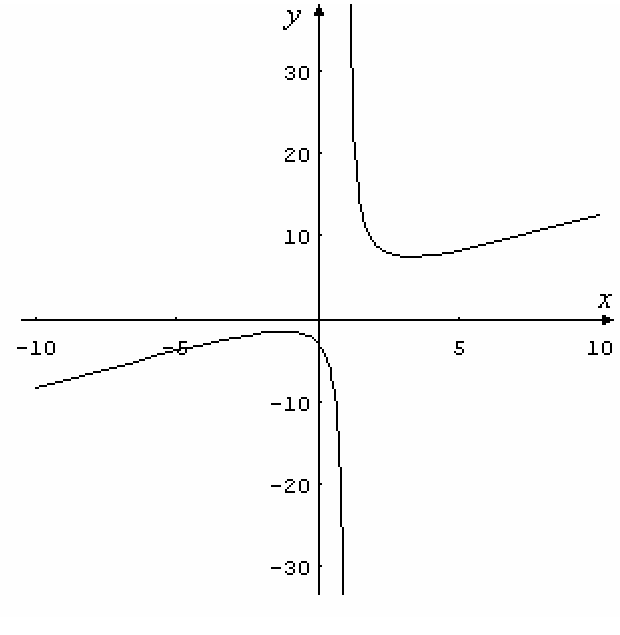
Matematikkens mysterier
- på et obligatorisk niveau

af

Kenneth Hansen

7. Ligninger, polynomier og asymptoter



Hvad er en asymototote? Og hvordan findes den?

7. Ligninger, polynomier og asymptoter

Indhold

Anvendte symboler

Sætninger, definitioner og formler er mærket med

FS: sætningen findes i formelsamlingen

LS: lær selv formlen udenad - den findes (underligt nok) **ikke** i formelsamlingen, og du får sikkert brug for den til eksamen

7.0 Indledning

I dette kapitel skal du lære om hele tre forskellige ting:

Først og fremmest skal du lære at løse ligninger og uligheder. Det kan du sikkert allerede, men du skal lære nogle nye metoder og fremgangsmåder.
Du skal bl.a. lære at løse f.eks. en femtegradsligning, f.eks.

$$3x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x - 8 = 0$$

Polynomier er en meget generel klasse af funktioner. Et eksempel på et polynomium er

$$f(x) = 3x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x - 8$$

Hmm, der er jo en vis lighed med femtegradsligningen ovenfra...
Sådanne funktioner viser sig at være nemme at arbejde med, hvilket også er heldigt, fordi de optræder mange steder. Den ene af forfatterne har faktisk været med til at beskrive udførligt, hvordan man kan beskrive knuder (f.eks. en sløjfe eller et kællingeknob) ved hjælp af polynomier!

Du skal også lære om *asymptoter*, som i en vis forstand er det modsatte af differentialregningens tangenter. I differentialregningen betragtede vi grafen for en funktion under en kraftig forstørrelse, og vi så, at grafen nærmest lignede en linie - tangenten. Man kan også betragte en graf under kraftig formindskelse, og også her ser man, at grafen nærmest bliver til nogle linier - asymptoterne. At vide asymptoterne til en graf er en stor hjælp til at få et overblik over grafens udseende, og det kan i mange tilfælde hjælpe én til at skitsere grafen ret nøjagtigt.

7.1 Udsagn

Vi starter med at finde ud af, hvad en ligning egentligt er for noget. Svaret er, at en ligning er et *åbent udsagn*. For at forklare dette skal vi først se på, hvad er *udsagn* er:

Et *udsagn* er et udtryk, som kan være enten sandt eller falsk.

Eksempel

"$6 \cdot 7 = 42$" er et sandt udsagn.
"$10 = 42 + 26$" er et falsk udsagn
"Den ene af forfatterne til denne bog hedder Iversen til efternavn"
er et sandt udsagn.

Et udtryk, som man ikke kan afgøre er sandt eller falsk, er derimod ikke et udsagn.

Eksempel

"Alle babyer er søde" - hvad menes der med ordet 'sød'?
"Hansen har mange penge" - hvor mange? 100 kr eller 10000000 kr?
"$6x = 42$" - hvad er x?

Problemet med sætninger, som ikke er udsagn er, at de ofte indeholder udefinerede størrelser. Ovenfor er de udefinerede størrelser “sød”, “mange” og “x”.
Det sidste udsagn kaldes et *åbent udsagn*, idet det er et udtryk, hvori der indgår en variabel, her x, og som man ved at erstatte variablen med et tal kan omdanne til et almindeligt udsagn.

Man kan regne med udsagn. Der findes følgende 5 regneoperationer:

Negation (ikke):	$\neg$
Konjugation (og):	$\wedge$
Disjunktion (eller):	$\vee$
Implikation (medfører):	$\Rightarrow$
Biimplikation (ensbetydende):	$\Leftrightarrow$

Sandhedsværdien af sammensatte udsagn afhænger af de enkelte deludsagn. Reglerne er:

Negationen af et sandt udsagn er falsk. Negationen af et falsk udsagn er sandt.

Konjugationen af to sande udsagn er sandt. I alle andre tilfælde er konjugationen falsk.

Disjunktionen af to falske udsagn er falsk. I alle andre tilfælde er disjunktionen sand.

Implikationen af to udsagn er sand, undtagen hvis det første udsagn er sandt og det andet falsk.

Biimplikationen er to udsagn er sandt, netop når begge udsagn har samme sandhedsværdi.

Man opstiller ofte disse regler i såkaldte *sandhedstabeller*. Idet der er to udsagn, A og B, som hver kan antage to sandhedsværdier, så er der i alt $2 \cdot 2 = 4$ kombinationsmuligheder. For hver af disse angives så sandhedsværdien af det sammensatte udsagn.

Nedenfor betyder 'S' sand og 'F' falsk:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
S	S	F	F	S	S	S	S
S	F	F	S	F	S	F	F
F	S	S	F	F	S	S	F
F	F	S	S	F	F	S	S

Vi vender nu tilbage til de åbne udsagn. Til et givet åbent udsagn er man ofte interesseret i af finde de værdier af den variable, som gør udsagnet til et sandt udsagn. Mængden af disse værdier kaldes det åbne udsagns *løsningsmængde* og betegnes ofte med bogstavet L.

Man har også brug for at vide, hvilke værdier, man i det hele taget må sætte ind på variablens plads. Disse tilladte værdier kaldes *grundmængden* og betegnes med G. Ofte får man intet at vide om grundmængden, og i disse tilfælde er grundmængden den størst mulige. Bemærk dog, at alle elementerne i grundmængden skal give et meningsfyldt udsagn, når de indsættes på den variables plads.

(Bemærk, at der er en vis lighed mellem grundmængden for en ligning og definitionsmængden for en funktion. Man skal dog passe på ikke at forveksle de to ting!)

Eksempel

Åbent udsagn:	Grundmængden:	Løsningsmængden:
$2x+3=6$	$G=\mathbf{R}$	$L=\{1\}$
$x^2-x-6=0$	$G=\mathbf{R}$	$L=\{-3;2\}$
$\frac{10}{x}=5$	$G=\mathbf{R}\setminus\{0\}$	$L=\{2\}$
$2x+3=6$, $x\le 10$	$G=\left]-\infty;10\right]$	$L=\{1\}$
$2x+3=6$, $x\le 0$	$G=\left]-\infty;0\right]$	$L=\emptyset$
$2x>0$, $x\in\mathbf{Z}$	$G=\mathbf{Z}$	$L=\mathbf{N}$

Til et åbent udsagn har man altså altid en løsningsmængde. Problemet er blot at finde den. Det er det, man normalt kalder at løse ligninger og uligheder.

Ofte kommer man ud for sammensatte åbne udsagn. Det viser sig, at der er en tæt sammenhæng mellem det sammensatte udsagns løsningsmængde og de to deludsagns løsningsmængder. Reglerne er som følger:

Det åbne udsagn $A(x)$ har grundmængden G_1 og løsningsmængden L_1.
Det åbne udsagn $B(x)$ har grundmængden G_2 og løsningsmængden L_2

$\neg A(x)$ har grundmængden G_1 og løsningsmængden $G_1 \setminus L_1$.
$A(x) \wedge B(x)$ har grundmængden $G_1 \cap G_2$ og løsningsmængden $L_1 \cap L_2$
$A(x) \vee B(x)$ har grundmængden $G_1 \cap G_2$ og løsningsmængden $L_1 \cup L_2$

(I dette sidste tilfælde skal man passe lidt på - løsningsmængden **skal** være en delmængde af grundmængden, så løsningsmængden er faktisk $(L_1 \cup L_2) \cap (G_1 \cap G_2)$. Det kunne jo være, at en løsning til $A(x)$ ikke lå i grundmængden til $B(x)$ ...)

Reglerne er meget lette at huske, idet symbolerne $\wedge$ og $\cap$ ligner hinanden meget, og symbolerne $\vee$ og $\cup$ også ligner hinanden.

Generelt er situationen den, at man står med en ligning eller en ulighed, som man ønsker at omforme, så man direkte kan se, hvad løsningsmængden er. Nu skal man jo undervejs i sine omformninger helst ikke miste nogle løsninger! Derfor lærte vi allerede i 1G nogle regler, som sikrede, at man ikke mistede nogle løsninger undervejs. Ved en ligning må man f.eks. lægge samme tal til på begge sider at lighedstegnet uden at ændre løsningsmængden. Det ses jo klart:

$$x = 2$$
$$\Updownarrow$$
$$x + 4 = 2 + 4$$

Vi lærte dengang, at man skulle skrive denne dobbeltpil mellem ligningerne, uden at vi vidste hvorfor. Nu kan man godt se, at den faktisk har betydning - dobbeltpilen fortæller nemlig, at løsningsmængden til det første udsagn er lig løsningsmængden til det andet udsagn.

Et andet eksempel på, at logiske symboler optræder i ligningsløsning er

$$x^2 = 16$$
$$\Updownarrow$$
$$x = \sqrt{16} \quad \vee \quad x = -\sqrt{16}$$
$$\Updownarrow$$

$$x = 4 \quad \vee \quad x = -4$$

Her er løsningsmængden til det nederste, sammensatte udsagn jo $L = \{4\} \cup \{-4\} = \{4;-4\}$, og dobbeltpilene fortæller, at dette også er løsningsmængden til den oprindelige ligning.

Ved det sidste ensbetydende-tegn er der ikke nogen problemer, idet vi blot identificerede to kvadratrødder. Det var med andre ord en reduktion, og en sådan er altid tilladt.

Ved det første ensbetydende-tegn krævede der derimod kendskab til den specielle funktion, som hedder at kvadrere. Vores viden om denne fortæller, at der netop er to løsninger til en kvadratfunktion, som findes ved at tage kvadratroden eller -kvadratroden af højresiden. Der må derfor gælde ensbetydende mellem første og anden linie.

Opgaver

1.1 Angiv sandhedsværdien af nedenstående udsagn, *A*-*E*.:

A : "København er hovedstaden i Danmark"
B : " $2+2=5$ "
C : "Jylland er en ø"
D : "Falster er en giraf"
E : "King Kong er en abe"

Angiv endvidere sandhedsværdierne af de sammensatte udsagn:

$A \vee E$, $\neg B$, $B \vee D$, $D \wedge E$, $C \Rightarrow A$
$B \Leftrightarrow B$, $A \Rightarrow C$, $D \vee \neg A$, $C \wedge C$

1.2 For nedenstående åbneudsagn er grundmængden lig $G = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.
Bestem løsningsmængderne

a) x er et lige tal	b) x er et primtal	c) $x = 6$
d) $x = 11$	e) $x = 3 \vee x = 9$	f) $x = 3 \wedge x = 9$

7.2 Ligninger

Fra 1G (eller tidligere) kender vi de fundamentale regler for ligningsløsning:

> Man må addere eller subtrahere det samme på begge sider at ligningen, og man må multiplicere eller dividere med det samme på begge sider at ligningen, forudsat at man ikke ganger eller dividerer med 0.

Vi giver et par eksempler - husk, at når man løser en ligning, så skal man altid starte med at angive grundmængden, og slutte med at angive løsningsmængden.

Eksempel

Løs: $3x + 4 = x - 6$

Svar: $G = \mathbf{R}$, idet ligningen giver mening for alle værdier af x.

$$3x + 4 = x - 6$$
$$\Updownarrow$$
$$3x - x = -6 - 4$$
$$\Updownarrow$$
$$2x = -10$$
$$\Updownarrow$$
$$x = -5$$

Dvs. $L = \{-5\}$

Løs: $2x + 5 = 2x - 5$

Svar: $G = \mathbf{R}$, idet ligningen giver mening for alle værdier af x.

$$2x + 5 = 2x - 5$$
$$\Updownarrow$$
$$5 = -5$$

Idet det sidste udsagn altid er falsk, så er $L = \varnothing$.

Løs: $x + 2 = x + 2$

Svar: $G = \mathbf{R}$

$$x + 2 = x + 2$$
$$\Updownarrow$$
$$2 = 2$$

Idet det sidste udsagn altid er sandt, er $L = G = \mathbf{R}$

Bemærk, at vi i de to sidste tilfælde er nødt til at skaffe os af med x'et i ligningen, før at vi kan afgøre, at vi altid har et sandt eller et falsk udsagn.

Løs: $\frac{2}{x} = 5$

Svar: $G = \mathbf{R} \setminus \{0\}$, idet udsagnet giver mening for alle tal pånær 0.

$$\frac{2}{x} = 5$$
$$\Updownarrow$$
$$2 = 5x$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{2}{5} = x$$

Dvs $L = \left\{\frac{2}{5}\right\}$

Bemærk, at vi i anden linie gangede med x på begge sider. Dette er tilladt, idet vi allerede ved, at $x \neq 0$; tallet 0 var jo udelukket fra grundmængden.

En vigtig type ligninger er andengradsligningerne, som vi allerede har stiftet bekendtskab med:

Eksempel

Løs: $2x^2 + 3x - 5 = 0$

Svar: $G = \mathbf{R}$

Diskriminanten er $d = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5) = 49$, så

$$2x^2 + 3x - 5 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x = \frac{-3 - \sqrt{49}}{2 \cdot 2} \quad \vee \quad x = \frac{-3 + \sqrt{49}}{2 \cdot 2}$$
$$\Updownarrow$$
$$x = -2{,}5 \quad \vee \quad x = 1$$

Dvs. $L = \{-2{,}5\,;1\}$

Her anvendte vi den velkendte løsningsformel.

Tit og ofte kommer man ud for ligninger, som ikke er andengradsligninger, men som ved at erstatte den variable x med en anden variabel t giver en andengradsligning. Man taler om *maskerede andengradsligninger*:

Eksempel

Løs: $x = \sqrt{x} + 4$

Svar: For det første ses, at $G = \left[0;\infty\right[$, idet indmaden af et kvadratrodstegn, her x, ikke må være negativ.
Erstatter vi $\sqrt{x}$ med *t*, så får vi faktisk en andengradsligning:

$$x = \sqrt{x} + 4$$
$$\Updownarrow$$
$$x - \sqrt{x} - 4 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$t^2 - t - 4 = 0 \quad \wedge \quad t = \sqrt{x}$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(t = \frac{-(-1)-\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1} \quad \vee \quad t = \frac{-(-1)+\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-4)}}{2\cdot 1} \right) \wedge \; t = \sqrt{x}$$
$$\Updownarrow$$
$$\left(t = \tfrac{1-\sqrt{17}}{2} \;\vee\; t = \tfrac{1+\sqrt{17}}{2} \right) \wedge \; t = \sqrt{x}$$
$$\Updownarrow$$
(*) $$t = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \;\wedge\; t = \sqrt{x}$$
$$\Updownarrow$$
$$x = \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^2$$

Dvs. $L = \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^2 \right\}$

Her brugte vi, at $\sqrt{x} \geq 0$, og at vi derfor kunne smide den negative *t*-løsning væk. Dette foregik i linien markeret med en stjerne, (*).

Løs: $6 \cdot 1{,}5^{2x} - 7 \cdot 1{,}5^{x} - 8 = -10$

Svar: Dette er en maskeret andengradsligning ($t = 1{,}5^x$). Vi undlader dog at bruge symbolet *t* - det kan sagtens undværes. Idet udtrykket $1{,}5^x$ er defineret for alle værdier af *x*, så er grundmængden $G = \mathbf{R}$

$$6\cdot 1{,}5^{2x}-7\cdot 1{,}5^{x}-8=-10$$

$\Updownarrow$

$$6\cdot(1{,}5^{x})^2-7\cdot(1{,}5^{x})+2=0$$

$\Updownarrow$

$$1{,}5^{x}=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 6\cdot 2}}{2\cdot 6}=\frac{7\pm 1}{12}$$

$\Updownarrow$

$$1{,}5^{x}=\tfrac{1}{2}\ \vee\ 1{,}5^{x}=\tfrac{3}{4}$$

$\Updownarrow$

$$x=\frac{\log(0{,}5)}{\log(1{,}5)}\ \vee\ x=\frac{\log(0{,}75)}{\log(1{,}5)}$$

Heraf ses, at løsningsmængden er $L=\left\{\dfrac{\log(0{,}5)}{\log(1{,}5)}\ ,\ \dfrac{\log(0{,}75)}{\log(1{,}5)}\right\}$

Løs: $4\cdot\log^2(x+2)-5\cdot\log(x+2)-1{,}5=0$

Svar: Dette er igen en maskeret andengradsligning, hvor vi erstatter $\log(x+2)$ med t. Grundmængden er $G=\left]-2;\infty\right[$, idet indmaden $x+2$ til logaritmen skal være positiv.

$$4\log^2(x+2)-5\log(x+2)-1{,}5=0$$

$\Updownarrow$

$$\log(x+2)=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 4\cdot 1{,}5}}{2\cdot 4}=\frac{5\pm 7}{8}$$

$\Updownarrow$

$$\log(x+2)=1{,}5\ \vee\ \log(x+2)=-0{,}25$$

$\Updownarrow$

$$x+2=10^{1{,}5}\ \vee\ x+2=10^{-0{,}25}$$

$\Updownarrow$

$$x=10^{1{,}5}-2\ \vee\ x=10^{-0{,}25}-2$$

Ergo

$$L=\left\{10^{1{,}5}-2\ ,10^{-0{,}25}-2\right\}\approx\left\{-1{,}438\ ,29{,}62\right\}$$

Nulreglen siger, at hvis to størrelser ganget sammen giver 0, så er mindst en af størrelserne 0. Symbolsk:

$$\text{"}ab=0\text{"}\ \Leftrightarrow\ \text{"}a=0\ \vee\ b=0\text{"}.$$

Denne nulregel er meget nyttig ved løsning af ligninger:

Eksempel

Løs: $(2x^2 - 2x - 12)(x^2 - 10x + 24) = 0$

Svar: $G = \mathbf{R}$

Nulreglen giver

$$(2x^2 - 2x - 12)(x^2 - 10x + 24) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2x^2 - 2x - 12 = 0 \quad \vee \quad x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2} \quad \vee \quad x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24}}{2 \cdot 1}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{4} \quad \vee \quad x = \frac{10 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$(x = -2 \ \vee \ x = 3) \ \vee \ (x = 4 \ \vee \ x = 6)$$

Dvs. $L = \{-2;3;4;6\}$

Man kan nu og da komme ud for ligninger indeholdende numerisk-tegn. Her er man nødt til at dele op efter, hvorvidt indmaden i numerisk.tegnet er positivt:

Eksempel

Løs: $|x + 5| = 10$

Svar: $G = \mathbf{R}$

$$|x + 5| = 10$$

$$\Updownarrow$$

$$x + 5 = 10 \ \vee \ -(x + 5) = 10$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 5 \ \vee \ x = -15$$

Dvs. $L = \{5;-15\}$

Løs: $|-x + 4| = 2$

Svar: $G = \mathbf{R}$

$$|-x + 4| = 2$$

$$\Updownarrow$$

$$-x + 4 = 2 \ \vee \ -(x + 4) = 2$$

$\Updownarrow$

$$x = 2 \ \vee \ x = 6$$

Dvs. $L = \{2;6\}$

Løs: $|x + 10| = -2$

Svar: $G = \mathbf{R}$

$L = \emptyset$, idet venstresiden aldrig kan være negativ, og højresiden er negativ.

Opgaver

2.1 Løs følgende ligninger med grundmængden $\mathbf{R}$:

a) $(x+2)(x-5) = 0$ b) $x^2 = 4$ c) $x^2 = 5$

d) $x^2 + 5 = 0$ e) $\frac{1}{x} - \frac{1}{3x} = 0$ f) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$

Løs derefter de samme ligninger, men med grundmængden $\mathbf{Q}$ (de rationale tal) og med grundmængden $\mathbf{Z}$.

2.2 Løs ligningerne

a) $2x^2 + 14x + 24 = 0$ b) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

c) $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 2 = 0$ d) $4x^2 = 100$

e) $x^4 - x^2 - 12 = 0$ f) $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$

g) $x^6 + 2x^3 - 15 = 0$ h) $x + 5\sqrt{x} - 36 = 0$

i) $(x+1)^2 + 5(x+1) + 6 = 0$ j) $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$

k) $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$ l) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

2.3 Løs ligningerne

a) $|x + 3| = 2$ b) $|x| = 2$

c) $\left|\frac{1}{2}x - 3\right| = 3$ d) $\frac{5}{x+2} - \frac{3}{x-1} = \frac{4}{x+2}$

e) $\frac{5}{x-4} + \frac{6}{x-3} = \frac{6}{x-6}$ f) $\frac{x}{x-1} + \frac{2x}{x+1} = \frac{2}{3}$

2.4 Løs

a) $\sqrt{(x+1)^2} = 3$ b) $(\sqrt{x+1})^2 = 3$

c) $(\sqrt{x-3})^2 = \frac{1}{2}(x-1)$ d) $\sqrt{x^2 + 2x + 1} = |x|$

7.3 Polynomier

Vi skal nu til at lære, hvordan man løser trediegrads-, fjerdegrads--, femtegradsligninger osv. For at kunne løse dem er vi nødt til at vide, hvorledes man regner med polynomier. Dette er indholdet af dette afsnit, og først i næste afsnit kommer metoderne til ligningsløsningen.

Definition 1 (FS)

Et *polynomium* er en funktion af formen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

hvor man kræver, at $a_n \neq 0$.

Tallet n kaldes *polynomiets grad* og betegnes ofte

$$n = \mathrm{grad}(f).$$

Et specielt polynomium er *nulpolynomiet*

$$f(x) = 0$$

som ikke tildeles nogen grad.

Eksempler

Et fjerdegrads-polynomium er

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 5x^2 + \tfrac{1}{2}x - 9$$

Her er

fjerdegradskoefficienten	$a_4 = 3$
trediegradskoefficienten	$a_3 = -2$
andengradskoefficienten	$a_2 = -5$
førstegradskoefficienten	$a_1 = \frac{1}{2}$
nultegradskoefficienten	$a_0 = -9$

Flere polynomier er

$g(x) = x^2 + 2x + 1$	$\mathrm{grad}(g) = 2$
$h(x) = x$	$\mathrm{grad}(h) = 1$
$i(x) = 2$	$\mathrm{grad}(i) = 0$
$j(x) = x^6 - 4$	$\mathrm{grad}(j) = 6$

Et polynomium må kun indeholde heltallige ikke-negative potenser af variablen x. Nedenstående funktioner er derfor ikke polynomier:

$$k(x) = \sqrt{x} + x^2 + 3x - 8 \qquad l(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$m(x) = e^x \qquad n(x) = \log(x^3 + 2x^2 - 4x + 8)$$

Polynomier kan adderes, subtraheres og multipliceres. Resultatet er igen et polynomium:

Eksempel

Lad f og g være polynomierne

$$f(x) = 3x^4 + 2x^2 - 8x \qquad \text{og} \qquad g(x) = x^2 - 2x - 9\,.$$

Vi kan da danne følgende polynomier:

PLUS:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (3x^4 + 2x^2 - 8x) + (x^2 - 2x - 9) = \\ 3x^4 + 3x^2 - 10x - 9$$

MINUS:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (3x^4 + 2x^2 - 8x) - (x^2 - 2x - 9) = \\ 3x^4 + x^2 - 6x + 9$$

GANGE:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (3x^4 + 2x^2 - 8x) \cdot (x^2 - 2x - 9) = \\ 3x^6 - 6x^5 - 27x^4 + 2x^4 - 4x^3 - 18x^2 - 8x^3 + 16x^2 + 72x = \\ 3x^6 - 6x^5 - 25x^4 - 12x^3 - 2x^2 + 72x$$

Man kan bevise følgende sætning:

Sætning 2 (LS)

Lad f og g være polynomier (bortset fra nulpolynomiet). Da gælder

a) $\text{grad}(f+g) \le \max(\text{grad}(f), \text{grad}(g))$

b) $\text{grad}(f-g) \le \max(\text{grad}(f), \text{grad}(g))$

c) $\text{grad}(f \cdot g) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$

Beviset er i opgave 3.1.

Man kan ikke **dividere** polynomier og være sikker på at få et polynomium igen:

Eksempel

Funktionerne

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x + 1 \qquad \text{og} \qquad g(x) = x$$

er begge polynomier, men kvotienten

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^3 - 5x^2 + 3x + 1}{x} = 2x^2 - 5x + 3 + \frac{1}{x}$$

er **ikke** et polynomium, da leddet $\frac{1}{x}$ ødelægger dette - $\frac{1}{x}$ er jo ikke en positiv potens af x.

Denne situation har vi været ude for før!

Du har sikkert lært i skolen, at man kan addere, subtrahere og multiplicere hele tal, og stadigvæk få hele tal. Dividerer man derimod to hele tal, så risikerer man, at divisionen ikke går op.

Man kan reparere på dette på to forskellige måder:

1) Man kan indføre brøker eller *rationale tal* som resultatet af en division.

2) Man kan lave *division med rest*.

Lad os dividere 26 med 8.

1) Divisionen giver $\frac{26}{8} = \frac{13}{4}$ - altså et rationalt tal.

2) Divisionen går op 3 gange med 2 til rest:

$$26 = 3 \cdot 8 + 2$$

Ved polynomierne har man de samme to udveje:

Definition 3

En *rational funktion r* er en funktion af typen:

$$r(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

hvor f og g er polynomier, og g ikke er nulpolynomiet.

Funktionen fra eksemplet ovenfor

$$r(x) = \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^3 - 5x^2 + 3x + 1}{x}$$

er altså en rational funktion.
Rationale funktioner er vigtige, og vi skal studere dem nærmere i kapitlerne om asymptoter. Vi har dog mere brug for den anden udvej, nemlig division med rest.

Division med rest af polynomier kan foretages, fordi følgende sætning gælder:

Sætning 4 (LS)

Lad f og g være to polynomier, og antag, at g ikke er nul-polynomiet. Da findes to polynomier k og r, således at

a) $f(x) = k(x) \cdot g(x) + r(x)$

b) $\text{grad}(k) < \text{grad}(g)$

r kaldes restpolynomiet, mens k kaldes kvotientpolynomiet.

Dette svarer ganske til divisionen af 26 med 8: Vi opskrev divisionsligningen før:

$$26 = 3 \cdot 8 + 2$$

Der var kvotienten 3 og resten 8, og det ses, at denne ligning er ganske analog til ligningen a) i sætning 4.

Tilsvarende svarer uligheden b) til, at resten 2 er mindre end divisoren 8. Denne ulighed sikrer, at divisionen er ført til ende.

Det er lidt bøvlet at give et generelt bevis for sætning 4, så det udelader vi her. Beviset går i øvrigt ud på, at man angiver en metode til at finde kvotientpolynomiet k og restpolynomiet r. Denne metode hedder *polynomiers division*, og vi skal betragte en masse eksempler, men altså ikke noget generelt bevis.

Eksempel

Vi vil dividere polynomiet $f(x) = x^2 + 3x + 1$ med $g(x) = x - 2$. Hertil skal man bruge et skema af formen nedenunder:

$$\begin{array}{r|l} \cline{2-2} x-2 & x^2+3x+1 \\ \cline{1-1} & \\ \cline{2-2} & \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Vi har placeret *f* midt inde i skemaet og divisoren g yderst til venstre. Når divisionen er færdig, så vil kvotienten k stå øverst, lige over *f*, og resten r vil stå nederst.

Første trin går ud på at undersøge, hvor mange gange x, som er **højestegradsleddet i divisoren g, går op i** x^2, som er **første led i *f***. Vi laver altså regnestykket

$$x^2 : x = x$$

Vi skriver nu resultatet af divisionen på k's plads i skemaet:

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \cline{2-2} x-2 & x^2+3x+1 \\ \cline{1-1} & \\ \cline{2-2} & \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Derefter udregner og skriver vi polynomiet $x \cdot g(x) = x^2 - 2x$ nedenunder *f* i skemaet:

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \cline{2-2} x-2 & x^2+3x+1 \\ \cline{1-1} & x^2-2x \\ \cline{2-2} & \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Vi trækker nu de to polynomier fra hinanden:

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x-2 & x^2+3x+1 \\ & \underline{x^2-2x\qquad\quad} \\ & \qquad 5x+1 \\ & \underline{\qquad\qquad\qquad} \end{array}$$

Vi gentager nu divisionen af g's højestegradsled op i det nye polynomiums højestegradsled:

$$5x : x = 5$$

Vi skriver 5-tallet på kvotientens plads:

$$\begin{array}{r|l} & x \quad +5 \\ \hline x-2 & x^2+3x+1 \\ & \underline{x^2-2x\qquad\quad} \\ & \qquad 5x+1 \\ & \underline{\qquad\qquad\qquad} \end{array}$$

Så ganger vi 5 med g og indfører dette i skemaet:

$$\begin{array}{r|l} & x \quad +5 \\ \hline x-2 & x^2+3x+1 \\ & \underline{x^2-2x\qquad\quad} \\ & \qquad 5x+1 \\ & \underline{\qquad 5x-10\quad} \end{array}$$

Og endelig subtraherer vi de to nederste polynomier:

$$\begin{array}{r|l} & x+5 \\ \hline x-2 & x^2+3x+1 \\ & \underline{x^2-2x\qquad\quad} \\ & \qquad 5x+1 \\ & \underline{\qquad 5x-10\quad} \\ & \qquad\qquad\ 9 \end{array}$$

Divisionen er nu færdig - den foreløbige rest er 9, og dette nultegradspolynomium har mindre grad end g, som er et førstegradspolynomium.

Vi har altså funder ud af, at kvotienten er $k(x) = x+5$ og resten er $r(x) = 9$. Dette resultat kan skrives enten som

$$x^2+3x+1=(x+5)\cdot(x-2)+9$$

eller som

$$\frac{x^2+3x+1}{x-2}=x+5+\frac{9}{x-2}$$

Vi kommer med nogle flere eksempler på polynomiers division. De serveres uden specielt mange kommentarer, så prøv selv at finde ud af, hvad der foregår!

Eksempel

$$
\begin{array}{r|l}
 & x-7 \\
\hline
x+7 & x^2+0x+1 \\
 & \underline{x^2+7x} \\
 & \quad -7x-1 \\
 & \quad \underline{-7x-7} \\
 & \qquad\quad 6
\end{array}
$$

$$x^2-1=(x-7)\cdot(x+7)+6$$

Det kan betale sig opskrive de led i dividenden, hvor koefficienten er 0, som er gjort her ved led nummer 2. Det hjælper meget på overskueligheden.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{2}{3}x+\frac{14}{9} \\
\hline
3x+5 & 2x^2+8x+4 \\
 & \underline{2x^2+\frac{10}{3}x} \\
 & \quad \frac{14}{3}x+4 \\
 & \quad \underline{\frac{14}{3}x+\frac{70}{9}} \\
 & \qquad\quad -\frac{34}{9}
\end{array}
$$

Divisionsligningen er her:

$$2x^2+8x+4=\left(\tfrac{2}{3}x+\tfrac{14}{9}\right)\cdot\left(3x+5\right)-\tfrac{34}{9}$$

Det gør altså ikke noget, hvis højestegradskoefficienten for divisorpolynomiet ikke er 1.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x-2 \\
\hline
x-1 & x^2-3x+2 \\
 & \underline{x^2-\ x} \\
 & \quad -2x+2 \\
 & \quad \underline{-2x+2} \\
 & \qquad\quad 0
\end{array}
$$

$$x^2-3x+2=(x-2)\cdot(x-1)$$

Divisionen gik op!

I det sidste eksempel dividerer vi et femtegradspolynomium med et andengradspolynomium. Fremgangsmåden er den samme som ovenfor, divisionen bliver bare meget længere:

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3+x^2-3x+6 \\
\hline
x^2+2x+1 & x^5+3x^4+0x^3+x^2+2x+5 \\
 & \underline{x^5+2x^4+x^3} \\
 & \quad x^4-x^3+x^2+2x+5 \\
 & \quad \underline{x^4+2x^3+x^2} \\
 & \qquad -3x^3+0x^2+2x+5 \\
 & \qquad \underline{-3x^3-6x^2-3x} \\
 & \qquad\qquad 6x^2-5x+5 \\
 & \qquad\qquad \underline{6x^2+12x+6} \\
 & \qquad\qquad\quad -17x-1
\end{array}$$

Divisionsligningen bliver:

$$x^5+3x^4+x^2+2x+5=(x^3+x^2-3x+6)\cdot(x^2+2x+1)+(-17x-1)$$

Opgaver

3.1 Bevis sætning 2. (Vink: Hvilket højestegradsled er muligt i sum-, differens- eller produktpolynomiet.)

3.2 Betragt nedenstående polynomier:

$$f_1(x)=x^3-15x^2+68x-84$$
$$f_2(x)=x^4-8x^3+17x^2+2x-24$$
$$f_3(x)=x^4+5x^3+4x^2-20x-32$$
$$f_4(x)=2x^4-4x^3-3x^2+32x-9$$
$$f_5(x)=3$$

a) Angiv graderne af f_1, f_2, f_3, f_4 og f_5

b) Beregn polynomierne

$$f_1 + f_3 \quad , \quad f_2 - f_4 \quad , \quad f_5 \cdot f_3 \quad , \quad f_2 \cdot f_1 \quad , \quad {f_3}^2 - 2f_2 - 3f_4$$

c) Kontrollér i ovenstående regnestykker, at sætning 2 passer.

3.3 Udfør nedenstående divisioner og opskriv divisionsligningen:

a) $x^2 - 7x + 6 \quad : \quad x - 3$

b) $x^2 - 8x + 5 \quad : \quad x + 4$

c) $x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 3x + 5 \quad : \quad x - 1$

d) $x^6 + 3x^5 - 4x^4 + 7x^3 + x^2 - 2 \quad : \quad x - 3$

e) $x^7 - 5x^6 + x^5 - 23x^3 - x^2 + 3x + 9 \quad : \quad x + 2$

f) $x^3 + x^2 + x + 2 \quad : \quad x$

3.4 Udfør nedenstående divisioner og opskriv divisionsligningen:

a) $x^3 + 3x^2 - 2x + 10 \quad : \quad x^2 - 3x + 2$

b) $2x^4 + 3x^3 - 8x^2 + 17x - 14 \quad : \quad x^2 - x + 2$

c) $2x^5 - 3x^4 + 8x^2 - 10x + 10 \quad : \quad x^2 - 2x + 1$

d) $x^5 - 8x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 8 \quad : \quad x^3 - 1$

e) $x^6 - x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x + 1 \quad : \quad x^4 - 3x^3 + 3x$

3.5 Udfør nedenstående divisioner og opskriv divisionsligningen:

a) $2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 7x - 6 \quad : \quad 2x + 3$

b) $x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 10x - 8 \quad : \quad x - \frac{1}{2}$

c) $x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \quad : \quad 3x - 4$

d) $3x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \quad : \quad 3x^2 - 3$

e) $x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 \quad : \quad -2x - 4$

3.6 a) Udfør divisionen $x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 10x - 8 \quad : \quad x - 2$.

b) Hvilken slags polynomium er resten?

c) Beregn værdien af polynomiet $x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 10x - 8$ når $x = 2$.

d) Sammenlign med resten fra divisionen i a).

e) Bevis, at resten ved division af polynomiet *f* med førstegradspolynomiet $x - a$, hvor a er et reelt tal, faktisk er lig med polynomiets værdi $f(a)$ i punktet a.
(Vink: Opskriv divisionsligningen og sæt x lig a).

7.4 Polynomiers rødder

Vi har tidligere arbejdet med både første- og andengradspolynomier. Ved andengradspolynomierne brugte vi det meste af krudtet på at finde rødder, eller hvad der er det samme, på at løse andengradsligningen. Det kommer nok derfor nok ikke som nogen overraskelse, at også rødderne for polynomier af grad højere end 2 er vigtige:

Definition 5 (LS)

Lad *f* være et polynomium og a et reelt tal. a er *rod* i *f*, hvis a er et nulpunkt for *f*, dvs. $f(a) = 0$.

For det første vil vi finde ud af, hvor mange rødder et *n*-te-gradspolynomium kan have. Vi får brug for følgende sætning:

Sætning 6 (FS)

Lad polynomiet *f* have roden a. Så vil divisionen

$$f(x) \quad : \quad x-a$$

gå op.

Bevis:

Vi betragter divisionsligningen for divisionen (den fik vi fra sætning 4):

$$f(x) = k(x)\cdot(x-a) + r(x)$$

Idet vi dividerer med et førstegradspolynomium, så vil restpolynomiet *r* være et nultegradspolynomium, dvs. en konstant funktion (eller et tal, om man vil). Divisionen går op, hvis dette tal er 0.
Sætter vi *x* lig *a*, så fås ifølge definition 5 ligningen

$$0 = f(a)$$

Det indsætter vi i divisionsligningen og får

$$0 = k(a)\cdot(a-a) + r(a) = k(a)\cdot 0 + r(a) = r(a)$$

Dette viser, at det **konstante** polynomium *r* er lig 0 i a og derfor **lig 0 altid**.
Divisionen går altså op!

Følgende sætning er så vigtig, at den ofte kaldes *algebraens fundamentalsætning*:

Sætning 7 (LS)

Et polynomium af grad *n* har højst *n* rødder.

Bevis:

Lad *f* være et polynomium af grad *n*, og lad rødderne til *f* være

$$a_1, a_2, a_3, .., a_m$$

Vi antager, at *f* har *m* **forskellige** rødder, og vi skal bevise, at $m \le n$.

Da a_1 er rod i *f*, så ved vi at divisionen

$$f(x) \quad : \quad x - a_1 \qquad \text{går op.}$$

Kalder vi kvotientpolynomiet k_1, så har vi derfor divisionsligningen:

$$f(x) = k_1(x) \cdot (x - a_1)$$

Ifølge sætning 2c er $\text{grad}(k_1) = n - 1$.

Nu får vi at k_1 har rødderne $a_2, a_3, \ldots a_m$, hvilket ses ved indsættelse i divisionsligningen:

$$0 = f(a_2) = k_1(a_2) \cdot (a_2 - a_1)$$

Faktoren $a_2 - a_1$ kan ikke være 0, idet de to tal a_1 og a_2 er forskellige, og derfor må faktoren $k_1(a_2)$ være 0. Tilsvarende for de andre rødder.

Da a_2 er rod i k_1, så ved vi at divisionen

$$k_1(x) \quad : \quad x - a_2$$

går op.

Kvotienten kaldes k_2, så vi får igen en divisionsligning:

$$k_1(x) = k_2(x) \cdot (x - a_2)$$

Det ses, at $\text{grad}(k_2) = n - 2$, og at tallene $a_3, a_4, \ldots, a_m$ er rod i k_2.

Vi fortsætter denne procedure så lang tid, vi kan. Vi ser, at vi kan gentage proceduren en gang for hver rod i *f*, dvs. i alt *m* gange. Men samtidigt kan vi kun gentage proceduren i alt *n* gange, idet graden af kvotientpolynomiet ikke kan blive negativ.

Ergo må *m* være mindre end eller lig med *n*.

Faktisk antyder dette bevis noget mere:

Sætning 8 (LS)

Lad polynomiet *f* have rødderne $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Da findes hele tal $n_1, n_2, \ldots, n_m$ og et polynomium *k* uden disse rødder således at

$$f(x) = (x - a_1)^{n_1} \cdot (x - a_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (x - a_m)^{n_m} \cdot k(x)$$

Tallet n_i kaldes *multipliciteten* af roden a_i

Bevis:

Ifølge sætning 6 kan vi dividere *f* med polynomiet $x - a_1$ uden at få en rest. Kaldes kvotienten k_1, så kan det ske, at a_1 igen er rod i k_1, og vi kan dividere igen. Dette gøres indtil a_1 ikke er rod i k_1 mere - alt n_1 gange.

Herefter gentages proceduren på a_2, a_3 op til a_n. I den sidste kvotient går da ingen af rødderne op, og sætningen følger.

Hvis en rod har multipliciteten 2, så kaldes roden en *dobbeltrod*, multipliciteten 3 giver en *tripelrod*, osv..

Det er meget let at undersøge, om en given rod har en multiplicitet højere end 1 - se nedenstående sætning, som er en af de få sætninger, som forbinder polynomier og differentialregning:

Sætning 9 (LS)

Lad *f* være et polynomium med roden *a*. Da gælder:

a har en multiplicitet større end 1

$\Updownarrow$

a er rod i både *f* og i f'.

Bevis:

Vi antager, at *a* har multipliciteten $n > 0$. Vi kan da skrive

$$f(x) = (x - a)^n \cdot k(x)$$

hvor *a* **ikke** er rod i k. Differentieres denne ligning, så giver produktreglen

$$f'(x) = (x - a)^n \cdot k'(x) + n(x - a)^{n-1} \cdot k(x)$$

Idet $n > 0$ vil faktoren $(x-a)^n$ give 0 ved indsættelse af $x=a$, så den indsættelse foretager vi

$$f'(a) = (a-a)^n \cdot k'(a) + n(a-a)^{n-1} \cdot k(a) = (a-a)^{n-1} \cdot nk(a)$$

Sætningens pil nedad:
Vi ser, at **hvis** $n > 1$, **så** er faktoren $(a-a)^{n-1} = 0$, og a er rod i f'.

Sætningens pil opad:
Vi ser også, at **hvis** a er rod i f', så gælder:

$$f'(a) = (a-a)^{n-1} \cdot nk(a) = 0$$

Dette kan kun lade sig gøre, hvis enten $(a-a)^{n-1}$ er 0, eller $k(a)$ er 0. Men a er ikke rod i k, så

$$(a-a)^{n-1} = 0$$

Denne faktor kan kun være 0 når $n > 1$, **så** multipliciteten af a er altså større end 1.

Tidligere beviste vi en **fuldstændig løsningsformel** for andengradsligninger:

Sætning 10 (FS)

Lad $f(x) = ax^2 + bx + c$ være et andengradspolynomium. Lad diskriminanten d være defineret ved:

$$d = b^2 - 4ac.$$

f har da følgende rødder:

hvis $d < 0$, så har f ingen rødder

hvis $d = 0$, så har f dobbeltroden $-\dfrac{b}{2a}$

hvis $d > 0$, så har f de to enkeltrødder

$$\frac{-b+\sqrt{d}}{2a} \quad \text{og} \quad \frac{-b-\sqrt{d}}{2a}$$

Bemærk, at der er forskel på et andengradspolynomium og en andengradsligning:

Et andengradspolynomium er en **funktion** af formen

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

En andengradsligning er en **ligning** eller et **åbent udsagn** af formen

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Spørgsmålet er nu, om der findes tilsvarende løsningsformler for polynomier af højere grad. Svaret er .... tjah....

Der findes formler for rødderne i en trediegradsligning og en fjerdegradsligning. De er desværre temmeligt bøvlede at bruge i praksis, så dem kommer vi ikke nærmere ind på.

Nordmanden Niels Henrik Abel og franskmanden Evariste Galois beviste i starten af 19. århundrede, at der er umuligt at finde generelle løsningsformler for polynomier af grad større end 4. Heldigvis, for så skal vi ikke belemres med disse.

Når man så skal løse f.eks. en 7.gradsligning, så må man benytte to andre metoder end at sætte ind i en løsningsformel. Disse er

1) at finde tilnærmede rødder, og

2) at gætte på rødder.

Den mest effektive måde at finde tilnærmede rødder på er vha. Newton-Raphsons iterationsformel, som vi har omtalt tidligere. Der findes dog andre metoder, bl.a. bisektionsmetoden, som vi også kender til, og som desværre ikke er specielt effektiv.

Når man gætter på rødder, så er det dumt bare at gætte ud i den blå luft. Faktisk findes der en metode, som tillader en at komme med temmeligt intelligente gæt. Den hedder "*p*/*q*-metoden" og går ud på følgende:

Sætning 11 (LS)

Lad $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ være et polynomium med **heltallige** koefficienter.
Hvis den uforkortelige brøk $\frac{p}{q}$ er rod i *f*, så vil

$$p \text{ går op i } a_0 \qquad \text{og} \qquad q \text{ går op i } a_n$$

Beviset for denne sætning står i Appendiks A.

Eksempel

Lad os finde de rationale rødder i polynomiet

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

Skrives roden som brøken $\frac{p}{q}$, så skal

$$p \text{ går op i } a_0 = 2, \text{ dvs.} \quad p \in \{\pm 1, \pm 2\}$$

q gå op i $a_3 = 1$, dvs. $\quad q \in \{\pm 1\}$

Og samlet fås

$$\tfrac{p}{q} \in \{\pm\tfrac{1}{1}, \pm\tfrac{2}{1}\} = \{\pm 1, \pm 2\}$$

Alle disse rationale tal tjekkes ved indsættelse:

$$\begin{aligned}
&f(1) = 1^3 - 4\cdot 1^2 + 5\cdot 1 - 2 = 0\\
&f(-1) = (-1)^3 - 4\cdot(-1)^2 + 5\cdot(-1) - 2 = -10\\
&f(2) = 2^3 - 4\cdot 2^2 + 5\cdot 2 - 2 = 0\\
&f(-2) = (-2)^3 - 4\cdot(-2)^2 + 5\cdot(-2) - 2 = -36
\end{aligned}$$

Ergo er 1 og 2 de eneste rationale rødder.

Findes der flere rødder? Tja, ifølge sætning 7 er der højst tre rødder, og vi kender to. Det er nu lettest at se, om en af de to kendte rødder faktisk skulle være rod en gang til, dvs. en dobbeltrod. Hertil bruges sætning 9:

$$f'(x) = (x^3 - 4x^2 + 5x - 2)' = 3x^2 - 8x + 5$$

1 og 2 indsættes:

$$\begin{aligned}
&f'(1) = 3\cdot 1^2 - 8\cdot 1 + 5 = 0\\
&f'(2) = 3\cdot 2^2 - 8\cdot 2 + 5 = 1
\end{aligned}$$

Aha, roden 1 har multiplicitet større end 1, mens roden 2 har multipliciteten 1. Idet polynomiet *f* har grad 3, så kan vi konkludere, at

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ har rødderne 1(dobbeltrod) og 2.

Kombineres sætningerne 6, 9 og 10, så har vi et slagkraftigt våben til at finde rødder. Metoden går i al sin simpelhed ud på at finde de rationale rødder vha. *p*/*q*-metoden, udføre divisioner á la sætning 6 og håbe på, at kvotientpolynomiet, som bliver tilbage, er et andengradspolynomium.

Eksempel

Lad os løse ligningen:

$$x^5 - \tfrac{3}{2}x^4 - \tfrac{7}{2}x^3 + 4x^2 + 3x - 2 = 0$$

Her kan *p*/*q*-metoden **ikke** umiddelbart bruges, idet koefficienterne skal være heltallige. Men vi kan gange ligningen igennem med 2, således at alle koefficienterne bliver heltallige:

$$2x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 6x - 4 = 0.$$

Vi skal altså finde rødder i polynomiet:

$$f(x) = 2x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 6x - 4$$

p/*q*-metoden bruges til at finde eventuelle rationale rødder:

p går op i $a_0 = -4$, dvs. $p \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$

q går op i $a_5 = 2$, dvs. $q \in \{\pm 1, \pm 2\}$

$\frac{p}{q} \in \{\pm\frac{1}{1}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{1}, \pm\frac{2}{2}, \pm\frac{4}{1}, \pm\frac{4}{2}\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm\frac{1}{2}\}$

Disse tal indsættes, og resultaterne er

$f(1) = 2$	$f(-1) = 0$
$f(2) = 0$	$f(-2) = -40$
$f(4) = 980$	$f(-4) = -732$
$f(\frac{1}{2}) = 0$	$f(-\frac{1}{2}) = -4{,}375$

Tallene -1, 2 og $\frac{1}{2}$ er rødder. Er de også dobbeltrødder?

$$f'(x) = 10x^4 - 12x^3 - 21x^2 + 16x + 6$$

$f'(-1) = -9$ $\quad f'(2) = 18$ $\quad f'(\frac{1}{2}) = 7{,}875$

Altså er ingen af de fundne rødder dobbeltrødder.

Vi dividerer nu polynomiet *f* med de tre polynomier $x+1$, $x-2$ og $x-\frac{1}{2}$.
Divisionsligningerne bliver:

$$2x^5 - 3x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 6x - 4 = (2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 10x - 4)\cdot(x+1)$$
$$2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 10x - 4 = (2x^3 - x^2 - 4x + 2)\cdot(x-2)$$
$$2x^3 - x^2 - 4x + 2 = (2x^2 - 4)\cdot(x - \tfrac{1}{2})$$

Vi skal bare altså finde eventuelle rødder i andengradspolynomiet $2x^2 - 4$:

$$d = 0^2 - 4\cdot 2\cdot(-4) = 32$$
$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{32}}{2\cdot 2} = \pm\frac{\sqrt{32}}{4} = \pm\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{16}} = \pm\sqrt{2}$$

I alt var løsningerne til den oprindelige ligning: -1, 2, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ og $-\sqrt{2}$.

Bemærk, at *p*/*q*-metoden kun virker, når alle koefficienterne er heltallige, og at man kun finder de **rationale** rødder - de mere underlige irrationale rødder må findes på andre måder. Særligt ondt er det, når $a_0 = 0$. Idet alle tal går op i 0, så fortæller *p*/*q*-metoden i dette tilfælde, at alle rationale tal er mulige rødder i polynomiet. Dette undgås naturligvis ved at erkende, at 0 er en rod, når $a_0 = 0$ og så skynde sig at dividere polynomiet med faktoren $x = x - 0$. Herefter kan man så anvende *p*/*q*-metoden uden problemer.

Opgaver

4.1 Løs følgende ligninger:

a) $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$

b) $18x^4 - 69x^3 + 44x^2 + 5x - 6 = 0$

c) $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$

d) $2x^3 + 7x^2 - 46x - 195 = 0$

e) $6x^4 - 7x^3 + x = 0$ (Advarsel: $a_0 = 0$!)

f) $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$

g) $-x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 5x + \frac{3}{2} = 0$

h) $2x^3 - 6x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{7}{2} = 0$

i) $2x^3 + 8x^2 - \frac{3}{2}x - 5 = \frac{35}{2}$

4.2 Find rødderne i nedenstående polynomier:

a) $f_1(x) = 2x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 2x + 12$

b) $f_2(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

c) $f_3(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

d) $f_4(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$

e) $g(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$

4.3 Opskriv rodfaktoriseringerne á la sætning 8 for alle polynomierne i opgave 4.2.

4.4 Lad *f* være et polynomium af grad *n* med heltallige koefficienter og med højestegradskoefficienten $a_n = 1$. Bevis, at enhver rational rod i *f* faktisk er et helt tal.

4.5 Konstruér et sjettegradspolynomium med rødderne 1, 2 og -3. -3 skal være en dobbeltrod. Polynomiet må ikke have andre rødder de tre ovenfor.

7.5 Uligheder

Har man sagt "ligninger", så skal man også sige "uligheder". Vi skal her se på de mere traditionelle måder at løse uligheder på.

En *ulighed* er et åbent udsagn, som indeholder et eller flere ulighedstegn. Løsningsmængden for en ulighed vil typisk være et eller flere intervaller.
De fundamentale regneregler for uligheder er:

Man må addere eller subtrahere det samme på begge sider.
Man må multiplicere eller dividere med det samme **positive** udtryk på begge sider.
Man må multiplicere eller dividere med det samme **negative** udtryk på begge sider, hvis man husker at **vende** ulighedstegnet.

Eksempel

Løs: $x+2<4x-7$

Svar: $G=\mathbf{R}$, idet begge sider i uligheden er defineret for alle reelle tal.

$$x+2<4x-7$$
$$\Updownarrow$$
$$x+2-4x-2<4x-7-4x-2$$
$$\Updownarrow$$
$$-3x<-9$$
$$\Updownarrow$$
$$x>3$$

(ulighedstegnet vendes, idet vi dividerer med -3).
Heraf ses, at løsningsmængden er $L=\left]3\,,\,\infty\right[$

Dobbeltuligheder er uligheder af formen

$$2x+3<x-3\leq x^2+\sqrt{x}$$

Dette skal forstås som det sammensatte åbne udsagn

$$2x+3<x-3 \quad\wedge\quad x-3\leq x^2+\sqrt{x}$$

Eksempel

Løs: $2<x-2\leq 8$

Svar: Igen ses, at $G=\mathbf{R}$

Vi løser uligheden ved at starte med at opsplitte dobbeltuligheden i to enkelte uligheder, som løses hver for sig. Løsningsmængden for dobbeltuligheden er dermed fællesmængden af de to løsningsmængder for de to "simple" uligheder.

$$2 < x - 2 \le 8$$
$\Updownarrow$
$$2 < x - 2 \qquad \wedge \qquad x - 2 \le 8$$
$\Updownarrow$
$$x > 4 \qquad \wedge \qquad x \le 10$$

Løsningsmængderne for de to uligheder er
$$L_1 =]4\,,\infty[\qquad \text{og} \qquad L_2 =]-\infty\,,10]$$
Løsningsmængden til dobbeltuligheden er derfor
$$L = L_1 \cap L_2 =]4\,,\infty[\cap]-\infty\,,10] =]4\,,10]$$

Løs: $2 + 2x < x + 3 < 4x + 6$

Svar: $G = \mathbf{R}$
$$2 + 2x < x + 3 < 4x + 6$$
$\Updownarrow$
$$2 + 2x < x + 3 \qquad \wedge \qquad x + 3 < 4x + 6$$
$\Updownarrow$
$$x < 1 \qquad \wedge \qquad x > -1$$
Dvs.
$$L_1 =]-\infty\,,1[\qquad \text{og} \qquad L_2 =]-1\,,\infty[$$
og
$$L = L_1 \cap L_2 =]-\infty\,,1[\cap]-1\,,\infty[=]-1\,,1[$$

Løs: $10 \le \dfrac{x-5}{x+4} < 15$

Svar: Her er $G = \mathbf{R} \backslash \{-4\}$. Vi deler igen op i de to uligheder. Men her skal man passe på, idet man gerne vil gange med størrelsen $x + 4$ på begge sider af ulighedstegnet - men denne størrelse kan være både negativ og positiv. Vi skal derfor starte med at dele på i to tilfælde - alt efter om størrelsen $x + 4$ er positiv eller negativ:

$G_1 =]-4\,,\infty[$ (her er $x + 4 > 0$)
$$10 \le \frac{x-5}{x+4} < 15$$
$\Updownarrow$
$$10 \le \frac{x-5}{x+4} \qquad \wedge \qquad \frac{x-5}{x+4} < 15$$
$\Updownarrow$
$$10x + 40 \le x - 5 \qquad \wedge \qquad x - 5 < 15x + 60$$
$\Updownarrow$
$$9x \le -45 \qquad \wedge \qquad -14x < 65$$

$\Updownarrow$

$$x \le -5 \qquad \wedge \qquad x > -\tfrac{65}{14}$$

Dvs.

$$L_{1,1} = \emptyset \qquad \wedge \qquad L_{1,2} = \left]-4\,,\infty\right[$$

og

$$L_1 = L_{1,1} \cap L_{1,2} = \emptyset$$

(husk, at de to løsningsmængder $L_{1,1}$ og $L_{1,2}$ skal ligge indenfor grundmængden $G_1 = \left]-4\,,\infty\right[$.)

$G_2 = \left]-\infty\,,-4\right[$ (her er $x+4<0$)

$$10 \le \frac{x-5}{x+4} < 15$$

$\Updownarrow$

$$10 \le \frac{x-5}{x+4} \qquad \wedge \qquad \frac{x-5}{x+4} < 15$$

$\Updownarrow$

$$10x+40 \ge x-5 \qquad \wedge \qquad x-5 > 15x+60$$

$\Updownarrow$

$$9x \ge -45 \qquad \wedge \qquad -14x > 65$$

$\Updownarrow$

$$x \ge -5 \qquad \wedge \qquad x < -\tfrac{65}{14}$$

Dvs.

$$L_{2,1} = \left[-5\,,-4\right[\qquad \wedge \qquad L_{2,2} = \left]-\infty\,,-\tfrac{65}{14}\right[$$

og

$$L_2 = L_{2,1} \cap L_{2,2} = \left[-5\,,-\tfrac{65}{14}\right[$$

Løsningsmængden for den oprindelige dobbeltulighed er derfor

$$L = L_1 \cup L_2 = \emptyset \cup \left[-5\,,-\tfrac{65}{14}\right[= \left[-5\,,-\tfrac{65}{14}\right[$$

Bemærk, at vi her skal tage foreningen af de to delløsningsmængder, idet vi delte op efter, om $x+4$ var positiv, **eller** $x+4$ var negativ.

Andengradsuligheder løses ved at løse den tilsvarende andengradsligning og derefter lave en figurbetragtning:

Eksempel

Løs: $2x^2+4x-6 \le 0$

Svar: Vi løser først den tilsvarende andengradsligning:

$G = \mathbf{R}$

$$2x^2+4x-6 \le 0$$

$\Updownarrow$

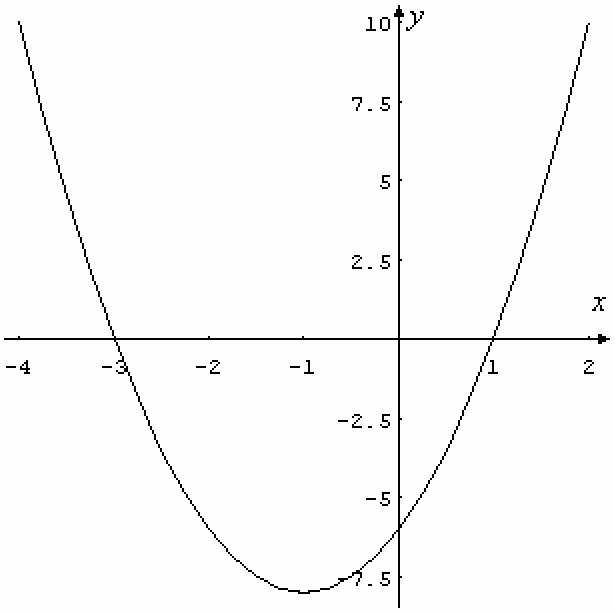
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6)}}{2 \cdot 2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{4} = \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$$

Betragt nu parablen med ligningen

$$y = 2x^2 + 4x - 6$$

Denne parabel vender benene opad, idet andengradskoefficienten 2 er positiv. Endvidere skærer den x-aksen i punkterne (1,0) og (-3,0). Parablen er da pisket til kun at ligge over x-aksen **udenfor** rødderne, dvs. løsningsmængden til uligheden er

$$L = \left]-\infty, -3\right] \cup \left[1, \infty\right[.$$



Ved løsning af uligheder har man ofte brug for den såkaldte *fortegnsregel*, der kan betragtes som en udvidelse af nulreglen:

$$\text{“}ab > 0\text{”} \quad \Leftrightarrow \quad \text{“}(a > 0 \ \wedge \ b > 0) \ \vee \ (a < 0 \ \wedge \ b < 0)\text{”}$$
$$\text{“}ab < 0\text{”} \quad \Leftrightarrow \quad \text{“}(a > 0 \ \wedge \ b < 0) \ \vee \ (a < 0 \ \wedge \ b > 0)\text{”}$$

Formuleret i ord:

Hvis produktet af to størrelser er positivt, så er enten begge de to størrelser positive, eller begge de to størrelser negative.
Hvis produktet af to størrelser er negativt, så er én af størrelserne positiv, og den anden negativ.

Eksempel

Løs: $(6 + 2x) \cdot (x - 4) > 0$

Svar: $G = \mathbf{R}$

Vi bruger fortegnsreglen:

$$(6+2x)(x-4)>0$$

$\Updownarrow$

$$(6+2x>0 \;\wedge\; x-4>0) \quad \vee \quad (6+2x<0 \;\wedge\; x-4<0)$$

$\Updownarrow$

$$(2x>-6 \;\wedge\; x>4) \quad \vee \quad (2x<-6 \;\wedge\; x<4)$$

$\Updownarrow$

$$(x>-3 \;\wedge\; x>4) \quad \vee \quad (x<-3 \;\wedge\; x<4)$$

$\Updownarrow$

$$x>4 \quad \vee \quad x<-3$$

Dvs.

$$L =]-\infty\,,-3[\, \cup\,]4\,,\infty[$$

Denne metode kan naturligvis også benyttes, når der er tre eller flere faktorer - men man må regne med, at det bliver rimeligt kompliceret i disse tilfælde.

Når man skal løse uligheder indeholdende numerisk-tegn, så skal man, ganske som ved ligningerne, dele op efter indmadens fortegn.

Eksempel

Løs: $|x+8|<6$

Svar: $G = \mathbf{R}$.

Vi deler op efter indmadens fortegn. Der bliver to tilfælde:

$G_1 = [-8\,,\infty[$ (her er indmaden $x+8 \geq 0$).

$$|x+8|<6$$

$\Updownarrow$

$$x+8<6$$

$\Updownarrow$

$$x<-2$$

Dvs.

$$L_1 = [-8\,,-2[$$

$G_2 =]-\infty\,,-8[$ (her er indmaden $x+8<0$)

$$|x+8|<6$$

$\Updownarrow$

$$-(x+8)<6$$

$\Updownarrow$

$$-x-8<6$$

$\Updownarrow$

$$-x<14$$

$\Updownarrow$

$$x > -14$$

Dvs.

$$L_2 =]-14\,,-8[$$

og

$$L = L_1 \cup L_2 = [-8\,,-2[\cup]-14\,,-8[=]-14\,,-2[\,.$$

Løs: $4 < |x-2| \le 8$

Svar: $G = \mathbf{R}$

Igen deles der op efter indmadens fortegn:

$G_1 = [2\,,\infty[$ (her er indmaden $x-2 \ge 0$)

$$4 < |x-2| \le 8$$

$$\Updownarrow$$

$$4 < x-2 \le 8$$

$$\Updownarrow$$

$$4 < x-2 \quad \wedge \quad x-2 \le 8$$

$$\Updownarrow$$

$$x > 6 \quad \wedge \quad x \le 10$$

Dvs.

$$L_1 =]6\,,10]$$

$G_2 =]-\infty\,,2[$ (her er indmaden $x-2 < 0$)

$$4 < |x-2| \le 8$$

$$\Updownarrow$$

$$4 < -(x-2) \le 8$$

$$\Updownarrow$$

$$4 < -x+2 \quad \wedge \quad -x+2 \le 8$$

$$\Updownarrow$$

$$x < -2 \quad \wedge \quad x \ge -6$$

Dvs.

$$L_1 = [-6\,,-2[$$

og

$$L = L_1 \cup L_2 = [-6\,,-2\,[\cup]6\,,10]$$

Opgaver

5.1 Løs

a) $3x - 1 \le 4 - 3x$ b) $6x + 2 < 4x - 4$

c) $5x - 6 < -1$ d) $\frac{1}{2}x + 3 \geq \frac{5}{2}x - 1$

5.2 Løs dobbeltulighederne

a) $x - 1 < 2x - 3 < 5 - x$ b) $2x - 3 < 2x + 3 < 5 - x$

c) $2x - 3 > 2x - 4 > 2x - 5$ d) $3x + 3 < 3x + 2 < 2x + 4$

e) $2x - 3 < 2(x - 1) \leq 2x + 1$ f) $x + 1 \leq 5 < 2x - 1$

5.3 Løs ulighederne

a) $\dfrac{4x - 6}{3x - 3} < 0$ b) $(4x - 6)(3x - 3) < 0$

c) $2x(x - 2)(x + 3) \geq 0$ d) $\dfrac{x(x + 1)}{x - 4} \leq 0$

e) $\dfrac{(x + 1)(x - 4)}{x} \leq 0$ f) $\dfrac{x - 4}{x(x + 1)} \leq 0$

g) $\dfrac{4x + 1}{3x - 4} < 1$ h) $\dfrac{3x - 6}{5x - 8} < -3$

5.4 Løs andengradsulighederne

a) $3x^2 + 4x - 7 < 0$ b) $-2x^2 + 8x - 8 \geq 0$

c) $x^2 + 3x + 5 > 0$ d) $-3x^2 + 4x - 10 < 0$

5.5 Løs ulighederne

a) $|2x + 1| > 5x + 1$ b) $|3 - x| > 2x - 4$

c) $|3x - 6| \leq x - 2$ d) $5 - x < |2x| - 2$

e) $2 < |x - 4| < 3$ f) $|3x + 4| + 5|x - 1| > 0$

7.6 Fortegnsundersøgelser

Man kommer ofte ud for at skulle løse en ulighed af typen $f(x) > 0$ (eller $f(x) < 0$), hvor *f* er en kontinuert funktion. Ja, faktisk er næsten alle uligheder af denne type, idet man jo bare kan omskrive uligheden ved at flytte alle led over på venstre side, f.eks.

$$x^2 + 2 > 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2 > 0$$

Løsningen af sådanne uligheder hænger sammen med et andet problem, som man ofte kommer ud for indenfor matematikken, fortegnsundersøgelser for en funktion: Man har en funktion *f*, og man er interesseret i, for hvilke værdier af *x* funktionsværdien $f(x)$ er positiv, negativ eller nul. Men dette svarer jo netop til at løse ulighederne $f(x) > 0$, $f(x) < 0$ og ligningen $f(x) = 0$.

Hvis funktionen *f* er kontinuert, så kan nedenstående metode bruges:

Eksempel

Vi skal undersøge fortegnene for funktionen

$$f(x) = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8$$

Først og fremmest bemærker vi, at det er en kontinuert funktion - det er nemlig et fjerdegradspolynomium, og alle polynomier er kontinuerte.

Herefter løser vi ligningen $f(x) = 0$. Man siger også, at vi finder *nulpunkterne* for *f*. Vi springer detaljerne over, men *p*/*q*-metoden og polynomiers division viser, at *f* har nulpunkterne -2, 1 og 2 (2 er endda en dobbeltrod).

Vi bemærker nu, at idet *f* er kontinuert, så **kan *f* kun skifte fortegn i nulpunkterne**. Derfor har funktionen *f* samme fortegn i hele intervallet $]-2\,,1[$. Vil vi vide, hvilket fortegn dette er, så kan vi bare tage et tilfældigt punkt fra dette interval, f.eks. 0, og udregne funktionsværdien

$$f(0) = -8.$$

Dette er et negativt tal, så *f* er negativ i intervallet $]-2\,,1[$.

Normalt gør man det, at man laver en *fortegnslinie*. Dette er en tallinie, hvorpå man indsætter de tidligere fundne nulpunkter, og derefter angiver fortegnene for *f* i intervallerne mellem nulpunkterne:

x		-2		1		2		
f	++	0	--	0	++	0	++	

De udregnede funktionsværdier var

$$f(-3) = 100 > 0$$
$$f(0) = -8 < 0$$
$$f(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{7}{16} > 0$$
$$f(3) = 10 > 0$$

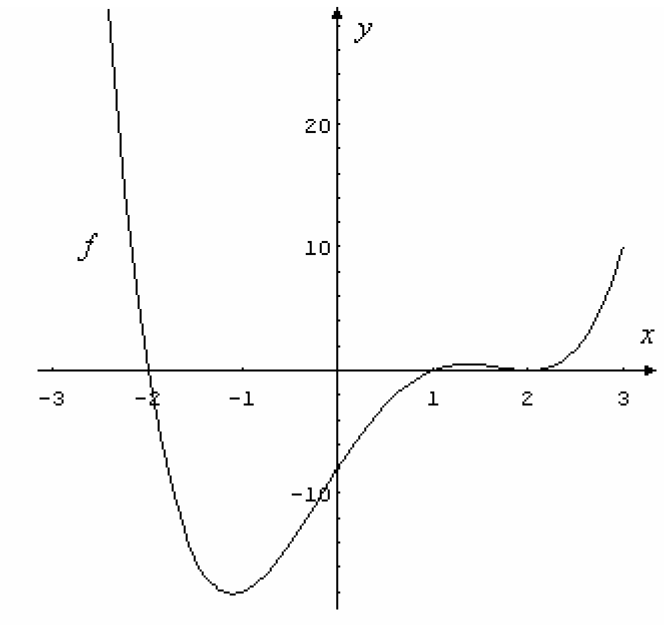
Idet *f* er kontinuert kan vi altså konkludere, at

f er positiv i intervallerne $]-\infty\,,-2[\;,\;]1\,,2[$ og $]2\,,\infty[$

f er negativ i intervallet $]-2\,,1[$

f er nul i punkterne -2, 1, og 2.

Til læserens orientering har vi skitseret grafen for *f* nedenunder:



Regnede opgaver

Opgave: Lav en fortegnsundersøgelse for funktionen *f*, givet ved

$$f(x) = e^{2x} - 3e^{x} + 2$$

Svar: For det første ser man, at funktionen er kontinuert, idet den helt klart er differentiabel.

Næste trin er at finde nulpunkter for *f*. Vi har at gøre med en maskeret andengradsligning med grundmængden $G = \mathbf{R}$:

$$f(x) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$e^x = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$e^x = 1 \quad \vee \quad e^x = 2$$

$$\Updownarrow$$

$$e^x = \ln(1) = 0 \quad \vee \quad e^x = \ln(2)$$

$$L = \{0\,,\ln 2\}$$

Herefter laves fortegnslinien:

x		0		ln2	
f	++	0	--	0	++

hvor de udregnede funktionsværdier er

$$f(-1) \approx 1{,}0317 > 0$$
$$f(0{,}5) \approx -0{,}2270 < 0$$
$$f(1) \approx 1{,}2342 > 0$$

f er positiv i intervallerne $]-\infty\,,0[$ og $]\ln 2\,,\infty[$
f er negativ i intervallet $]0\,,\ln 2[$
f er nul i punkterne 0 og ln2.

Opgave: Lav en fortegnsundersøgelse for funktionen g med forskriften

$$g(x) = \begin{cases} x+3 & , x < 2 \\ x^2 - 16 & , x \geq 2 \end{cases}$$

Svar: Funktionen er kontinuert undtagen i $x = 2$.
Dette er et problem, idet funktionens graf så kan springe fra de positive til de negative værdier uden at krydse x-aksen. Funktionen kan altså skifte fortegn uden at der er et nulpunkt!

Dette problem kan dog løses ganske let, idet vi bare tager 2 med på fortegnslinien.

Nulpunkterne findes - og her skal vi passe lidt på med grundmængderne:

$G_1 =]-\infty\,,2[$	$G_2 = [2\,,\infty[$
$g(x) = 0$	$g(x) = 0$

$\Updownarrow$

$$x+3=0$$

$\Updownarrow$

$$x=-3$$

$L_1=\{-3\}$

$\Updownarrow$

$$x^2-16=0$$

$\Updownarrow$

$$x=4 \quad \vee \quad x=-4$$

$L_2=\{4\}$ (OBS: $-4 \notin G_2$)

Nulpunkterne er altså -3 og 4.

Fortegnslinien laves, hvor vi husker at medtage 2 - den stiplede lodrette streg ved tallet 2 angiver, at der her er tale om et diskontinuitetspunkt. Minus'et angiver, at

$$g(2)=2^2-16=-12<0$$

x		-3		2		4	
g	---	0	+++	-	---	0	+++

De udregnede funktionsværdier var

$$g(-4)=-1<0$$
$$g(0)=3>0$$
$$g(3)=-7<0$$
$$g(5)=9>0$$

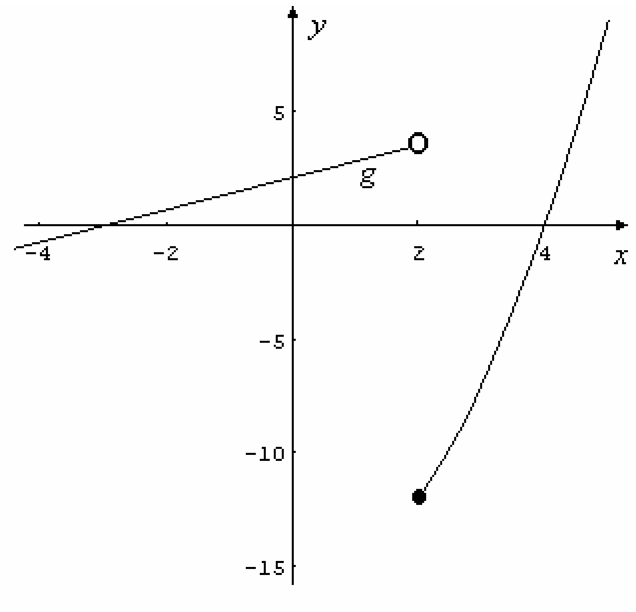
Ergo,

g er positiv i intervallerne $]-3\,,2[$ og $]4\,,\infty[$

g er negativ i intervallerne $]-\infty\,,-3[$ og $[2\,,4[$

g er nul i punkterne -3 og 4.

Grafen for g er vist på næste side:



Opgaver

6.1 Undersøg nedenstående funktioner mht. fortegn:

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$

b) $f(x) = 9^x - 4 \cdot 3^x + 3$ (vink: $9^x = (3^x)^2$)

c) $f(x) = (2 - x)(x^2 - 9)$

d) $f(x) = \sqrt{2x^2 - 18}$

e) $f(x) = (\ln x)^2 - 9$

f) $f(x) = \ln(x^2 - 16)$

g) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

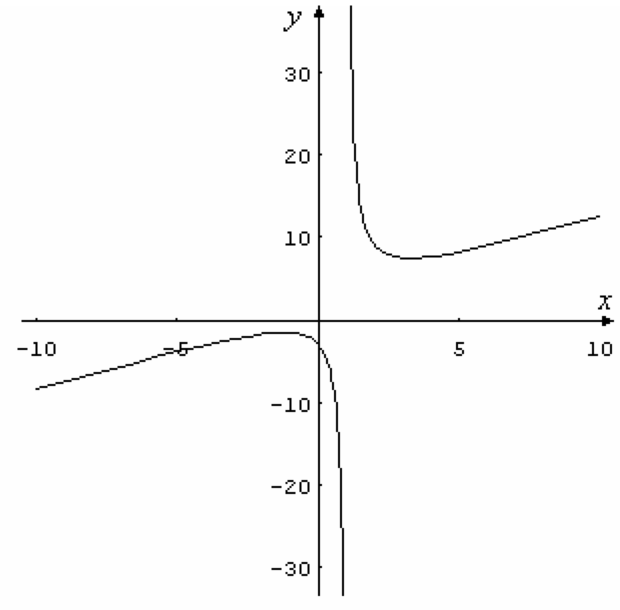
7.7 Asymptoter

Tiden er nu endeligt inde til at forklare, hvad en asymptote er for noget:

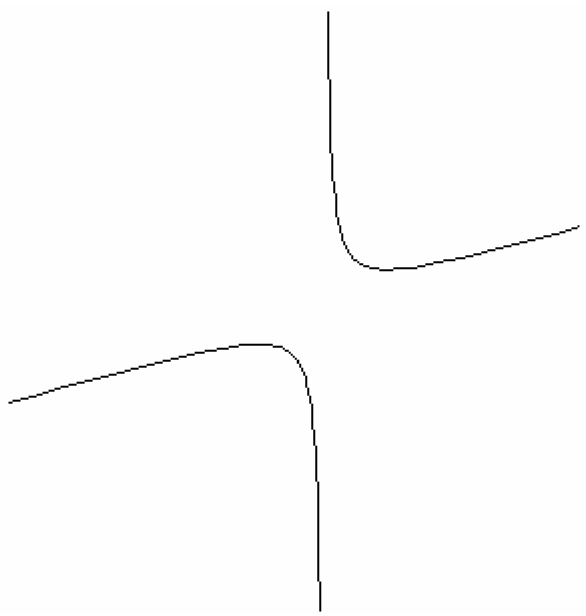
Lad os betragte grafen for funktionen

$$f\ (x) = \frac{x^2 + x + 3}{x - 1}$$

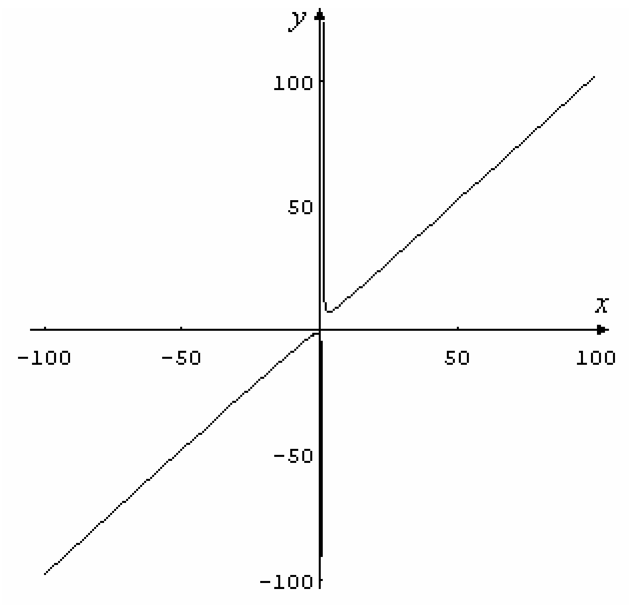
Sådan ser grafen ud:



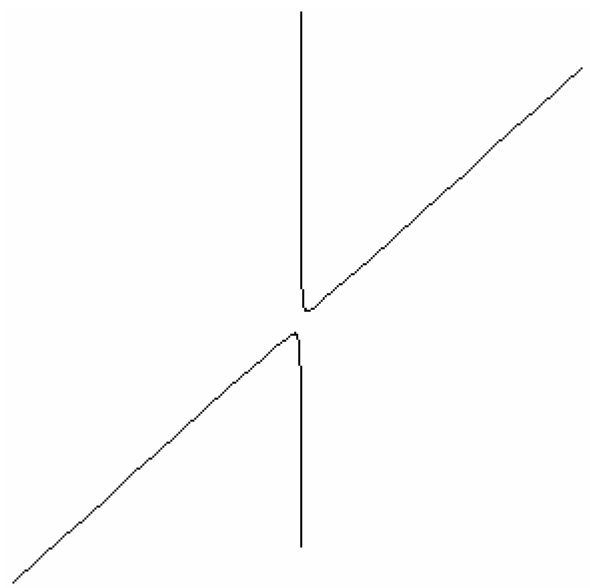
Og sådan ser grafen ud, hvis man sletter de to koordinatakser.



Hvis man formindsker grafen med en faktor 10, så får man følgende:

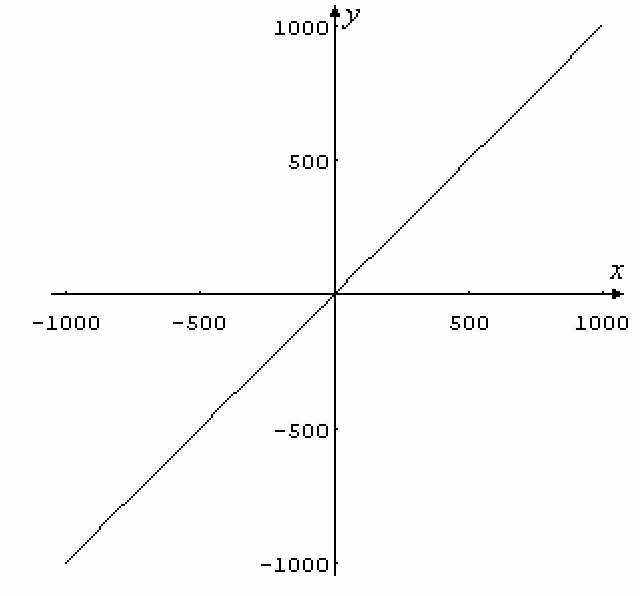


Og sletter man akserne, så får man:

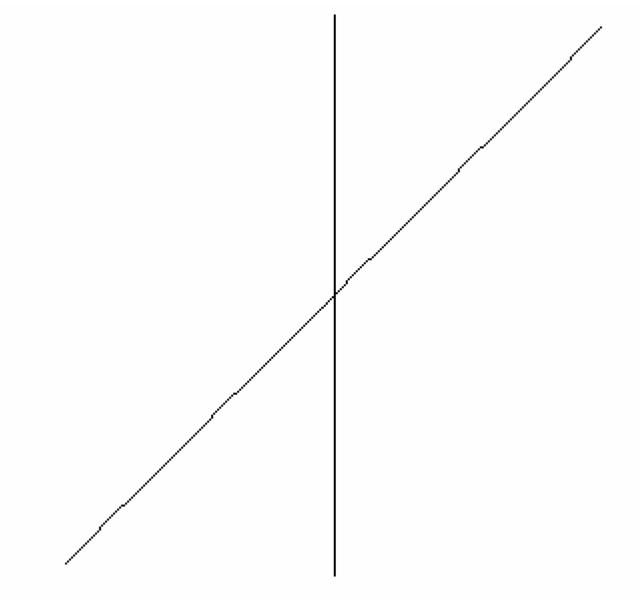


:

I en endnu kraftigere formindskelse er grafen:



og uden koordinatakser:



Det ses, at formindsker man grafen tilpas meget, så kommer den til at bestå af to rette linier. Man kan vise, at disse to linier har ligningerne:

$$y = x + 2 \qquad \text{og} \qquad x = 1$$

Den første linie er et eksempel på en *skrå asymptote*, mens den anden er en *lodret asymptote*.

7.8 Vandrette og skrå asymptoter

Vandrette og skrå asymptoter optræder, når grafen for en funktion f nærmer sig en vandret eller skrå linie uendeligt langt ude, dvs. når x bliver uendeligt stor eller uendeligt lille. Vi skal præcisere dette og give nogle regler for, hvordan man kan finde eventuelle asymptoter, men først skal vi snakke lidt om grænseværdier:

Eksempel

Betragt funktionerne:

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} 2 & , x \le 5 \\ 1 + x^{-2} & , x > 5 \end{cases}$$

$$h(x) = e^x$$

Hvordan opfører disse funktioner sig, når x går imod ∞ eller imod $-\infty$?

Når x bliver meget stor (dvs. når x går imod ∞), så bliver nævneren i f meget stor, og brøken nærmer sig 0. Det samme sker, når x går imod $-\infty$ Vi skriver dette som grænseværdier:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Når x går imod ∞ , så vil $g(x)$ gå imod 1 (leddet x^{-2} vil nemlig gå imod 0, og kun 1-tallet vil blive tilbage). Når x går imod $-\infty$, så vil $g(x)$ gå imod 2, idet g jo er en konstant funktion for store, negative tal.

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 1 \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to-\infty} g(x) = 2$$

Når x går imod ∞, så vil størrelsen e^x også blive uendeligt stor. Når x går imod $-\infty$, så vil e^x gå imod 0. Vi skriver dette som:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \qquad \text{og} \qquad \lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} e^x \text{ eksisterer ikke}$$

Definition 11 (LS)

a) Grafen for funktionen f har den *vandrette asymptote* med ligningen $x = a$, hvis

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a \qquad \text{eller}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$

b) Grafen for funktionen f har den *skrå asymptote* med ligningen $y = ax + b$, hvis

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0 \qquad \text{eller}$$

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$$

Underligt nok siger man, at der er **grafen** for funktionen, som har asymptoterne, ikke funktionen selv.

Definitionen fra den skrå asymptote ser lidt underlig ud; men det betyder blot, at afstanden mellem grafen for *f* og linien med ligningen: $y = ax + b$ bliver mindre og nærmer sig 0, når *x* bliver tilpas stor.

Eksempel

Betragt de 3 funktioner fra før. Vi ser, at

Grafen for *f* har en vandret asymptote med ligningen $y = 0$.

Grafen for *g* har to vandrette asymptoter med ligningerne:
$y = 1$ og $y = 2$

Grafen for *h* har en vandret asymptote med ligningen $y = 0$.

Eksempel

Betragt funktionen *f* fra sidste sektion med forskriften:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 3}{x - 1}$$

Her blev det påstået, at denne funktions graf havde en skrå asymptote med ligningen: $y = x + 2$. Vi kan nu bevise dette:
Udføres divisionen $x^2 + x + 3 \ : \ x - 1$, så fås divisionsligningen:

$$x^2 + x + 3 = (x + 2) \cdot (x - 1) + 5$$

Dette betyder:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 3}{x - 1} = \frac{(x + 2)(x - 1) + 5}{x - 1} = x + 2 + \frac{5}{x - 1},$$

Vi kan nu beregne grænseværdien:

$$\lim_{x \to \infty}(f(x) - (x + 2)) = \lim_{x \to \infty}(x + 2 + \frac{5}{x - 1} - (x + 2)) =$$
$$\lim_{x \to \infty} \frac{5}{x + 1} = 0$$

Tilsvarende beregninger kan gennemføres for grænseværdien, hvor $x \to -\infty$.

Bemærk, at grafen for en givet funktion kun kan have 2 vandrette eller skrå asymptoter - en i hver side. Disse kan godt være ens.

For rationale funktioner er det nemt at bestemme asymptoterne:

Sætning 12 (LS)

Lad f være en rational funktion

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

hvor p og q er polynomierne

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$
$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

med:

$$n = \text{grad}(f) \qquad \text{og} \qquad m = \text{grad}(g)$$

,

a) Hvis $n < m$, så har grafen for f den vandrette asymptote

$$y = 0$$

b) Hvis $n = m$, så har grafen for f den vandrette asymptote

$$y = \frac{a_n}{b_m}$$

c) Hvis $n = m + 1$, så har grafen for f en skrå asymptote, hvis ligning kan findes vha. polynomiers division.

d) Hvis $n < m + 1$ så har grafen for f ingen vandrette eller skrå asymptoter.

Bevis:

a) Vi forkorter den rationale funktion med nævnerens største potens x^m :

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} =$$
$$\frac{a_n x^{n-m} + a_{n-1} x^{n-1-m} + \ldots + a_2 x^{2-m} + a_1 x^{1-m} + a_0 x^{-m}}{b_m + b_{m-1} x^{-1} + \ldots + b_2 x^{2-m} + b_1 x^{1-m} + b_0 x^{-m}}$$

Idet vi har antaget, at $n < m$, så er alle eksponenterne ovenfor i brøken negative. Når x går imod ∞ eller $-\infty$, så vil alle leddene ovenfor derfor gå imod 0 pånær konstantleddet b_m i nævneren. Vi har derfor

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{0 + 0 + \ldots + 0 + 0 + 0}{b_m + 0 + \ldots + 0 + 0 + 0} = 0$$

Det beviser, at grafen for f har den vandrette asymptote $y = 0$.

b) Nu er $n = m$, så laver vi det samme regnestykke som ovenfor:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0} =$$

$$\frac{a_n + a_{n-1}x^{-1} + \ldots + a_2 x^{2-n} + a_1 x^{1-n} + a_0 x^{-n}}{b_n + b_{n-1}x^{-1} + \ldots + b_2 x^{2-n} + b_1 x^{1-n} + b_0 x^{-n}}$$

(Der skrives konsekvent *n* i stedet for *m*!)

Når x går imod ∞ eller $-\infty$, så vil alle led i brøken gå imod 0 pånær de to konstantled a_n og b_n. Vi får derfor

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{a_n + 0 + \ldots + 0 + 0 + 0}{b_n + 0 + \ldots + 0 + 0 + 0} = \frac{a_n}{b_n}$$

Det beviser, at grafen for *f* har den vandrette asymptote med ligningen $y = \dfrac{a_n}{b_n}$

c) Vi kan lave polynomiers division af q op i p og få divisionsligningen

$$p(x) = k(x) \cdot q(x) + r(x)$$

Idet $\text{grad}(p) = \text{grad}(q) + 1$ pr betingelsen i punkt c, så gælder, at

$$\text{grad}(k) = 1 \quad \text{og} \quad \text{grad}(r) < \text{grad}(q)$$

Den skrå asymptote for grafen for *f* vil da have ligningen $y = k(x)$. Dette kan ses ved at udføre divisionen:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{k(x) \cdot q(x) + r(x)}{q(x)} = k(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Vi beregner grænseværdien:

$$\lim_{x \to \infty}(f(x) - k(x)) = \lim_{x \to \infty}\left(k(x) + \frac{r(x)}{q(x)} - k(x)\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{r(x)}{q(x)} = 0$$

Den sidste grænseværdi er 0, fordi den rationale funktion $\dfrac{r(x)}{q(x)}$ har tællergrad mindre end nævnergrad, svarende til tilfælde a) i dette bevis.

d) I dette tilfælde vil divisionen give divisionsligningen

$$p(x) = k(x) \cdot q(x) + r(x)$$

hvor k er et polynomium af grad 2 eller højere.

Uanset hvilken underlig skrå linie med ligningen $y = s(x)$ man kan finde på, så vil

$$f(x) - s(x) = \frac{p(x)}{q(x)} - s(x) = k(x) + \frac{r(x)}{q(x)} - s(x)$$

gå imod uendelig, når x går imod uendelig. Ganske vist vil leddet $\frac{r(x)}{q(x)}$ gå imod 0, men $k(x) - s(x)$ er et polynomium af grad større end 2, og vil derfor gå imod uendelig. Linien med ligningen $y = s(x)$ kan derfor **ikke** være en skrå asymptote.

Eksempel

Betragt funktionerne:

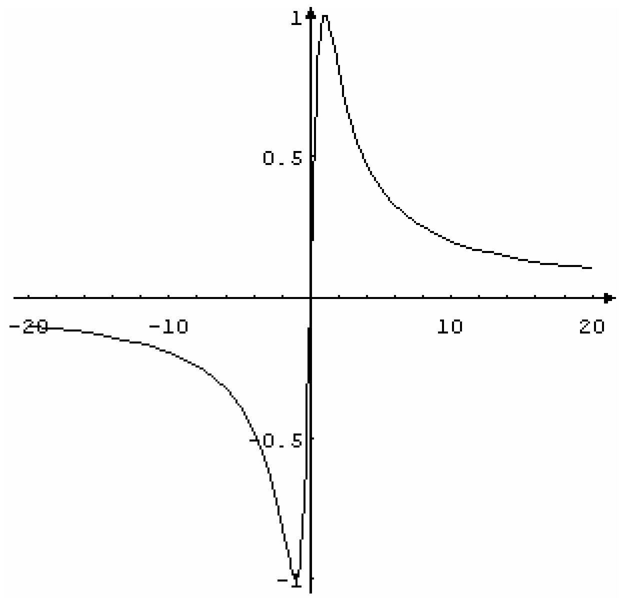
$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \qquad g(x) = \frac{2x^2-1}{x^2+1} \qquad h(x) = \frac{2x^3-1}{x^2+1}$$

Ifølge sætning 12 ser vi umiddelbart

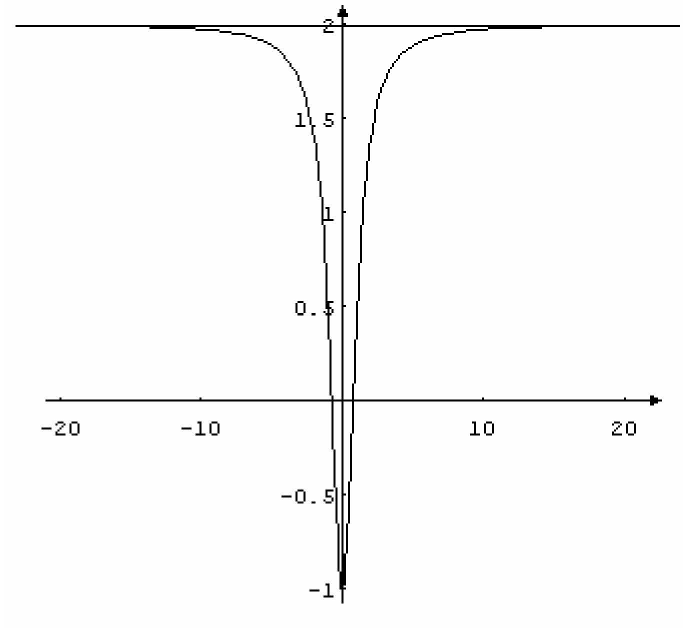
Grafen for *f* har den vandrette asymptote $y = 0$.
Grafen for *g* har den vandrette asymptote $y = 2$.
Grafen for *h* har den skrå asymptote $y = 2x$
(divisionsligningen er $2x^3 - 1 = 2x(x^2+1) + (-2x-1)$).

Sammenlign dette med graferne nedenfor:

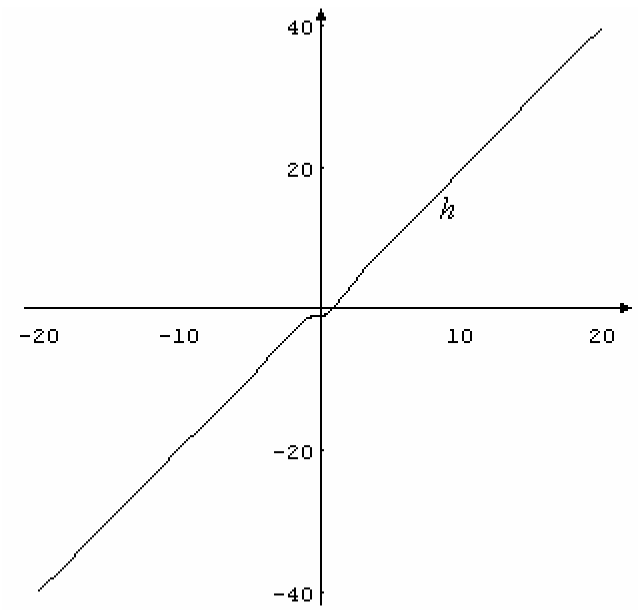
Grafen for *f*:



Grafen for *g* og linien med ligningen $y = 2$:



Grafen for *h*:



Opgaver

8.1 Find de vandrette eller skrå asymptoter for graferne for følgende funktioner:

a) $f(x) = \dfrac{7}{x+3}$

b) $g(x) = \dfrac{3x+8}{x^2}$

c) $h(x) = \dfrac{4x^2 - 6x + 8}{x^2 + 3x}$

d) $i(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x - 6}$

e) $j(x) = \dfrac{3x^5 - 2x^3 - 8x + 3}{x^4 + 3x^3}$

f) $k(x) = \dfrac{x^3 + 3x + 2}{x - 8}$

g) $l(x) = \begin{cases} x + 2 - 3x^{-2}, & x < -5 \\ 3 + e^{-x}, & x > -5 \end{cases}$

h) $m(x) = 1 + 2\sqrt{x}$

i) $n(x) = \begin{cases} 2x + 3, & -2 \le x < 4 \\ 4x, & 4 \le x \le 12 \end{cases}$

8.2 Giv et eksempel på en funktion, hvis graf har de vandrette asymptoter $y = 2$ og $y = -3$.

8.3 Giv et eksempel på en funktion, hvis graf har de to skrå asymptoter $y = x$ og $y = -x$.

7.9 Lodrette asymptoter

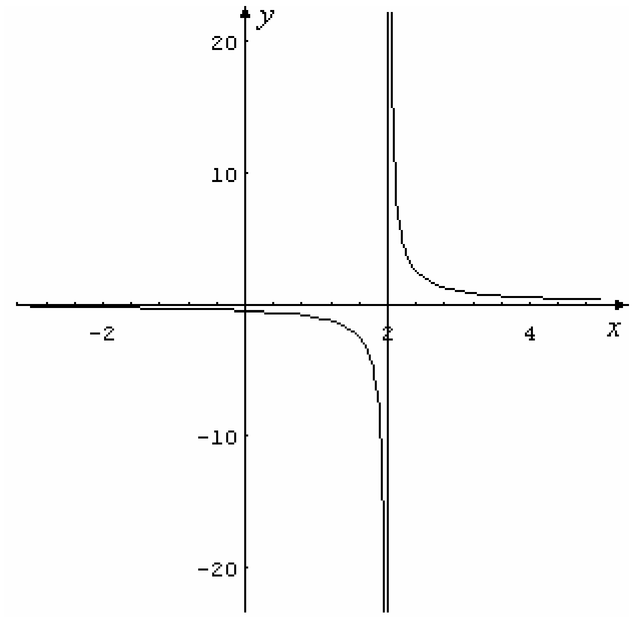
Vi skal nu studere *lodrette asymptoter*. Definitionen er som følger:

Definition 13 (LS)

Grafen for funktionen f har den lodrette asymptote med ligningen $x = a$ hvis

$$f(x) \to \infty \quad \text{for} \quad x \to a.$$

Eksempel



Funktionen f_1:

$$f_1(x) = \frac{1}{x-2}, \ x \neq 2$$

med grafen vist ovenfor, har den lodrette asymptote med ligningen

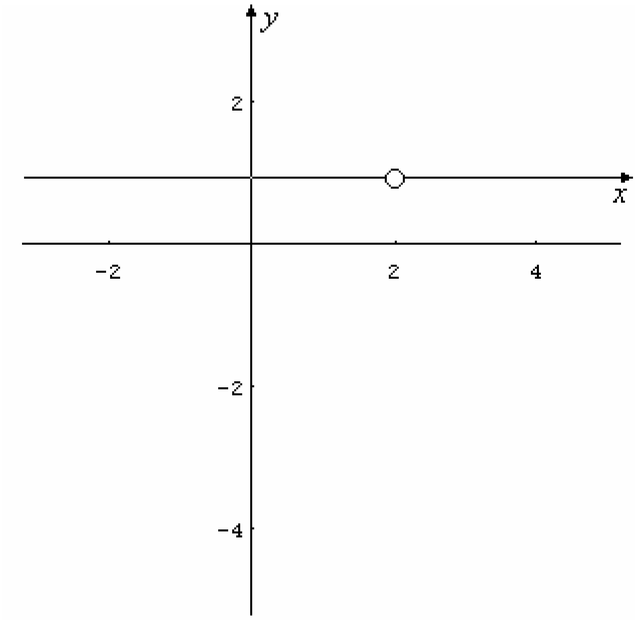
$$x = 2$$

Det kan ses ved, at når x nærmer sig 2, så går nævneren i forskriften for f_1 mod 0, altså går $f_1$imod uendelig.

Funktionen f_2:

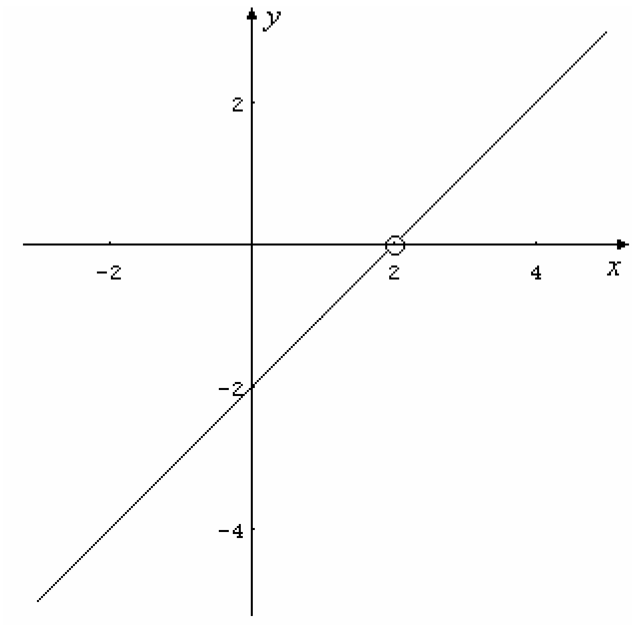
$$f_2(x) = \frac{x-2}{x-2}, \ x \neq 2$$

med grafen vist på næste side, har ingen lodrette asymptoter.



Ganske vist er $x = 2$ en rod i nævneren for f_2, men det er den også i tælleren, og faktisk kan vi skrive

$$f_2(x) = \frac{x-2}{x-2} = 1 \ , \ x \neq 2$$



Endelig betragter vi grafen for funktionen

$$f_3(x) = \frac{(x-2)^2}{x-2} \, , x \neq 2$$

Igen er der ingen lodrette asymptoter, idet

$$f_3(x) = \frac{(x-2)^2}{x-2} = x - 2 \ , \ x \neq 2 \, .$$

Disse tre funktioner illustrerer nydeligt følgende sætning:

Sætning 14 (LS)

Lad f være en rational funktion med

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Lad a være en rod i nævneren q. Så gælder:

Grafen for f har den lodrette asymptote med ligningen

$$x = a$$

hvis og kun hvis multipliciteten af a som rod i q er større end multipliciteten af a som rod i p.

Bevis:

Lad m være multipliciteten af a som rod i p, og lad n være multipliciteten af a som rod i q. Det kan godt være, at $m = 0$, hvilket bare betyder, at a ikke er rod i tælleren p.

Vi kan nu faktorisere polynomierne p og q som

$$p(x) = (x-a)^m \cdot p_1(x) \qquad \text{og} \qquad q(x) = (x-a)^n \cdot q_1(x)$$

sådan at a ikke er rod i hverken p_1 eller q_1.

Derfor gælder der

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{(x-a)^m\, p_1(x)}{(x-a)^n\, q_1(x)} = (x-a)^{m-n}\, \frac{p_1(x)}{q_1(x)}$$

Når $x \to a$, så vil faktoren $\dfrac{p_1(x)}{q_1(x)} \to \dfrac{p_1(a)}{q_1(a)}$, som bare er et tal, idet a jo hverken er rod i tælleren eller nævneren.

Til gengæld kan der ske ting og sager med faktoren $(x-a)^{m-n}$, når $x \to a$. Der er to muligheder:

1) $(x-a)^{m-n} \to \infty$ for $x \to a$
2) $(x-a)^{m-n} \to$ et tal for $x \to a$

1) optræder, når $m < n$, mens 2) sker, når $m \geq n$.

I tilfælde 1 ser vi, at grafen for *f* får den lodrette asymptote med ligningen $x = a$, mens tilfælde 2 ikke giver nogen asymptote.

Eksempel

Betragt funktionen *f* med forskriften

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

Ved hjælp af *p*/*q*-metoden kan man hurtigt se, at nævneren har de tre enkelt rødder 1, 2 og -1, mens tælleren har de to enkeltrødder 1 og -2.

Roden 1 giver derfor ingen lodret asymptote, mens de to andre rødder giver asymptoterne:

$$x = 2 \qquad \text{og} \qquad x = -1.$$

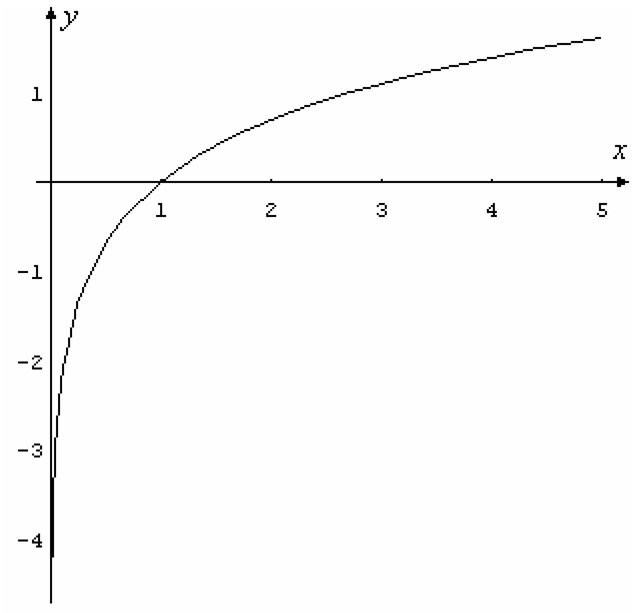
Det er ikke kun rationale funktioner, der har lodrette asymptoter:

Eksempel

Betragt funktionen

$$g(x) = \ln x$$

Den har grafen vist nedenfor:



Som man kan se (og efterkontrollere på sin lommeregner), så gælder der:

$$\ln x \to -\infty \quad \text{for} \quad x \to 0$$

Grafen har derfor den lodrette asymptote med ligningen $x = 0$

Opgaver

9.1 Find samtlige lodrette asymptoter for funktionerne i opgave 8.1.

9.2 Find samtlige asymptoter for funktionen f med forskriften

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x-2) & , x > 2 \\ 4 & , x = 2 \\ (x-2)^2/(x-2) & , x < 2 \end{cases}$$

9.3 Find en funktion, hvis graf har asymptoterne med ligningerne

$x = 2$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 2x$

9.4 En gal videnskabsmand påstår at have opdaget en funktion med asymptoterne

$x = 4$, $x = -3$, $y = 2x$, $y = x$, $x = 5$, $y = -5$

Har han ret?

9.5 Når man skal lave fortegnsundersøgelser for rationale funktioner, så skal man passe på, idet fortegnet kan skifte i punkter, hvori der er en lodret asymptote.
Man kan dog undgå dette problem ved, ganske som ved diskontuinetspunkter, at medtage "asymptotepunkterne" blandt nulpunkterne.
Undersøg nedenstående funktioner for fortegn og asymptoter:

a) $f(x) = \dfrac{2-x}{x^2-9}$ b) $f(x) = \dfrac{2-x}{x^2}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$ d) $f(x) = \dfrac{x^4-3x^3-2x^2+12x-8}{x^2-4}$

Appendix A
Bevis for *p*/*q*-metoden

Vi kommer nu med det længe ventede bevis for p/q-metoden. Men først må vi indføre nogle begreber:

Definition A1

To hele tal p og q er *indbyrdes primiske*, hvis p og q ikke har nogen fælles divisor ud over -1 og 1

Eksempel

Tallene 24 og 17 er indbyrdes primiske:

Divisorerne i 24 er ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±8, ±12 og ±24
Divisorerne i 17 er ±1 og ±17.
De fælles divisorer er kun ±1.

Tallene 24 og 28 er **ikke** indbyrdes primiske:

Divisorerne i 24 er ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±8, ±12 og ±24
Divisorerne i 28 er ±1, ±2, 4, 7, ±14 og ±28.
De fælles divisorer er ±1, ±2 og ±4.

Definition A2

En brøk $\frac{p}{q}$ kaldes *uforkortelig*, hvis tælleren p og nævneren q er indbyrdes primiske.

Der gælder følgende sætning om indbyrdes primiske tal. Det er ikke svært at bevise denne sætning, men vi udelader alligevel beviset.

Sætning A3

Lad p , q og r være hele tal, således at
a) p og q er indbyrdes primiske
b) p går op i produktet qr.
Så vil

p gå op i r.

Og nu til beviset for p/q-metoden:

Sætning A4 (11)

Lad $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ være et polynomium med **heltallige** koefficienter.

Hvis den uforkortelige brøk $\frac{p}{q}$ er rod i *f*, så vil

p gå op i a_0 og

q gå op i a_n

Bevis:

Vi antager, at den uforkortelige brøk $\frac{p}{q}$ er rod i *f*.

Vi skal bevise, at *p* går op i a_0 og at *q* går op i a_n.

Vi indsætter $\frac{p}{q}$ i forskriften for *f* og får

$$a_n \frac{p^n}{q^n} + a_{n-1} \frac{p^{n-1}}{q^{n-1}} + \ldots + a_2 \frac{p^2}{2^2} + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$$

$\Updownarrow$

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_2 p^2 q^{n-2} + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

For at vise, at *p* går op i a_0, omrokerer vi ligningen til

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_2 p^2 q^{n-2} + a_1 p q^{n-1} = -a_0 q^n$$

$\Updownarrow$

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \ldots + a_2 p q^{n-2} + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n$$

Det ses, at *p* går op i ligningens højreside, dvs. i $-a_0 q^n$. *p* kan af gode grunde ikke gå op i faktoren q^n, idet *p* og *q* er indbyrdes primiske. Sætning A3 fortæller da, at *p* går op i a_0.

For at vise, at *q* går op i a_n, foretager vi lignende omrokeringer:

$$a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_2 p^2 q^{n-2} + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = -a_n p^n$$

$\Updownarrow$

$$q(a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_2 p^2 q^{n-3} + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}) = -a_n p^n$$

Det ses, at *q* går op i $-a_n p^n$, og da *p* og *q* er indbyrdes primiske, så er *q* pisket til at gå op i a_n.

Facitliste:

1.1: S,F,F,F,S S,S,F,F,S S,F,F,F

1.2: a) {2,4,6,8,19} b) {2,3,5,7} c) {6} d) Ø e) {3,9} f) Ø

2.1: a) {-2,5} i alle tilfælde b) {-2,2} i alle tilfælde c) $\left\{-\sqrt{5}\,,\,\sqrt{5}\right\}$, Ø, Ø

d) Ø,Ø,Ø e) Ø,Ø,Ø f) $\mathbf{R}\backslash\{0\}$, $\mathbf{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbf{Z}\backslash\{0\}$

2.2:	a)	-3, -4	b)	$-\frac{1}{2}$	c)	$\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$	d)	5, -5
	e)	2, -2	f)	3, -3	g)	$\sqrt[3]{3}\,,\,-\sqrt[3]{5}$	h)	16
	i)	-4, -3	j)	$0\,,\,\frac{2}{3}$	k)	$\pm 2\,,\,\pm\sqrt{3}$	l)	0, ln2
2.3:	a)	-5, 1	b)	2, -2	c)	0, 6		
	d)	-5, 5	e)	10 og 3,6	f)	ingen løsninger		
2.4:	a)	2, -4	b)	2	c)	5	d)	ingen løsninger

3.2: a) 3, 4, 4, 4, 0

b)
$$x^4+6x^3-11x^2+48x-116$$
$$-x^4-4x^3+20x^2-30x-15$$
$$3x^4+15x^3+12x^2-60x-96$$
$$x^7-23x^6+205x^5-881x^4+1774x^3-932x^2-1800x+2016$$
$$x^8+10x^7+33x^6-256x^4-452x^3+119x^2+1180x+1099$$

3.3:	a)	$x-4$	-6
	b)	$x-12$	51
	c)	x^4+3x^3-5x-2	3
	d)	$x^5+6x^4+14x^3+49x^2+148x+444$	1330
	e)	$x^6-7x^5+15x^4-30x^3+37x^2-73x+143$	-287
	f)	x^2+x+1	2
3.4:	a)	$x+6$	$14x-2$
	b)	$2x^2+5x-7$	0
	c)	$2x^3+x^2+7$	$4x+3$
	d)	x^2-8x+3	$3x^2-8x-5$
	e)	x^2+3x+8	$24x^3-11x^2-23x+1$
3.5:	a)	$x^3+x^2-\frac{1}{2}x-\frac{11}{4}$	$\frac{9}{4}$
	b)	$x^3-\frac{9}{2}x^2-\frac{1}{4}x+\frac{79}{8}$	$-\frac{46}{16}$
	c)	$\frac{1}{3}x^3+\frac{10}{9}x^2+\frac{4}{27}x+\frac{151}{81}$	$\frac{442}{81}$
	d)	$x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$	$7x-3$
	e)	$-\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{4}x-\frac{13}{4}$	-14

4.1:	a)	1, 2, 3, 4	b)	$-\frac{1}{3}\,,\,\frac{2}{3}\,,\,3\,,\,\frac{1}{2}$	c)	$6\,,4\,,2$	d)	5
	e)	$0\,,-\frac{1}{3}\,,\,\frac{1}{2}\,,1$	f)	$-1,-2,2$	g)	$1, 3, \frac{1}{2}$	h)	$-1, \frac{7}{2}, \frac{1}{2}$
	i)	$-3, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$						
4.2:	a)	3, 2	b)	-1, -2, 1	c)	-1, -2, 2	d)	1, 1, 2, 3
	e)	1, 1						
4.3:	a)	$2(x-2)(x-3)(x^2+x+1)$	b)	$(x+1)(x+2)(x-1)$				

c) $(x+1)(x+2)(x-2)$ d) $(x-1)^2(x-2)^2$

e) $(x^2+1)(x-1)^2$

5.1: a) $]-\infty\,,\frac{5}{6}]$ b) $]-\infty\,,-3[$ c) $]-\infty\,,-1[$ d) $]-\infty\,,2]$

5.2: a) $]-2\,,\frac{8}{3}[$ b) $]-\infty\,,\frac{2}{3}[$ c) Ø

d) Ø e) **R** f) Ø

5.3: a) $]-\infty,1[\,\cup\,]1{,}5\,,\infty[$ b) $]-\infty,1[\,\cup\,]1{,}5\,,\infty[$ c) $[-3,0]\cup[2,\infty[$

d) $]-\infty,-1]\cup[0,4[$ e) $]-\infty,-1]\cup]0,4]$ f) $]-\infty,-1[\,\cup\,]0,4]$

g) $]-5,\frac{4}{3}[$ h) $]\frac{8}{5},\frac{5}{3}[$

5.4: a) $]-\frac{7}{3},1[$ b) $\{2\}$ c) Ø d) **R**

5.5: a) $]-\infty,\frac{2}{3}[$ b) $]-\infty,\frac{7}{3}[$ c) $\{2\}$

d) $]-7,\frac{7}{3}[$ e) $]2,3[\,\cup\,]6,7[$ f) **R**

6.1: a) pos. i $]\frac{-3-\sqrt{45}}{2},0[\,,\,]0,\frac{-3+\sqrt{45}}{2}[$ neg. i $]-\infty,\frac{-3-\sqrt{45}}{2}[\,,\,]\frac{-3+\sqrt{45}}{2},\infty[$

nul i 0, $\frac{-3\pm\sqrt{45}}{2}$

b) pos i $]-\infty,0[\,,\,]1,\infty[$ neg i $]0,1[$ nul i 0 og 1

c) pos i $]-\infty,-3[\,,\,]2,3[$ neg i $]-3,2[\,,\,]3,\infty[$ nul i -3, 3, 2

d) pos i $]-\infty,-3[\,,\,]3,\infty[$ aldrig neg nul i 3, -3

e) pos i $]0,e^{-3}[\,,\,]e^3,\infty[$ neg i $]e^{-3},e^3[$ nul i $e^{-3}\,,e^3$

f) pos i $]-\infty,-\sqrt{17}[\,,\,]\sqrt{17},\infty[$ neg i $]-\sqrt{17},-4[\,,\,]4,\sqrt{17}[$ nul i $-\sqrt{17}\,,\sqrt{17}$

g) pos i $]-\infty,1[\,,\,]1,\infty[$ aldrig neg nul i 1

8.1: a) $y=0$ b) $y=0$ c) $y=4$

d) $y=x+8$ e) $y=3x-9$ f) ingen

g) $y=x+2\,,\,y=3$ h) ingen i) $y=2x+3\,,\,y=4x$

9.1: a) $x=-3$ b) $x=0$ c) $x=0\,,\,x=-3$

d) $x=6$ e) $x=0\,,\,x=-3$ f) $x=8$

g) ingen h) ingen i) ingen

9.2: $y=x-2$ $x=2$

9.4: Nej. der er 3 vandrette/skrå asymptoter, og der må kun være to.

9.5: a) pos i $]-\infty,-3[\,,\,]-2,3[$ neg. i $]-3,-2[\,,\,]3,\infty[$ nul i -2

$y=0$ $x=3$ $x=-3$

b) pos i $]-\infty,0[\,,\,]0,2[$ neg i $]2,\infty[$ nul i 2

$y=0$ $x=0$

c) pos i $]-\infty,1[\,,\,]1,\infty[$ aldrig neg. eller nul $y=x-1$

d) pos i $]-\infty,-2[\,,\,]-2,1[\,,\,]2,\infty[$ neg i $]1,2[$ nul i 2

ingen asymptoter

Kapiteloversigt

Polynomier

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ Polynomium

a er rod i f $\Leftrightarrow$ $f(a) = 0$

a er rod i f $\Leftrightarrow$ $f(x) = (x - a)k(x)$ Divisionen går op!

$\frac{p}{q}$ er rod i f, f har kun heltallige koefficienter $\Rightarrow$

p går op i a_0 og q går op i a_n

Et polynomium af grad n har højst n rødder.

a er en multipel rod i f $\Leftrightarrow$ $f(a) = f'(a) = 0$

Asymptoter:

Den rationale funktion $f(x) = \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$ har asymptoterne:

$y = 0$,	hvis $m > n$	
$y = \dfrac{a_n}{b_m}$,	hvis $m = n$	
$y = ax + b$,	hvis $n = m + 1$	(brug polynomiers division for at finde ligningen)
$x = a$,	hvis a er rod i nævneren, og her har større multiplicitet end som rod i tælleren	