende andengradsligning viser, at nulpunkterne for g' er -2 og 1.
De kritiske punkter er altså -3, -2, 1 og 3. Vi beregner *g* i alle 4 punkter:

x	-3	-2	1	3
$g(x)$	11	22	-5	47

Det ses, at det globale minimum for *g* er -5, og dette antages i minimumspunktet 1.
Det globale maksimum er 47, antaget i 3.
Værdimængden er derfor det lukkede interval

$$\mathrm{Vm}(g) = [-5;47]$$

Grafen for *g* er vist nedenfor:



Opgaver

8.1 Bevis vha. sætning 34 nedenstående påstande:

a) den eksponentielle udvikling $f(x) = b \cdot a^x$ er voksende, hvis og kun hvis $a > 1$,

b) den eksponentielle udvikling $f(x) = b \cdot a^x$ er aftagende, hvis og kun hvis $0 < a < 1$.

8.2 Tegn grafer for funktioner, som opfylder nedenstående, og som ikke opfylder betingelserne i sætning 37.

a) *f* har et åbent interval som definitionsmængde,

b) *g* har den lodrette asymptote med ligningen $x = 3$

c) *h* er diskontinuert i punkterne 2 og 4, $\mathrm{Dm}(h) = [0;6]$

8.3 Undersøg nedenstående funktioner med henblik på definitionsmængde og monotoniforhold. Skitsér graferne.

a) $f(x) = (x+3)^{-1}$ b) $g(x) = x^2 + 2x - \dfrac{1}{x}$

c) $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$

8.4 Bestem værdimængden for funktionerne

$f : [0;5] \to \mathbf{R} : x \mapsto x^2 - 2x + 3$

$g : [-3;5] \to \mathbf{R} : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$

$h : [0;1] \to \mathbf{R} : x \mapsto x(x-1)$

8.9 Middelværdisætningen

De to næste sætninger - Rolle's sætning og middelværdisætningen - har stor teoretisk anvendelse. De anvendes bl.a. til at bevise hovedsætningen 34.

> **Sætning 39 (Rolle's sætning)**
>
> Lad $f:[a;b] \to \mathbf{R}$ være en differentiabel funktion opfyldende
> $$f(a) = f(b) = 0$$
> Så findes mindst ét tal $c \in \left]a;b\right[$, så at
> $$f'(c) = 0$$

Sætningen betyder, at hvis funktionen både starter og ender i funktionsværdien 0, så må der findes et punkt, hvor tangenten er vandret.

Bevis:

Funktionen *f* er differentiabel og dermed kontinuert. Ifølge sætning 37 antager *f* dermed sit minimum m og sit maksimum M på $[a;b]$.

Vi skal nu dele op i flere tilfælde:

I: $M > 0$

f antager sit maksimum i maksimumspunktet *c*. Nu er $f(c) = M > 0$, så *c* kan ikke være *a* eller *b*. Ergo $c \in \left]a;b\right[$.

Ifølge sætning 38 er $f'(c) = 0$.

II: $M = 0$ og $m < 0$

f antager sit minimum m i minimumspunktet *c*. Igen ses, at $c \in \left]a;b\right[$ og $f'(c) = 0$.

III: $M = m = 0$

Dette kan kun lade sig gøre, hvis $f(x) = 0$ for alle $x \in [a;b]$. *f* er altså 0-funktionen, og differentieres denne, ses, at
$$f'(x) = 0 \text{ for alle } x \in \left]a;b\right[.$$
Vi kan altså vælge *c* tilfældigt fra intervallet!

Middelværdisætningen er en generalisation af Rolle's sætning

Sætning 40 (Middelværdisætningen)

Lad $f:[a;b]\to\mathbf{R}$ være en differentiabel funktion. Så findes et tal $c\in[a;b]$ opfyldende

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Sætningen udtrykker, at der findes en tangent til grafen for *f* med samme hældning som sekanten gennem punkterne $(a,f(a))$ og $(b,f(b))$.

Bevis:

Lad os indføre hjælpefunktionen $g(x)=f(x)-l(x)$, hvor *l* er den limeære funktion, som går gennem de to punkter $(a,f(a))$ og $(b,f(b))$. Folk, som kan deres analytiske geometri, vil vide, at *l* har forskriften

$$l(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

og forskriften for *g* er derfor

$$g(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$$

Vigtigst er det dog, at

$$l(a)=f(a)\quad\text{og}\qquad l(b)=f(b).$$

Fordelen ved denne hjælpefunktion er nu, at den opfylder betingelserne i Rolle's sætning:

g er differentiabel, idet $g=f-l$, og både *f* og den lineære funktion *l* er differentiabel.

$$g(a)=f(a)-l(a)=f(a)-f(a)=0$$

$$g(b)=f(b)-l(b)=f(b)-f(b)=0$$

Rolle's sætning fortæller da, at der findes et tal $c\in[a;b]$ opfyldende

$$g'(c)=0.$$

Men vi har

$$g'(x)=f'(x)-l'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

så tallet *c* må opfylde

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

eller

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Vi kan endelig nu bevise sætning 34:

Bevis for sætning 34:

Vi nøjes med at bevise, at

$$f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; f \text{ er voksende i } x.$$

idet det tilsvarende udsagn, hvor *f* er aftagende i x, behandles ganske analogt.

Hvis $f'(x) > 0$, så vil der findes en omegn $O = \left]x - \varepsilon, x + \varepsilon\right[$, hvori f' kun antager positive værdier, idet f' er kontinuert. Vi vil vise, at *f* er voksende i denne omegn *O*.

Lad $x_1, x_2 \in O$ og antag, at $x_1 < x_2$. Middelværdisætningen viser, at der findes et tal x_3, således at $x_1 < x_3 < x_2$, og med

$$f'(x_3) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Men nu er $x_3 \in O$, så $f'(x_3) > 0$. Endvidere er $x_2 - x_1 > 0$, hvilket betyder, at

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_3) \cdot (x_2 - x_1) > 0$$

eller

$$f(x_1) < f(x_2)$$

f er altså voksende i omegnen *O*.

Opgaver

9.1 Bevis den omvendte sætning til sætning 34, dvs:

$$f \text{ er voksende i } x \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) \geq 0$$

og

$$f \text{ er aftagende i } x \qquad \Rightarrow \qquad f'(x) \leq 0$$

(Vink: Betragt fortegnet for differenskvotienten $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$)

9.2 Bemærk, at vi ikke kan erstatte tegnene $\geq$ og $\leq$ med > og < i opgave 9.1. Giv et eksempel på dette.

8.10 Funktionsundersøgelse

Man er ofte i den situation, at man skal undersøge grafen for en funktion i større eller mindre detalje. Her kan man f.eks. tegne grafen ved at plotte en masse støttepunkter, men det er ikke sikkert, at disse støttepunkter giver et godt billede af grafens udseende. Man er derfor ofte nødt til at lave en funktionsundersøgelse.

I en funktionsundersøgelse skal (nogle af) følgende punkter behandles:

1. Definitionsmængde
2. Nulpunkter (og skæring med y-aksen)
3. Fortegn
4. Asymptoter
5. Monotoniforhold
6. Graf
7. Værdimængde

Rækkefølgen behøver ikke at være den ovenfor, men denne rækkefølge er den almindeligste.

Eksempel

Funktionen f har forskriften $f(x) = \dfrac{2x^2 + 4x}{x - 2}$

Definitionsmængde:

En brøk kan ikke have nævneren 0, så alle de x-værdier, hvor denne er nul, er ikke med i definitionsmængden:

$$x - 2 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x = 2$$

Altså fås, at $\quad \mathrm{Dm}(f) = \mathbf{R} \setminus \{2\}$

Nulpunkter:

$$f(x) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{2x^2 + 4x}{x - 2} = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$2x^2 + 4x = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x = 0 \;\vee\; x = -2$$

Funktionen f har altså nulpunkterne 0 og -2 .

Fortegn:

Idet funktionen *f* er kontinuert (det er jo en rational funktion), så kan *f* kun skifte fortegn i nulpunkterne og i punktet $x = 2$, som jo ikke ligger i definitionsmængden.

f har altså konstant fortegn i hver af intervallerne $]-\infty;-2[$, $]-2;0[$, $]0;2[$ og $]2;\infty[$.

For at finde fortegnene beregner vi en funktionsværdi i et tilfældigt punkt i hver af de 4 intervaller.

$$f(-3) = \frac{2\cdot(-3)^2 + 4\cdot(-3)}{(-3)-2} = -\tfrac{6}{5} < 0$$

$$f(-1) = \frac{2\cdot(-1)^2 + 4\cdot(-1)}{(-1)-2} = \tfrac{2}{3} > 0$$

$$f(1) = \frac{2\cdot 1^2 + 4\cdot 1}{1-2} = -6 < 0$$

$$f(3) = \frac{2\cdot 3^2 + 4\cdot 3}{3-2} = 30 > 0$$

For at overskue fortegnene laver vi en *fortegnslinie*:

x		-2		0		2	
$f(x)$	-	0	+	0	-		+

(Den stiplede linie angiver, at funktionen ikke er defineret i $x = 2$)

Vi får, at

f er negativ i intervallerne $]-\infty;-2[$ og i $]0;2[$

f er positiv i intervallerne $]-2;0[$ og i $]2;\infty[$

Asymptoter:

f er en rational funktion, dvs. en polynomiumsbrøk, og som sådan er det ganske let at finde asymptoterne.

Idet 2 er rod i nævneren uden samtidigt at være rod i tællerne, er linien med ligningen $x = 2$ en lodret asymptote for *f*.

Tællerpolynomiet har grad 2, og nævneren grad 1. Idet denne forskel er $2 - 1 = 1$, så har *f* en skrå asymptote (og ingen vandrette). Ved polynomiers division ses, at

$$f(x) = \frac{2x^2 + 4x}{x-2} = 2x + 8 + \frac{16}{x-2}$$

Linien med ligningen $y = 2x + 8$ er derfor en skrå asymptote.

Grafen for *f* har altså asymptoterne med ligningerne $x = 2$ og $y = 2x + 8$.

Monotoniforhold:

For at finde monotoniforholdene skal differentialkvotienten f' udregnes:

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2 + 4x}{x-2}\right)' =$$

$$\frac{(2x^2 + 4x)' \cdot (x-2) - (2x^2 + 4x) \cdot (x-2)'}{(x-2)^2} =$$

$$\frac{(4x+4) \cdot (x-2) - (2x^2 + 4x) \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 8x - 8}{(x-2)^2}$$

Herefter findes nulpunkterne for f' :

$$f'(x) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{2x^2 - 8x - 8}{(x-2)^2} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2x^2 - 8x - 8 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 2 - 2\sqrt{2} \quad \vee \quad x = 2 + 2\sqrt{2}$$

(Bemærk, at det ikke kunne betale sig at udregne nævneren - den forsvinder alligevel ved løsning af ligningen.)

Vi laver nu en fortegnslinie for f', hvor vi betragter de to nulpunkter $2 \pm 2\sqrt{2}$ samt det skumle tal 2 (som jo ikke er i definitionsmængden, og som i øvrigt giver anledning til en lodret asymptote):

$$f'(-5) = \frac{2 \cdot (-5)^2 - 8 \cdot (-5) - 8}{((-5) - 2)^2} = \tfrac{82}{49} > 0$$

$$f'(0) = \frac{2 \cdot 0^2 - 8 \cdot 0 - 8}{(0-2)^2} = -2 < 0$$

$$f'(3) = \frac{2 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 - 8}{(3-2)^2} = -14 < 0$$

$$f'(5) = \frac{2 \cdot 5^2 - 8 \cdot 5 - 8}{(5-2)^2} = \tfrac{2}{9} > 0$$

Fortegnslinien bliver:

x		$2-2\sqrt{2}$		2		$2+2\sqrt{2}$	
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f(x)$	↗	lokalt maximum	↘		↘	lokalt minimum	↗

Altså får vi

f er voksende i $\left]-\infty;2-2\sqrt{2}\right[$ og i $\left]2+2\sqrt{2};\infty\right[$

f er aftagende i $\left]2-2\sqrt{2};2\right[$ og i $\left]2;2+2\sqrt{2}\right[$

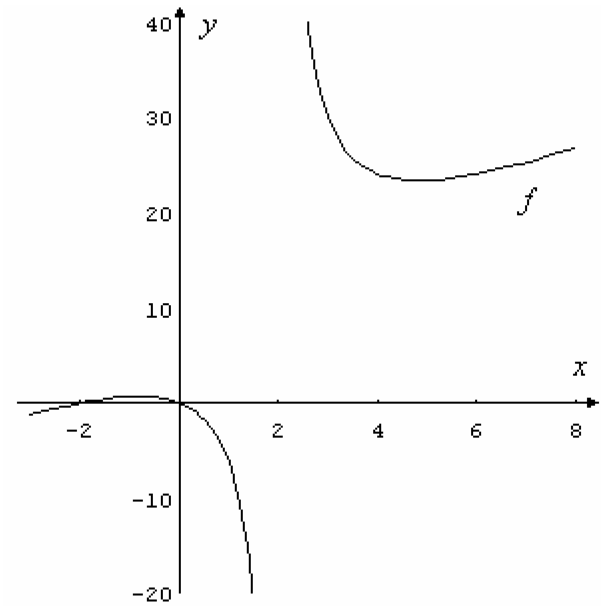
Endvidere ser vi, at

f har lokalt maksimum i $2-2\sqrt{2}$
med maksimumsværdien $f(2-2\sqrt{2}) = 12-8\sqrt{2}$

f har lokalt minimum i $2+2\sqrt{2}$
med minimumsværdien $f(2+2\sqrt{2}) = 12+8\sqrt{2}$

Graf:

Grafen for f ser således ud:



Bemærk, at denne graf stemmer overens med samtlige oplysninger, vi tidligere har fundet.

Værdimængde:

Ud fra grafen og de tidligere fundne lokale ekstrema ses, at

$$\mathrm{Vm}(f) = \left]-\infty\,;\,12-8\sqrt{2}\right] \cup \left[12+8\sqrt{2}\,;\,\infty\right[$$

Opgaver

10.1 Undersøg nedenstående funktioner mht. definitionsmængde, nulpunkter, fortegn, asymptoter, monotoniforhold. Tegn graferne og bestem endelig værdimængderne.

a) $f(x) = \dfrac{2-x}{x^2-9}$ b) $f(x) = \dfrac{2-x}{x^2}$

c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$ d) $f(x) = \sin x + \cos x$

e) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}$ f) $f(x) = \sqrt{2x^2-18}$

g) $f(x) = 9^x - 4\cdot 3^x + 3$ h) $f(x) = (\ln x)^2 - 9$

i) $f(x) = \ln(x^2-16)$ j) $f(x) = e^x - ex + 5$

8.11 Optimering

En ofte mødt problemstilling indenfor det virkelige liv er *optimering* : Hvornår bliver en eller anden størrelse maksimal (f.eks. indtjeningen) eller minimal (f.eks. omkostningerne). Sådanne problemer kan løses ved hjælp af differentialregning:

Eksempel

Firmaet *Skær og Streng* fremstiller ostehøvle. Det viser sig, at profitten p ved salget af ostehøvle afhænger af salgsprisen x for en ostehøvl på følgende måde:

$$p(x) = -x^3 + 27x + 900$$

hvor p er angivet i millioner kr.
Hvilken salgspris skal firmaet sælge sine ostehøvle til for at få maksimal indtjening?

Her skal vi jo finde det globale maksimum for funktionen p, og det kan vi jo godt!
For det første er $\mathrm{Dm}(p) = [0\,,\infty[$, idet det jo er svært at sælge noget til en negativ pris.
For det andet kan vi finde nulpunkterne for p' :

$$p'(x) = -3x^2 + 27$$

og

$$p'(x) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$-3x^2 + 27 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 3 \quad \vee \quad x = -3$$

Endelig skal vi lave en fortegnslinie for p', hvorpå vi indtegner x-værdierne 0 (et intervalendepunkt) og 3 (-3 udelukkes, idet $-3 \notin \mathrm{Dm}(p)$):

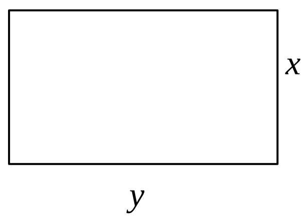
x	0		3	
p'	0	+	0	-
p	lok. min.		lok. max.	

Det ses, at profitten bliver maksimal, når osteøvlene sælges til en pris af 3 kr. pr. stk. Profitten bliver her $p(3) = 954$ millioner kr.

Værre er det, når man selv skal finde ud af, hvilken funktion det er, man skal optimere:

Eksempel

En rektangulær mark skal have arealet 10000 m^3 og mindst mulig omkreds (af hensyn til indhegningen). Hvilken form skal marken have, og hvor lang bliver omkredsen?



Kalder vi de to sidelænger for x og y, så ses, at

$$\text{arealet} = xy$$

og

$$\text{omkredsen} = 2x + 2y$$

Her er der desværre to variable, hvilket gør det svært at differentiere, så vi må eliminere den ene, f.eks. y. Dette gøres ved hjælp af arealbetingelsen:

$$xy = 10000 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{10000}{x}$$

Dette kan vi så indsætte i udtrykket for omkredsen, som vi jo skulle optimere

$$f(x) = 2x + 2y = 2x + 2 \cdot \frac{10000}{x} = 2x + 20000x^{-1}$$

Her kalder vi omkredsen for f. Det ses, at $\mathrm{Dm}(f) = [0\,, \infty[$, idet det jo er umuligt med negative længder.
Nulpunkterne for $f\,'$ findes:

$$f\,'(x) = 2 - 20000x^{-2}$$

og

$$f\,'(x) = 0$$

$\Updownarrow$

$$2 - 20000x^{-2} = 0$$

$\Updownarrow$

$$x = 100 \quad \vee \quad x = -100\,.$$

Vi udelukker tilfældet $x = -100$ og laver en fortegnslinie for $f\,'$:

x	0		100	
p'	0	-	0	+
p	lok.		lok.	

max. min.

Det ses, at omkredsen bliver minimal for $x = 100$.
Endvidere fås

$$y = \frac{10000}{x} = \frac{10000}{100} = 100$$

så rektanglet var faktisk et kvadrat, og

$$\text{omkreds} = 2x + 2y = 400.$$

Opgaver

11.1 En hyperbel har ligningen $x^2 - y^2 = 1$.

a) Tegn kurven. (Vink: Sæt x lig 1, 2, 3, ... og find de mulige y-værdier)

Opgaven går ud på at finde det punk på hyperblen, som ligger tættest på *origo*, (0,0).

b) Opskriv et udtryk for afstanden mellem (x, y) og origo.

c) Kan y elimineres?

d) Minimér denne afstand og finde det (eller de) nærmeste punkter.

11.2 Et stykke pap til en plakat har arealet 1,8 m^2. I toppen og i bunden skal der være en margen på 50 cm, og i siderne en margen på 30 cm.
Hvordan skal papstykket være formet, således at det trykte areal bliver størst muligt?
(Vink: Start med en tegning)

11.3 Summen af to positive tal er 20. Bestem de to tal i hvert af følgende tilfælde:

a) deres produkt er maksimalt

b) deres kvadratsum er minimal

c) summen af kvadratet på det ene tal og den tredie potens af det andet tal er maksimalt.

Facitliste

3.2 a) $\sqrt{3}/2$ b) $1/2$ c) $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$ d) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$
e) $\sqrt{2-\sqrt{3}}\,/2$ f) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\,/2$

4.1 a) $\cos x - 1 - \tan^2 x$ b) $-\dfrac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$ c) $\cos x \cdot e^{\sin x+2}$
d) $\dfrac{1+\tan^2 x}{(1+\tan x)^2}$ e) $-\sqrt{x}\sin x + \dfrac{\cos x}{2\sqrt{x}}$ f) $1+\tan^2(x+3)$
g) $e^x\cos(e^x) - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ h) $2\cos x - 2\sin x\cos x$
i) $\dfrac{-\sin x\cos(x+1)+\cos x\sin(x+1)}{\cos^2(x+1)}$ j) $-(2x+2)\sin(x^2+2x-3)$
k) $-3\sin(3x)+5$ l) $\cos(\sin(x))\cdot\cos x$

4.3 0,7391

5.1 a) $\pm 1{,}8029 + 2\pi z \;,\; z\in \mathbf{Z}$ b) ingen løsninger
c) $1{,}0037 + \pi z \;,\; z \in \mathbf{Z}$ d) 0,4893 ; 2,6523 ; 6,7725 ; 8,9355
e) $129{,}19^\circ\,;\,230{,}80^\circ$ f) -1,8925 ; 1,2490 ; 4,3906

5.2 a) $\left[0\,,\tfrac{\pi}{6}\right[\,\cup\,\left]\tfrac{5\pi}{6}\,,2\pi\right]$ b) $\left[0\,;0{,}7954\right[\,\cup\,\left]5{,}4878\,;2\pi\right]$
c) $\left]0{,}8761;1\right]$ d) $\left]0{,}9828\,;\tfrac{\pi}{2}\right[\,\cup\,\left]4{,}1244\,;\tfrac{3\pi}{2}\right[\,\cup\,\left]7{,}2654\,;\tfrac{5\pi}{2}\right[$
e) $\left[-6\,;-2{,}9402\right[\,\cup\,\left]-0{,}2014\,;3{,}3430\right[\,\cup\,\left]6{,}0818\,;9{,}6261\right[$ f) $\mathbf{R}$

6.1 a) 8,6 b) 11,8 og 5,4 c) 0,00729 d) 201

6.2 a) $1{,}5\cdot\sin(3\pi t+\pi)$ b) $1+2\sin(2\pi t)$

8.3 a) $\mathrm{Dm}(f)=\mathbf{R}\setminus\{-3\}$ f er aftagende i $\left]-\infty\,,-3\right[$ og i $\left]-3\,,\infty\right[$
b) $\mathrm{Dm}(g)=\mathbf{R}\setminus\{0\}$ g er voksende i $\left]\tfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\,,-1\right[$ og i $\left]\tfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\,,\infty\right[$
g er aftagende i $\left]-\infty\,,\tfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right[$ og i $\left]-1\,,0\right[$ og i $\left]0\,,\tfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[$
c) $\mathrm{Dm}(h)=\mathbf{R}\setminus\{-1\,,1\}$ h er voksende i $\left]0\,,1\right[$ og i $\left]1\,,\infty\right[$
h er aftagende i $\left]-\infty\,,-1\right[$ og i $\left]-1\,,0\right[$

8.4 $\mathrm{Vm}(f)=[2\,,18]$ $\mathrm{Vm}(g)=[0\,,\ln 26]$ $\mathrm{Vm}(f)=[0\,,\tfrac{1}{4}]$

10.1 a) $\mathrm{Dm}(f)=\mathbf{R}\setminus\{-3\,,3\}$ nulpunkter: 2

f er positiv i $]-\infty\,,-3[\;\;,\;]2\,,3[$

f er negativ i $]-3\,,2[\;\;,\;]3\,,\infty[$

Asymptoter: $x=3\;\;,\;\;x=-3\;\;,\;\;y=0$

f er voksende i $]-\infty\,,3[\;\;,\;\;]-3\,,3[\;\;,\;\;]3\,,\infty[$

f er aldrig aftagende

$\mathrm{Vm}(f)=\mathbf{R}$

b) $\mathrm{Dm}(f)=\mathbf{R}\setminus\{0\}$ nulpunkter: 2

f er positiv i $]-\infty\,,0[\;\;,]0\,,2[$

f er negativ i $]2\,,\infty[$

Asymptoter: $x=0\;\;,\;\;y=0$

f er voksende i $]-\infty\,,0[\;\;,\;\;]4\,,\infty[$

f er aftagende i $]0\,,4[$

$\mathrm{Vm}(f)=[-\frac{1}{8}\,,\infty[$

c) $\mathrm{Dm}(f)=\mathbf{R}$ nulpunkter: 0, $\alpha=\dfrac{-3-\sqrt{45}}{2}$, $\beta=\dfrac{-3+\sqrt{45}}{2}$

f er positiv i $]\alpha\,,0[\;\;,]\beta\,,\infty[$

f er negativ i $]-\infty\,,\alpha[\;,\;]0\,,\beta[$

Asymptoter: ingen

f er voksende i $]-\infty\,,-3[\;\;,\;\;]1\,,\infty[$

f er aftagende i $]-3\,,1[$

$\mathrm{Vm}(f)=\mathbf{R}$

d) $\mathrm{Dm}(f)=\mathbf{R}$ nulpunkter: $\frac{3\pi}{2}+\pi z$

f er positiv i $]-\frac{\pi}{4}+2\pi z\,,\frac{3\pi}{4}+2\pi z[$

f er negativ i $]\frac{3\pi}{4}+2\pi z\,,\frac{7\pi}{4}+2\pi z[$

Asymptoter: ingen

f er voksende i $]-\frac{3\pi}{4}+2\pi z\,,\frac{\pi}{4}+2\pi z[$

f er aftagende i $]\frac{\pi}{4}+2\pi z\,,\frac{5\pi}{4}+2\pi z[$

$\mathrm{Vm}(f)=[-\sqrt{2}\,,\sqrt{2}\,]$

e) $\mathrm{Dm}(f)=\mathbf{R}\setminus\{0\}$ nulpunkter: ingen

f er positiv i $]0\,,\infty[$

f er negativ i $]-\infty\,,0[$

Asymptoter: $x=0\;\;,\;\;y=\frac{1}{2}x$

f er voksende i $]-\infty\,,-1[\;\;,\;\;]1\,,\infty[$

f er aftagende i $]-1{,}0[\;\;,\;\;]0\,,1[$

$\mathrm{Vm}(f)=\mathbf{R}\setminus]-\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}[$

f) Dm(f) $= \mathbf{R} \setminus]-3\,,3[$ nulpunkter: -3, 3

f er positiv i $\mathbf{R} \setminus]-3\,,3[$

f er aldrig negativ

Asymptoter: ingen

f er voksende i $]3\,,\infty[$

f er aftagende i $]-\infty\,,-3[$

Vm(f) $= [0\,,\infty[$

g) Dm(f) $= \mathbf{R}$ nulpunkter: 0,1

f er positiv i $]-\infty\,,0[\;\;,]1\,,\infty[$

f er negativ i $]0\,,1[$

Asymptoter: ingen

f er voksende i $]\frac{\ln 2}{\ln 3}\,,\infty[$

f er aftagende i $]-\infty\,,\frac{\ln 2}{\ln 3}[$

Vm(f) $= [-1\,,\infty[$

h) Dm(f) $=]0\,,\infty[$ nulpunkter: e^3

f er positiv i $]e^3\,,\infty[$

f er negativ i $]0\,,e^3[$

Asymptoter: $x = 0$

f er voksende i $]1\,,\infty[$

f er aftagende i $]0\,,1[$

Vm(f) $= [-9\,,\infty[$

i) Dm(f) $= \mathbf{R} \setminus [-4\,,4]$ nulpunkter: $-\sqrt{17}\,,\sqrt{17}$

f er positiv i $]-\infty\,,-\sqrt{17}[\;\;,\;\;]\sqrt{17}\,,\infty[$

f er negativ i $]-\sqrt{17}\,,-4[\;\;,\;\;]4\,,\sqrt{17}[$

Asymptoter: $x = -4$, $x = 4$

f er voksende i $]4\,,\infty[$

f er aftagende i $]-\infty\,,-4[$

Vm(f) $= \mathbf{R}$

j) $\mathrm{Dm}(f) = \mathbf{R}$ nulpunkter: ingen

f er altid positiv, aldrig negativ

Asymptoter: $y = -ex + 5$

f er voksende i $]1\,,\infty[$

f er aftagende i $]-\infty\,,1[$

$\mathrm{Vm}(f) = [5\,,\infty[$

11.1 c) $\sqrt{2x^2+1}$ d) $(\pm 1{,}0)$

11.2 længden bliver 103,92 cm , højden 173,21 cm

11.3 a) 10 og 10 b) 10 og 10 c) 8 og 12