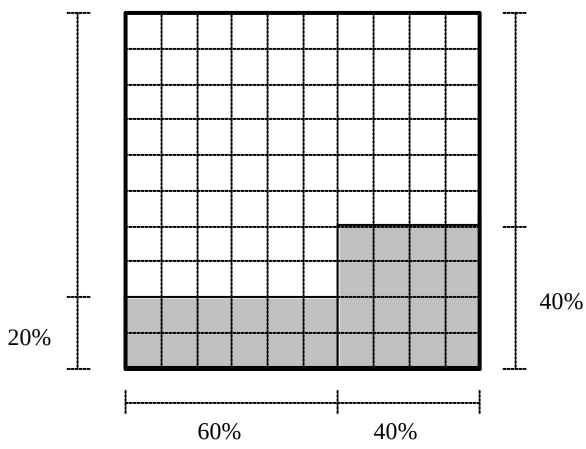
Matematikkens mysterier

- på et obligatorisk niveau

af

Kenneth Hansen

6. Matematik og økonomi



Hvor udbredt er vaskepulveret af typen A?

6. Matematik og økonomi

Indhold

Titlen til dette hæfte er måske lidt prætentiøs. 'Matematik og økonomi' handler mest om, hvorledes man regner med procenttal og renter, og hvorledes man kan behandle forskellige lån- og opsparingstyper matematisk.
Men sidst i hæftet skal du have en forsmag på *lineær programmering*. Dette er en metode til at løse visse problemer, som anvendes utroligt meget ude i den virkelige verden.

God arbejdslyst!

6.1 Procenttal

Procenttal er en ofte benyttet måde at angive forhold på. Ordet *procent* kommer fra latin og betyder hundrededele.

Eksempel

Thomas' mor har et blomsterbed med 40 blomster. En dag river Thomas 12 af blomsterne op.
Hvor mange procent af blomsterbedet har Thomas ødelagt?

Svaret er, at den brøkdel af blomsterne, Thomas har ødelagt, er

$$\frac{12}{40} = 0{,}3$$

For at få angivet denne brøkdel i procent, så skal vi gange med 100%:

$$0{,}3 = 0{,}3 \cdot 100\% = 30\%$$

Man skal her tænke på, at $100\% = 1$ - der går jo 100 hundrededele på 1.

Når man angiver f.eks. stigninger eller fald i procent, så skal man passe lidt på:

Eksempel

Hansen er den lykkelige ejer af to aktier - en i Matmyst A/S og en i Mytmast A/S. Begge har en pålydende værdi på 10000 kr, og begge er nede i kurs 60.

Hvor meget er hver aktie værd?

Svar: Kurs 60 betyder, at aktierne i dag kan sælges til 60% af deres pålydende værdi. Hver af aktierne er altså

$$60\% \cdot 10000 = 0{,}60 \cdot 10000 = 6000 \text{ kr. værd.}$$

Aktien i Matmyst A/S stiger nu 10 points (eller 10 procentpoints). Hvad er den nu værd?

Svar: En stigning på 10 points betyder, at kursen stiger med 10 fra 60 til 70. Aktien er altså

$$70\% \cdot 10000 = 0{,}70 \cdot 10000 = 7000 \text{ kr værd.}$$

Aktien i Mytmast A/S stiger med 10%. Hvor meget er den nu værd?

Svar: En stigning på 10% betyder, at aktiens værdi nu er $100\% + 10\% = 110\%$ af den gamle værdi. Aktien er altså

$$110\% \cdot 6000 = 1{,}10 \cdot 6000 = 6600 \text{ kr værd.}$$

Opgaver

1.1 Omskriv nedenstående procenttal til decimaltal:

a)	45%	b)	17%	c)	72,4%	d)	0,16%
e)	0,01%	f)	1,01%	g)	192%	h)	0,0001%

Omskriv nedenstående decimaltal til procenttal:

i)	0,02	j)	0,352	k)	0,0352	l)	1,01
m)	0,101	n)	90	o)	1	p)	2

1.2 a) Hvor mange procent udgør 300 af 6000 ?
b) Hvor mange procent udgør 19 af 210 ?
c) Hvor meget er 15% af 230 ?
d) Hvor meget er 190% af 0,1 ?

1.3 En aktie med pålydende 50000,- ligger i kurs 140. Hvor meget er aktien værd?
Kursen siger nu med 40 points. Hvor meget er aktien nu værd?
Hvor mange procent af aktiens værdi udgjorde stigningen?

1.4 På Pladderballe Gymnasium er 25% af eleverne sproglige, 40% af eleverne matematikere og 35% af eleverne HF'ere. Der er 60 matematikere.
Hvor mange elever er der i alt?
Hvor mange sproglige og HF'ere er der?

1.5 Matematiklæreren kommer ind i 1.u og siger bistert: "I er så dumme, at 90% af jer dumper til eksamen!", hvorefter en elev udbryder med forbløffelse i stemmen: "Jamen, vi er jo kun 22 elever!"
Hvorfor er dette morsomt?

6.2 Vejet gennemsnit

Vejede gennemsnit bruges i forbindelse med nedenstående problemstillinger:

Eksempel

I 1.x har man undersøgt, hvor mange søskende, hver enkelt elev har. Resultatet er angivet i nedenstående tabel:

Antal	0	1	2	3
%-del	30 %	40 %	20 %	10 %

Her står at læse, at f.eks. 20 % af eleverne har to søskende.

Hvad er det gennemsnitlige antal søskende?

For at regne dette ud, skal man udregne det *vejede gennemsnit*:
$0 \cdot 30\% + 1 \cdot 40\% + 2 \cdot 20\% + 3 \cdot 10\% = 1{,}1$
Hver elev har altså i gennemsnit 1,1 søskende.

I ovenstående gennemsnit kaldes procentdelene for de *vægte*, hvormed antal søskende skal medregnes. F.eks. indgår antallet 2 søskende med vægten 20% i det vejede gennemsnit.

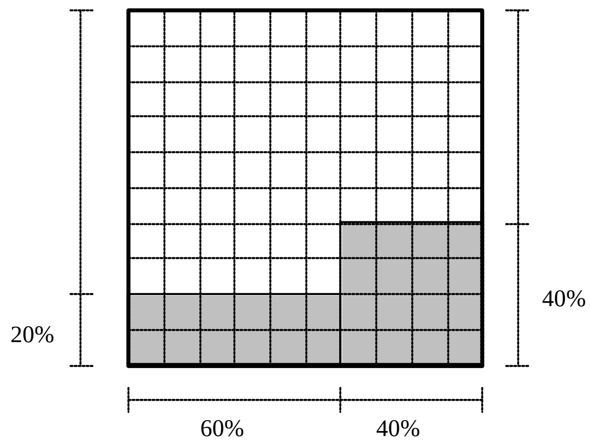
Lidt mere kringlet bliver det i problemer af typen nedenfor:

Eksempel

Et vaskepulverfirma har lavet en forbrugerundersøgelse. Af den fremgår det, at 60% af de danske husmødre (som firmaet kalder sin målgruppe) er over 40 år, og at 20% af disse husmødre over 40 år bruger firmaets vaskepulver. Endvidere bruger 40% af husmødrene under 40 år firmaets vaskepulver.
Firmaet spørger nu sig selv:

a) Hvor stor en del af Danmarks husmødre benytter vort vaskepulver?
b) Hvor stor en del af vores forbrugere udgør de husmødre, som er under 40 år ?

For at kunne besvare disse spørgsmål, er det nemmest at lave et *kassediagram.* Dette diagram repræsenterer i dette tilfælde alle husmødre i Danmark, og forskellige procentdele heraf repræsenteres ved arealer af forskellig størrelse.
Kvadratet er inddelt i 10x10 felter - hvert felt repræsenterer altså 1 % af den totale husmodermængde.



Heraf ses, at i alt

$$20\% \cdot 60\% + 40\% \cdot 40\% = 28\%$$

af husmødrene bruger firmates vaskepulver.

Endvidere udgør husmødre under 40 år procentdelen

$$\frac{40\% \cdot 40\%}{28\%} = \frac{16\%}{28\%} \approx 0{,}571 = 57{,}1\%$$

af firmates forbrugerskare.

Opgaver

2.1 På Pladderballe Gymnasium har man undersøgt elevernes rygevaner. Det viser sig, at 47% af pigerne og 26% af drengene ryger. Endvidere er 55% af eleverne piger.

Hvor mange procent af eleverne på skolen ryger?

Hvor stor en procentdel af rygerne udgør pigerne?

2.2 I det lokale supermarked forhandler man kun to slags vaskepulver, A og B. I 30% af pakkerne med vaskepulver A er der klistermærker, mens der i pakkerne med B er klistermærker i hele 70%.

35 % af supermarkedets beholdning af vaskepulver udgøres af pakkerne med pulver A.

Hvor stor en procentdel af pakkerne i supermarkedet indeholder klistermærker?

Hvor stor en procentdel af klistermærke-pakkerne udgør pakkerne med pulver A?

6.3 Kapitalfremskrivning

Den generelle problemstilling indenfor kapitalfremskrivning er:

> En person indsætter k_0 kroner på en konto. På denne konto tilskrives der renter en gang pr. termin. Rentesatsen er r. Hvor mange penge, k_n, står der på kontoen efter n terminer?

Fra hæftet 'Exp, pot og log' kender vi allerede svaret - fremskrivningsfaktoren, som er den faktor, beløbet på kontoen skal ganges med for at komme fra en termin til den næste, er jo $a = 1 + r$. Efter n terminer er beløbet på kontoen derfor

(1) $$k_n = k_0 \cdot (1+r)^n$$

Denne formel kaldes *renteformlen* eller *kapitalfremskrivningsformlen*.

Ovenfor brugte vi ordet *termin*. Indenfor finansverdenen er en termin perioden mellem hver rentetilskrivning. Tilskrives der f.eks. rente hver måned, så er terminen lig en måned, og rentesatsen r i formlen er den månedlige rente.

Vi giver et par eksempler på anvendelse af denne formel:

Regnede opgaver

Opgave: Niels indsætter 1000 kr. på en konto med årlig rente på 10%. Hvor meget står der på kontoen efter 5 år?

Svar: Renteformlen giver

$$k_5 = 1000 \cdot (1+10\%)^5 = 1000 \cdot 1{,}10^5 = 1610{,}51$$

Der står altså 1610,51 kr. på kontoen efter 5 år.

Opgave: Jens får til sin 18 års fødselsdag en bankbog af sin grandtante. På bankbogen står der 4813,24 kr, den årlige rente er 5%, og grandtante Olga indsatte det oprindelige beløb, da Jens blev født. Hvor meget indsatte grandtante Olga?

Svar: Vi skal finde k_0 i renteformlen. $n = 18$, $k_{18} = 4813{,}24$ og $r = 5\%$, så dette kan gøres ved at omskrive renteformlen lidt:

$$k_{18} = k_0 \cdot (1+r)^{18} \quad \Leftrightarrow \quad k_0 = \frac{k_{18}}{(1+r)^{18}}$$

Indsættes vores tal, så fås

$$k_0 = \frac{4813{,}24}{(1+0{,}05)^{18}} = 2000{,}00$$

Grandtante Olga startede altså med at indsætte 2000,00 kr.

Opgave: I en reklame for en "Yngle-Penge-konto" lover Doggerbanken, at "1000 kroner bliver til 3000 kroner på kun 20 år". Hvor meget giver Doggerbanken i årlig rente på en sådan konto?

Svar: Vi skal nu finde r i renteformlen:

$$k_n = k_0 \cdot (1+r)^n \iff (1+r)^n = \frac{k_n}{k_0} \iff 1+r = \sqrt[n]{\frac{k_n}{k_0}} \iff$$

$$r = \sqrt[n]{\frac{k_n}{k_0}} - 1$$

Indsættes værdierne $k_0 = 1000$, $k_{20} = 3000$ og $n = 20$, så fås

$$r = \sqrt[20]{\frac{3000}{1000}} - 1 \approx 0{,}0564 = 5{,}64\%$$

Den årlige rente er altså på ca. 5,64%.

Opgave: Hvor lang går der, før 1 krone er vokset til 1000000 kroner, når den årlige rente er 1%.

Svar: Her skal vi finde n. Dette gøres vha. logaritmer:

$$k_n = k_0 \cdot (1+r)^n \iff (1+r)^n = \frac{k_n}{k_0} \iff$$

$$\log((1+r)^n) = \log(\frac{k_n}{k_0}) \iff n\log(1+r) = \log(\frac{k_n}{k_0}) \iff$$

$$n = \frac{\log(k_n / k_0)}{\log(1+r)}$$

Indsættes de relevante værdier, så fås

$$n = \frac{\log(1000000/1)}{\log(1+0{,}01)} = 1157{,}03$$

Det varer altså godt 1157 år, får vi får en million kroner ud af en krone!

Alle disse regnerier minder uhyggeligt meget om regnerierne omkring eksponentielle udviklinger. Og dette er ikke noget tilfælde - renteformlen siger jo netop, at kapitalen k_n vokser eksponentielt med fremskrivningsfaktoren $a = 1+r$.

Tit og ofte kommer man ud for, at rentesatserne ikke er konstante, men varierer fra termin til termin. Her kan det betale sig at snakke om den *gennemsnitlige rente*.

Eksempel

På en bankkonto er renten 3%, 5%, 2% og 6% i løbet af de fire første år. Hvor stor var den gennemsnitlige rente?

Med den gennemsnitlige rente forstås den rentesats som ville give der samme indestående som ovenstående, men hvor rentesatsen er konstant. For at finde denne, forestiller vi os, at vi indsætter f.eks. 100 kr. på kontoen.

I løbet af de fire første år trækker de 100 kr. renter og vokser til

$$100 \cdot (1+3\%) \cdot (1+5\%) \cdot (1+2\%) \cdot (1+6\%)$$

Var rentesatsen konstant lig med r, så skulle indestående ifølge renteformlen være $100 \cdot (1+r)^4$. Sætter vi disse indeståender lig hinanden, så fås

$$100 \cdot (1+3\%) \cdot (1+5\%) \cdot (1+2\%) \cdot (1+6\%) = 100 \cdot (1+r)^4$$

eller

$$1+r = \sqrt[4]{(1+3\%)(1+5\%)(1+2\%)(1+6\%)} = 1{,}0398$$

Den gennemsnitlige rente var altså på 3,98%.

Bemærk, at startbeløbet på 100 kr. ikke betød noget for selve udregningen. Derfor undlader man normalt at anvende et startbeløb, men regner direkte på fremskrivningsfaktorerne.

Ovenstående eksempel giver anledning til følgende definition:

Definition 2

Den gennemsnitlige rente r af de n rentesatser

$$r_1 \,,\, r_2 \,,\, r_3 \,,\, \ldots \,,\, r_n$$

er bestemt ved

$$1+r = \sqrt[n]{(1+r_1)(1+r_2)(1+r_3)\ldots(1+r_n)}$$

Bemærk, at der er forkert bare at tage gennemsnittet af rentesatserne - der er jo tale om 'gangevækst' ved kapitalfremskrivning, ikke om 'plusvækst'

Opgaver

3.1 I nedenstående skema forestiller man sig, at kapitalen k_0 indsættes i n terminer til rentesatsen r, hvorefter kapitalen er vokset til k_n. Udfyld de tomme felter:

k_0	r	n	k_n
2000	3%	12	
3500	1,25%	14	
	0,6%	4	500
	11%	18	1000000
100		10	1000
4000		4	7500
800	25,6%		2500
2000	7,4%		12000
100		14	1000
4000	15,7%		9600

3.2 Doggerbanken har netop lavet en ny kontoform, hvor renten det første år er 2%, renten den næste år er steget til 4 %, og fra det tredie år og fremover er rente på 7%.

Hvor stor er den gennemsnitlige rente i løbet af de første 5 år.

3.3 Firmaet Matmyst A/S's indtjening voksede i 1990 med 5%, i 1991 med 3%, men i 1992 faldt indtjeningen med 10%.

Hvor stor var den gennemsnitlige vækst i indtjeningen i løbet af denne periode på 3 år?

6.4 Annuitetsopsparing

Mange opsparingsformer, f.eks. bolig- og børneopsparinger og kapitalpensioner, er såkaldte *annuitetsopsparinger*. Disse er karakteriseret ved, at man hver termin indbetaler det samme beløb, *ydelsen*, på opsparingen.

Vi vil finde en formel, som beskriver sammenhængen mellem ydelsen og opsparingens værdi efter n terminer. For at kunne gøre dette har vi brug for en hjælpesætning:

Sætning 3

Lad $a \neq 1$, og lad n være et helt, positivt tal. Så er summen

$$s_n = 1 + s + s^2 + s^3 + \ldots + s^n$$

lig med udtrykket

$$s_n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Bevis:

Vi har

$$s_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n$$

og derfor

$$as_n = a(1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n) = a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n+1}$$

Trækker vi disse to udtryk fra hinanden, så fås

$$as_n - s_n = (a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n+1}) - (1 + a + a^2 + \ldots + a^n) = a^{n+1} - 1$$

idet alle leddene æder hinanden på nær leddet 1 og a^{n+1}. Vi har altså

$$as_n - s_n = a^{n+1} - 1$$

eller

$$s_n(a-1) = a^{n+1} - 1,$$

hvilket giver formlen.

Bemærk, at denne formel **ikke** gælder, når $a = 1$.

Vi kan nu udlede *annuitetsopsparingsformlen*:

Sætning 4

I en annuitetsopsparing med rentesatsen r og ydelsen y er værdien af opsparingen A_n efter n terminer givet ved

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Bevis:

For simpelheds skyld skriver vi $a = 1+r$.
Den første termin indsætter vi y kroner, dvs. $A_1 = y$.
Disse penge trækker renter til næste termin, hvor vi igen indsætter y kroner. Derfor er $A_2 = a \cdot A_1 + y = ay + y$.
Dette beløb trækker igen renter, og igen indsætter vi y kroner. Derfor gælder, at

$$A_3 = aA_2 + y = a(ay + y) + y = a^2 y + ay + y.$$

Dette fortsætter indtil den n'te termin, hver der så står

$$A_n = a^{n-1}y + a^{n-2}y + \ldots a^3 y + a^2 y + ay + y.$$

Sætter vi y udenfor en parentes, og benytter vi hjælpesætningen 3, så fås

$$A_n = y(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^3 + a^2 + a + 1) = y\frac{a^n - 1}{a-1}$$

Idet vi husker på, at $a = 1+r$, så fås endelig

$$A_n = y\frac{(1+r)^n - 1}{1+r-1} = y\frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Eksempel

En boligopsparing oprettes 1. januar 1990. Det månedlige indskud er 200,-, og den månedlige rente er 1,2%. Hvor meget står der på boligopsparingen 1. januar 1995?

Idet opsparingen løber over 5 år à 12 måneder, så er $n = 60$.
Annuitetens værdi er derfor

$$A_{60} = 200 \cdot \frac{(1+0,012)^{60} - 1}{0,012} = 17427,45$$

Dette skal sammenlignes med, at der i alt er indsat $60 \cdot 200 = 12000$ kroner på kontoen.

Eksempel

Mette vil gerne købe en hest. Sådan en koster 10000 kroner. Hun kan spare 500 kroner op om måneden. Hun sætter sine penge ind på en opsparingskonto, som giver 0,5 % i rente om måneden. Hvornår har Mette råd til at købe sin hest?

Her skal terminsantallet n bestemmes, således at $A_n = 10000$. Vi isolerer n i annuitetsopsparingsformlen:

$$A_n = y\frac{(1+r)^n - 1}{r} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A_n r}{y} = (1+r)^n - 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$(1+r)^n = \frac{A_n r}{y} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad n\log(1+r) = \log\left(\frac{A_n r}{y} + 1\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$n = \frac{\log(A_n r / y + 1)}{\log(1+r)}$$

De kendte størrelser indsættes

$$n = \frac{\log(10000 \cdot 0{,}005 / 500 + 1)}{\log(1 + 0{,}005)} \approx 139{,}0$$

Mette kan altså først købe sin hest efter 139 måneder.

Opgaver

4.1 Beregn følgende summer vha. formlen i sætning 3:

a) $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots + 2^{11} + 2^{12}$

b) $4^0 + 4^1 + 4^2 + \ldots + 4^{15}$

c) $1{,}01^0 + 1{,}01^1 + 1{,}01^2 + \ldots + 1{,}01^{1000}$

d) $1^0 + 1^1 + 1^2 + \ldots + 1^{99}$

4.2 I nedenstående tabel er det tale om en annuitetsopsparing med ydelsen y, renten r, antal terminer n og annuitetens endelige værdi A_n. Udfyld tabellen.

y	r	n	A_n
200	11%	10	
1000	6%	4	
2100	3%	20	
	8%	30	1000000
	2%	10	50000
	13%	6	8000
250	13%		1620
200	17%		26007
2000	8,3%		29389
150	5,6%	15	
	3,2%	9	8900
1105	7,2%		20000

4.3 Den 1/1 1980 opretter Helles forældre en børneopsparing. Den årlige rente er på 9%, og der indbetales 1000 kr. om året.

a) Hvor meget står der på børneopsparingen efter 10 år?

Herefter henstår børneopsparingen uden indskud, men til samme rente, i 8 år.

b) Hvor mange penge står der nu på kontoen?

c) Hvor stor en del af indestående på konto efter de 18 år er renter?

4.4 Doggerbanken har to forskellige former for uddannelsesopsparinger. I den første form indskydes 2000 kr. årligt i 18 år. I den anden form indskydes 4000 kr. årligt i 9 år, hvorefter pengene står uden at blive rørt i endnu 9 år. Renten er i begge tilfælde på 7,5%.

a) Hvor mange penge ville der stå på en konto, som følger den første form?

b) Hvor mange penge ville der stå på en konto, som følger den anden form?

c) Hvorfor står der flere penge på kontoen i b) end den i a) - man har jo indbetalt det samme beløb?

6.5 Annuitetslån

Annuitetslån er i en vis forstand det modsatte af annuitetsopsparinger. Ved et annuitetslån låner man en vis mængde penge, kaldet *grundstolen*. Man afdrager så lånet ved at betale det samme beløb, *ydelsen*, hver termin, indtil lånet er indfriet. Dette tager et antal terminer, kaldet lånets *løbetid*.

Vi starter med at finde en formel, som beskriver annuitetslån:

Sætning 5

For et annuitetslån med grundstolen G, ydelsen y, løbetiden n terminer og rentesats r (pr. termin), gælder

$$G = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

Bevis:

For at bevise denne formel skal man lave et lille kunstgreb. Man skal forestille sig, at banken, når den får ydelserne tilbage, ikke bruger pengene til at afdrage på lånet, men i stedet sætter dem ind på en annuitetsopsparing.

Banken har altså to konti: Den oprindelige lånkonto, hvor kunden lånte beløbet G, og som der ikke sker mere med, og en annuitetsopsparing, hvor der hver termin indsættes ydelsen y. Begge konti forrentes naturligvis med rentesatsen r.

Efter n terminer er lånet indfriet. Til dette tidspunkt står der på den oprindelige lånkonto beløbet

$G \cdot (1+r)^n$ (renteformlen)

og på annuitetsopsparingen

$y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ (annuitetsopsparingsformlen)

Banken taber jo ikke penge på dette, så derfor må de to beløb være ens:

$$G \cdot (1+r)^n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

$$\Updownarrow$$

$$G = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r \cdot (1+r)^n} = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

hvilket viser formlen.

Afbetalingsordninger er typisk annuitetslån:

Eksempel

Mette er blevet træt af at vente på at få råd til en hest. I stedet køber hun en på afbetaling. Prisen er stadigvæk 10000 kroner, og sælgeren kræver en kontant udbetaling på 1200 kroner. Renten for afbetalingslånet er 10% pr. halvår, og afbetalingen skal løbe over 5 år.
Hvor mange penge skal Mette slippe pr. halvår?

For at besvare dette spørgsmål, dvs. finde ydelsen y, skal vi bruge annuitetslånsformlen. I denne er

$r = 10\% = 0{,}10$

$n = 10$ (løbetiden er 5 år = 10 halvår)

og

$G = 10000 - 1200 = 8800$

G er jo det beløb, som lånes, og som der skal betales renter af.

Indsættes i formlen fra sætning 4, så fås

$$G = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \quad \Leftrightarrow \quad y = G \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$$

og

$$y = 8800 \cdot \frac{0{,}10}{1-(1+0{,}10)^{-10}} = 1432{,}16$$

Mette skal altså afbetale 1432,16 kr. hvert halve år.

I alt kommer Mette til at betale

$$1200 + 10 \cdot 1432{,}16 = 15521{,}60$$

for hesten.

I din tabelsamling finder der tabeller over både annuitetsopsparinger og annuitetslån. Disse er normalt ikke til meget nytte - det er meget nemmere at regne størrelserne

$$\frac{(1+r)^n - 1}{r} \qquad \text{og} \qquad \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

ud direkte på lommeregneren.

Kun når man skal finde renten r, kan tabellerne bruges med fordel. Det er nemlig umuligt at isolere r i formlen i sætning 5. Vi giver et eksempel:

Eksempel

En radiobutik tilbyder at sælge et stereoanlæg på afbetaling. Kontantprisen er 2540 kr., udbetalingen er 112 kr., den månedlige ydelse er 110 kr., og afbetalingen skal løbe over 48 måneder.
Hvor stor er den månedlige rente med 1 decimal?

For at besvare dette skal vi først identificere de forskellige størrelser:

$$G = 2540 - 112 = 2428$$
$$y = 110$$
$$n = 48$$

Vi ved altså, at

$$\frac{1-(1+r)^{-48}}{r} = \frac{G}{y} = \frac{2428}{110} = 22,0727$$

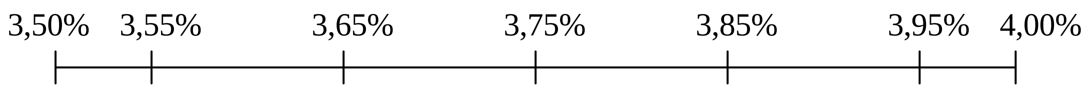
I tabellen søger vi nu efter dette tal ud for rækken, hvor $n = 48$. Vi kan ikke direkte finde tallet 22,0727, men vi finder de to nærmeste tal:

Når $r = 3{,}50\%$, så er $\frac{G}{y} = 23{,}0912$, og

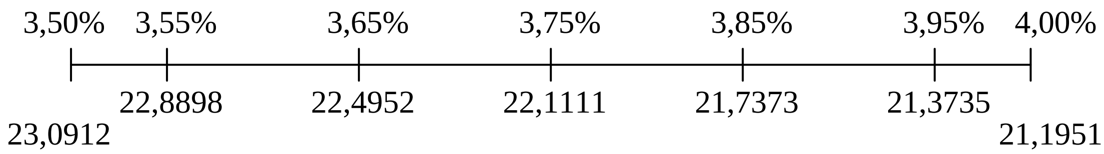
når $r = 4{,}00\%$, så er $\frac{G}{y} = 21{,}1951$.

Renten ligger derfor imellem 3,50% og 4,00%, og er nok nærmere ved 4,00% end ved 3,50%.

Betragt nu nedenstående tallinie:



Her er intervallet $\left[3{,}50\% \,;\, 4{,}00\%\right]$ opdelt i de delintervaller, hvori man afrunder til en decimal. F.eks. vil samtlige tal i intervallet $\left[3{,}75\% \,;\, 3{,}85\%\right[$ blive afrundet til 3,7%.
Vores opgave er nu at finde placeringen af r på denne tallinie. For at kunne dette beregner vi $\frac{G}{y} = \frac{1-(1+r)^{-48}}{r}$ for alle tallene på tallinien. Resultatet bliver



Heraf kan man se, at renten r må ligge mellem 3,75% og 3,85%. Med en decimal er renten derfor 3,7% pr. måned.

Det er normalt ikke nødvendigt at udregne alle $\frac{G}{y}$-værdierne, bare nok til, at man kan spærre lånets $\frac{G}{y}$-værdi inde mellem to 'afrundingspunkter'.

Opgaver

5.1 I nedenstående tabel er der tale om et annuitetslån med ydelsen *y*, grundstolen *G*, antal terminer *n* og renten *r*. Udfyld skemaet.

G	*n*	*r*	*y*
120000	8	9%	
50000	16	12%	
80000	48	2%	
	24	7%	1000
	10	14%	200
	7	3,2%	224,31
8000		13%	2001,23
9000		2%	352,80
6000		3%	436
	4	11%	2000

5.2 Michael vil købe en knallert på afbetaling. Kontantprisen er 14999 kr, og der kræves en udbetaling på 1500 kr. Den månedlige ydelse er 2407,60 kr., og der skal afdrages over 6 måneder.

Bestem den månedlige rente med en decimal.

5.3 En vare koster ved kontantkøb 3740 kr. To forretninger tilbyder varen på afbetaling.

I forretning A forlanges 740 kr. i udbetaling, og restbeløbet betales med en fast månedlig ydelse i 24 måneder. Renten er 1,2 % pr. måned.

Bestem den månedlige ydelse ved denne afbetalingsordning.

I forretning B forlanges en udbetaling på 1000 kr., og restbeløbet betales over 18 måneder med 173,25 kr. pr. måned.

Bestem, i hvilken af de to forretninger den månedlige rente (i procent) er størst.

6.6 Indextal

I økonomiske sammenhænge har man ofte brug for at vide, hvorledes en størrelse har udviklet sig gennem årene. Dette kunne f.eks. være udviklingen i priser på sommerhuse i perioden 1971-1975.
En måde at beskrive denne udvikling på er at tage prisen på et typisk sommerhus og så tabellere priserne for dette sommerhus gennem årene:

1971	1972	1973	1974	1975
140000	166600	214200	256200	273000

Dette er jo ikke specielt overskueligt, og endvidere er det jo ikke alle sommerhuse, som koster 140000 kr.

En bedre idé er at udregne **forholdene** mellem sommerhuspriserne. Man kan f.eks. nøjes med at angive forholdet mellem sommerhusprisen i år n og i år 1971. Dette giver nedenstående tabel:

1971	1972	1973	1974	1975
1	1,19	1,53	1,83	1,95

Dette er meget bedre, men alligevel ikke helt godt. Bl.a. er det irriterende, at der er så mange decimaltal. Man ganger derfor alle forholdene med 100 og kalder dem *indextal*.

1971	1972	1973	1974	1975
100	119	153	183	195

Dette gælder helt generelt:

> Når man skal beskrive en udvikling af en størrelse, så vælger man et basisår. Indextallet for et givet år er da størrelsen i året divideret med størrelsen i basisåret ganget med 100:
>
> $$\text{indextal} = \frac{\text{størrelse i år } n}{\text{størrelse i basisår}} \cdot 100$$

Hvordan kan dette anvendes?

Eksempel

Opgave: Et sommerhus kostede i 1972 89000 kr. Hvad kostede det i 1974?

Svar: Her skal vi tage indextallet for 1974, dividere med indextallet for 1972 og gange med prisen i 1972:

$$\text{pris i } 1974 = \frac{183}{119} \cdot 89000 = 13685{,}55$$

Opgave: Et sommerhus kostede i 1973 165000 kr og i 1977 282550 kr. Bestem indextallet for 1977.

Svar:
$$\text{index for } 1977 = \frac{282550}{165000} \cdot 153 = 262$$

(Tallet 153 er indexet for 1973)

Der er en tæt sammenhæng mellem indextal og vækstrater:

Eksempel

Indextallet for sommerhuspriserne (med 1971 som basisår) var for 1978 lig 315 og 1979 lig 361. Bestem væksten i sommerhuspriser fra 1978 til 1979.

Dette er nemt nok - *fremskrivningsfaktoren a* for sommerhuspriserne er netop de to indextal divideret med hinanden:

$$a = \frac{361}{315} \approx 1{,}146$$

Fratrækkes dette tal 1, så ses, at sommerhuspriserne er steget med 14,6%.

Opgaver

6.1 Det såkaldte *forbrugerprisindex* er en måde at angive, hvorledes den gennemsnitlige pris på en række dagligvarer udvikler sig. I tabellen nedenfor er angivet forbrugerprisindexet for perioden april 1984 til marts 1985. Prisindexet for 1980 er sat til 100.

april 84	maj	juni	juli	august	september
138,0	139,5	140,2	139,9	140,6	141,5
oktober	november	december	januar 85	februar	marts
142,1	143,0	142,8	143,2	144,8	145,3

Besvar følgende spørgsmål:

a) I to måneder var der tale om et fald i forhold til prixindexet måneden før. Hvilke?

b) Hvad var prisen i januar 1985 for en vare, som kostede 143 kr i maj 1984?

c) En vare kostede i august 1984 208 kr og i april 1985 216 kr. Bestem prisindexet for april 1985.

d) Med hvor mange procent steg priserne fra juni 1984 til oktober 1984?

e) Hvor stor var den gennemsnitlige prisstigning pr. måned fra juni 1984 til oktober 1984?

f) Hvor stor var den årlige prisstigning fra april 1984 til april 1985? (Brug svaret fra c).

g) Giv på grundlag af svaret til f) en prognose for forbrugerprisindex i april 1990.

6.7 Lineær programmering

Indenfor driften af virksomheder kommer man ofte ud for en bestemt type problemer - man skal maksimere indtjeningen, men samtidigt er der nogle betingelser, f.eks. leverancen af råvarer, arbejdskraft, osv., som skal overholdes. Sådanne problemer kan ofte formuleres som problemer indenfor *lineær programmering*.

Eksempel

En bager har 150 kg mel, 22 kg sukker og 25 kg smør. Han har to opskrifter, en på basser og en på linser. For at bage et dusin basser skal han bruge 3,0 kg mel, 1,0 kg sukker og 1,2 kg. smør. For at bage et dusin linser skal han bruge 5,0 kg mel, 0,5 kg sukker og 0,5 kg smør. Fortjenesten på et dusin basser er 20 kr., og fortjenesten på et dusin linser er 30 kr.
Hvordan skal bageren tilrettelægge sin produktion, således at hans indtjening bliver størst mulig?

Som det første skridt i at løse dette problem indfører vi noget notation:

$x =$ antal dusin basser, bageren skal bage
$y =$ antal dusin linser, bageren skal bage

Bagerens indtjening K afhænger altså af x og y på følgende måde:

$$K(x, y) = 20x + 30y$$

Bogstavet K skyldes, at denne funktion kaldes *kriteriefunktionen*.
(Teknisk set er K en funktion af **to** variable, men det er mindre vigtigt i øjeblikket).

De betingelser, som bagerens råvarelager lægger på x og y er:

$x \geq 0$ (man kan ikke bage et negativt antal basser)
$y \geq 0$ (man kan ikke bage et negativt antal linser)
$3x + 5y \leq 150$ (mel)
$x + 0{,}5y \leq 22$ (sukker)
$1{,}2x + 0{,}5y \leq 25$ (smør)

Disse fem betingelser afgrænser tilsammen et område, hvori de mulige værdier for x og y kan ligge - man taler om kriteriefunktionens *rådighedsområde*.

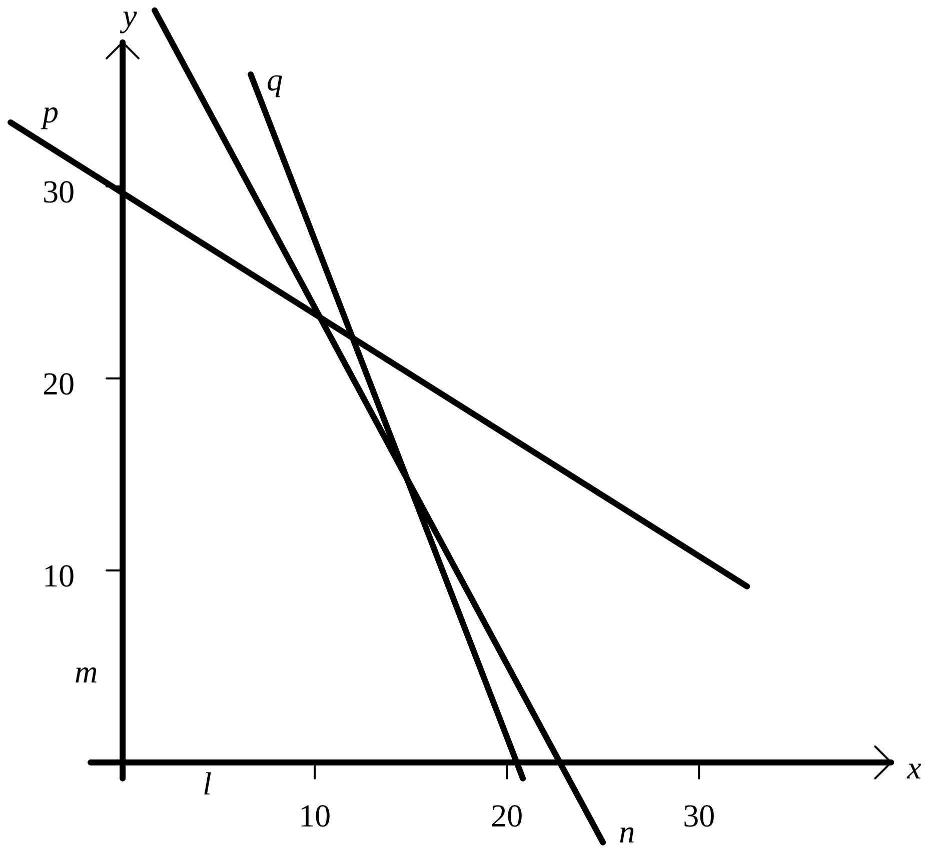
Lad os tegne dette rådighedsområde:

I et koordinatsystem tegner man først linierne med ligningerne

$l\ :\ x = 0$ $\qquad$ $m\ :\ y = 0$ $\qquad$ $n\ :\ 3x + 5y = 150$

$p\ :\ x + 0{,}5y = 22$ $\qquad$ $q\ :\ 1{,}2x + 0{,}5y = 25$

altså de ligninger, man får ved at erstatte ulighedstegnene i betingelserne med lighedstegn.
Resultatet bliver:



Bemærk, at linierne *l* og *m* falder sammen med koordinatakserne.

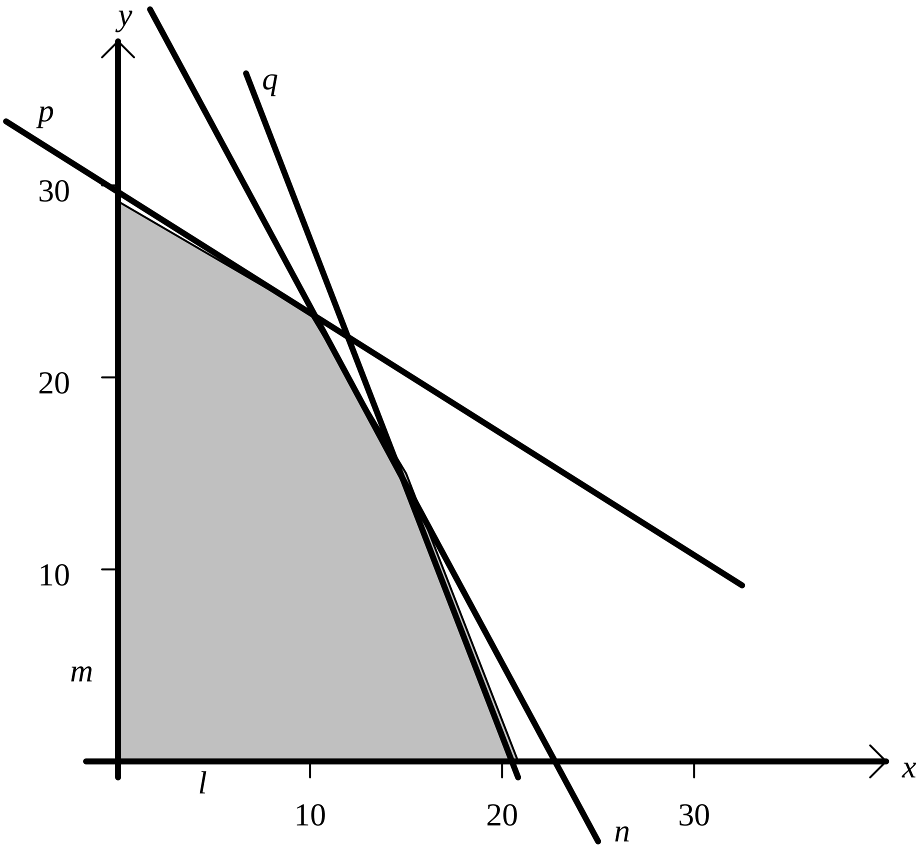
For at finde rådighedsområdet, skal vi nu kigge på ulighedstegnene.

Betingelsen $x \geq 0$ fortæller, at rådighedsområdet ligger over linien *l*, dvs. over *x*-aksen.

Tilsvarende fortæller betingelsen, at $y \geq 0$, at rådighedsområdet ligger til højre for *m*, dvs. til højre for *y*-aksen.

Betingelsen $3x + 5y \leq 150$ fortækker, at rådighedsområdet ligger under linien n.

Endelig fortæller de to sidste betingelser, at rådighedsområdet ligger under linierne p og q.
Rådighedsområdet bliver derfor det med gråt skraverede område:



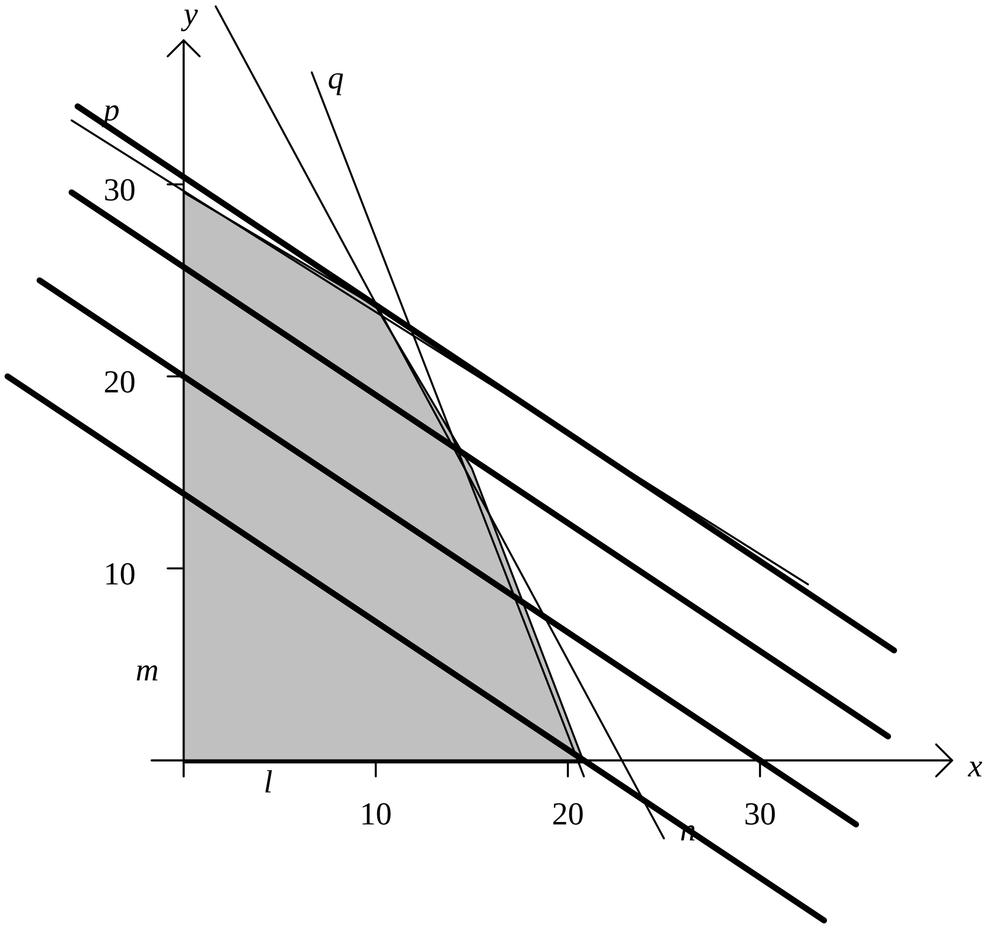
Vi skal nu finde ud af, hvor inden for dette rådighedsområde kriteriefunktionen $K(x, y) = 20x + 30y$ er størst.
Vi skal derfor betragte *niveaulinierne* for kriteriefunktionen - dette er de linier, hvor K er konstant.
En typisk niveaulinie for K har ligningen

$$20x + 30y = k$$

hvor k er den konstante værdi. Men denne ligning er jo ligningen for en ret linie (på normalform), og hvis vi skriver ligningen på den almindelige form:

$$y = -\frac{20}{30}x + \frac{k}{30}$$

så ser vi, at alle niveaulinierne er parallelle, idet hældningskoefficienten ikke afhænger af k.
Endvidere ser vi, at jo højere oppe på y-aksen, niveaulinien skærer, jo større er kriteriefunktionens værdi k. Vi skal derfor lægge en niveaulinie så 'højt oppe' i rådighedsområdet som muligt.
Det er nemmest at forestille sig, at man lægger en lineal parallel med en niveaulinie og derefter skubber linealen opad til højre mest muligt, indtil den lige præcis stadigvæk rører rådighedsområdet:



Det ses, at den 'bedste' niveaulinie lige præcist rører i skæringspunktet mellem linierne n og p. I dette punkt antager x og y derfor de værdier, som gør kriteriefunktionen størst.

Vi mangler bare at finde disse værdier. Dette kan enten gøres ved at aflæse på figuren, men det er nu bedre at regne sig frem - vi skal jo bare finde skæringspunktet mellem to linier:

$$\begin{Bmatrix} 3x+5y=150 \\ x+0{,}5y=22 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 3x+5y=150 \\ x=22-0{,}5y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} 3\cdot(22-0{,}5y)+5y=150 \\ x=22-0{,}5y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 3{,}5y=84 \\ x=22-0{,}5y \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} y=24 \\ x+0{,}5y=22 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y=24 \\ x=10 \end{Bmatrix}$$

Bageren får altså maksimal indtjening ved at bage 10 dusin basser og 24 dusin linser. Hans indtjening bliver

$K(10,24)=20\cdot 10+30\cdot 24=920$ kr.

I de store virksomheder kommer man naturligvis ud for meget mere komplicerede problemer, hvor man skal maksimere kriteriefunktioner, som afhænger af måske 100 variable. Disse problemer kan selv sagt ikke løses grafisk, så derfor bruger man den såkaldte *simplex-metode*, som vi dog ikke skal komme nærmere ind på her.

Man har fundet ud af, at den mest udbredte anvendelse af EDB i verden er til løsning af problemer indenfor lineær programmering.

Opgaver

7.1 I nedenstående opgaver skal kriteriefunktionen K maksimeres under hensyntagen til de angivne betingelser. Løs problemerne grafisk.

a) $K(x,y) = 3x + 4y$ Betingelser: $x \geq 0,\ y \geq 0$
$3x + 2y \leq 6$
$x + 4y \leq 4$

b) $K(x,y) = 11x + 20y$ Betingelser: $x \geq 0,$
$y \geq 0$
$x + 2y \leq 10$
$3x + 5y \leq 27$

c) $K(x,y) = 2x + 5y$ Betingelser: $x \geq 0,\ y \geq 0$
$-2x + 3y \leq 6$
$7x - 2y \leq 14$
$x + y \leq 5$

7.2 Vaskepulverfirmaet A producerer to typer vaskepulver, X og Y.
Fortjenesten på 1 ton X er 7000 kr, og på 1 ton Y på 10000 kr.
Produktionen af 1 ton X kræver 3 tons fosfater, 1 ton nitrater og 2 tons sulfater. Produktionen af 1 ton Y kræver 5 tons fosfater, 3 tons nitrater og 2 tons sulfater. Firmaet har 3900 tons fosfater, 2100 tons nitrater og 2200 tons sulfater til rådighed.
Hvorledes skal firmaet tilrettelægge sin produktion, således at fortjenesten bliver maksimal?

6.8 Opgaver

8.1 I 1979 reklamerede Provinsbanken for en såkaldt *Elite-opsparing*. Dette var form for indskudskonto, hvor renten den første år var 8,60%, det andet år 11,50%, det tredie år 14,40%, det fjerde år 17,25% og det femte år 20,10%.

Bestem den gennemsnitlige rente.

8.2 I begyndelsen af 1990 lover en nyudnævnt direktør sit firma, at den gennemsnitlige årlige stigning i omsætningen vil blive mindst 12% pr. år i den kommende 4-års periode.

I 1990 blev stigningen i omsætning på 7%.
I 1991 blev stigningen i omsætning på 10%.
I 1992 blev stigningen i omsætning på 14%

Hvor mange procent skal omsætningen stige i 1993, for at direktøren skal kunne holde, hvad han lovede.

8.3 I *Politiken* stod der 30. maj 1984 at læse:

Mindre salg af sodavand
Sodavandsafgiften fra 1. januar i år førte til et gennemsnitligt fald i salget på 24% i årets første tre måneder. I december sidste år steg salget 48%. I januar faldt det med 39%. faldet i februar og marts var henholdsvis 15% og 18%. Det oplyser skatte- og afgiftsminister Isi Foighel (K) i et svar til Folketingets skatte- og afgiftsudvalg.

Undersøg, om det er korrekt, at det gennemsnitlige procentvise fald pr. måned i salget af sodavand har været 24% i perioden januar-marts.

Beregn den gennemsnitlige procentvise ændring pr. måned for perioden december-marts.

8.4 En størrelse er i perioden 1975-1980 steget med 7,2% om året, mens den er steget med 4,2% om året i perioden 1980-1988.

Hvor mange procent er størrelsen i alt steget fra 1975 til 1988?

Bestem den gennemsnitlige årlige procentvise stigning i perioden 1975-1988.

8.5 Det viste udklip fra Samvirke, januar 1987, handler om udgifterne til sprøjtemidler i u-landene og i Danmark.

> -*Vi har til stadighed 50 agenter, der rejser rundt og rådgiver landmændene*, siger direktør *Bruce Pointer* fra *ICI Asiatic*, en Bangkok-virksomhed, som ØK og den britiske koncern ICI driver i fællesskab.
> Reklamen virker. Siden 1978 er u-landenes udgifter til sprøjtemidler vokset med 15% om året. I Danmark er landmændenes udgifter steget fra ca. 600 millioner kr. i 1981 til 1,4 milliarder i 1984.

Hvor mange procent er u-landenes udgifter til sprøjtemidler steget fra 1978 til 1987?

Hvor store ville udgifterne til sprøjtemidler have været i Danmark, hvis de siden 1981 årligt var steget med samme procent som i u-landene?

8.6 Den årlige procentvise stigning i timelønnen for ikke-faglærte arbejdere i årene 1985-1989 fremgår af nedenstående tabel.

År	1985	1986	1987	1988	1989
Mænd	4,7%	5,1%	9,6%	6,4%	4,0%
Kvinder	4,0%	3,9%	9,0%	6,7%	4,8%

Kilde: Statistisk Tiårsoversigt 1990.

Bestem den gennemsnitlige årlige procentvise stigning i timelønnen for henholdsvis mænd og kvinder i disse 5 år.

I denne 5-årsperiode er forbrugerprisindexet steget fra 229,3 til 283,6.

Bestem den gennemsnitlige årlige procentvise stigning i forbrugerprisindexet i perioden.

8.7 En størrelse er over en 5-års periode vokset med 3,5% pr. år.

Bestem den samlede procentvise stigning i 5-års perioden.

De næste 4 år vokser størrelsen med i alt 10%.

Bestem den gennemsnitlige årlige procentvise stigning i hele 9-års perioden.

8.8 *Berlingske Tidende* skrev den 25. januar 1988 en artikel i anledning af kampagnen "Bøger i skolen, tak". Udklippet stammer fra denne artikel.

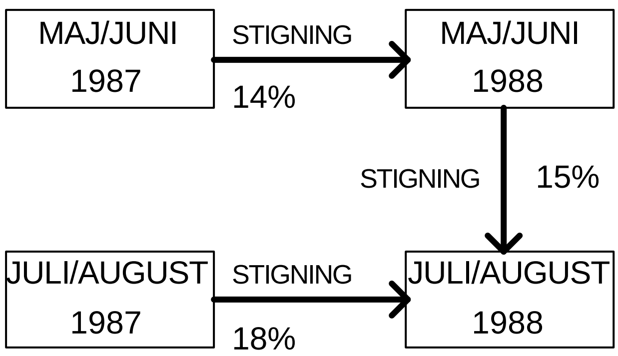
> I gamle dage - nogle ville sige de gode, gamle dage - fik nye elever i gymnasiet besked på at møde på med en *kuffert*. Mindre kunne ikke gøre det, når de udleverede bøger skulle fragtes hjem. Alt efter temperament så den nybagte 1.G'er i skræk eller forventning bogstakken på inspektors kontor vokse som en bønnestage.
> I dag kan det klares med en fjeldræv. Skolebøgernes antal er skrumpet i takt med, at bogkontoen har fået svindsot. På seks år - fra 1980 til 86 - er skolebogssalget gået ned med 44,3 procent. En del af nedgangen kan forklares ved et fald i elevtallet på 10 procent.

Beregn det gennemsnitlige årlige procentvise fald i skolebogssalget i perioden 1980-86.

Beregn det gennemsnitlige årlige procentvise fald i skolebogssalget pr. elev i perioden 1980-86.

8.9 Nedenstående figur stammer, i let revideret udgave, fra *Berlingske Tidende* den 12. oktober 1988.

SALG AF FARVEFJERNSYN



Salget af farve-tv og video er steget markant i månederne, hvor danskerne drejede antennerne mod EM i fodbold, OL i Seoul og TV2 i Odense

Beregn den gennemsnitlige månedlige stigning i salget af farvefjernsyn i perioden fra maj/juni 1987 til maj/juni 1988.

Beregn den procentvise stigning i salget af farvefjernsyn fra maj/juni 1987 til juli/august 1988.

Beregn den procentvise stigning i salget af farvefjernsyn fra maj/juni 1987 til juli/august 1987.

8.10 I 1988 gik 59,2% af de pædagogstuderende på børnehave- og fritidspædagogseminarium. resten gik på socialpædagogisk seminarium.

Kvindelige studerende udgjorde 87,7% af de studerende på børnehave- og fritidsseminarier. På de socialpædagogiske seminarier udgjorde kvinderne 80,4%.

Bestem den procentdel, som kvinder udgjorde af samtlige pædagogstuderende.

Bestem den procentdel af de kvindelige pædagogstuderende, der gik på socialpædagogisk seminarium.

8.11 Ved tilberedning af en middagsret benyttes som fedtstof en blanding bestående af 60% smør og 40% vindruekerneolie. Smør indeholder 5% flerumættede fedtsyrer, og vindruekerneolie indeholder 74% flerumættede fedtsyrer.

Bestem procentdelen af flerumættede fedtsyrer i blandingen.

Man ønsker at hæve procentdelen af flerumættede fedtsyrer i blandingen til 50%.

Bestem den procentvise fordeling af smør og vindruekerneolie i en blanding, der opfylder dette.

8.12 I statistikker over beskæftigelsen på arbejdsmarkedet i Danmark indgår arbejdsløshedsprocenten, der angiver, hvor mange procent af arbejdsstyrken, der er arbejdsløse.

I januar 1988 var 11,0% af kvinderne og 8,3% af mændene i arbejdsstyrken arbejdsløse. Kvinderne udgjorde 46,1% af arbejdsstyrken.

Beregn arbejdsløshedsprocenten for januar 1988.

I juli 1988 var arbejdsløshedsprocenten faldet til 7,7%. På dette tidspunkt var 9,5% af kvinderne arbejdsløse, og kvinderne udgjorde fortsat 46,1% ar arbejdsstyrken.

Hvor mange procent af mændene var arbejdsløse i juli 1988?

Hvor mange procent af de arbejdsløse i juli 1988 var kvinder?

8.13 En kapital på 54000 kr. forrentes med 9% om året.

Hvor stor er kapitalen efter 5 år?

Hvor mange år skal de 54000 kr. forrentes, før de er vokset til 10000 kr?

8.14 5000 kr. indsættes på en konto. Efter 10 år er indeståendet på kontoen vokset til 10305 kr.

Bestem den gennemsnitlige årlige procent, som beløbet er forrentet med.

8.15 Omsætningen i et firma er i løbet af 5 år vokset fra 1,7 mio. kr. til 4,9 mio. kr.

Bestem den gennemsnitlige årlige procentvise vækst i 5-års perioden.

De næste 3 år vokser omsætningen med henholdsvis 5%, -2% og 17%.

Bestem den gennemsnitlige årlige procentvise vækst i denne 3-års periode.

8.16 Hvert år indsættes 1000 kr. på en konto. Renten er 9% p.a.

Bestem det beløb, der står på kontoen efter otte indbetalinger.

Hvor mange indbetalinger skal der foretages, før beløbet på kontoen overstiger 15000 kr.?

8.17 På en såkaldt boligsparekonto indbetales 3000 kr. en gang om året i 5 år. På betingelse af, at pengene anvendes til boligformål, er renten 10% p.a.

Hvor mange penge får man udbetalt, hvis pengene hæves til boligformål umiddelbart efter sidste indbetaling?

Hvis pengene hæves til andet formål, så er renten kun 6% p.a.

Hvor meget mindre får man udbetalt, hvis pengene hæves til andet formål umiddelbart efter sidste indbetaling?

8.18 En konto oprettes, og et beløb sættes ind på kontoen, hvor det forrentes med 2,5% om året. Efter 4 år er beløbet vokset til 7395,55 kr.

Hvor stort var det beløb, der blev sat ind på kontoen?

Efter disse 4 år ændres renten til en ny værdi.

Bestem denne nye årlige rente i procent, når der efter 3 år med denne rente står 8010,91 kr. på kontoen.

Herefter ændres rentes til 2,2% om året.

Bestem, hvor lang tid, der går, inden beløbet på kontoen første gang overstiger 8700 kr.

8.19 En ung mand vil købe en bil på afbetaling. Han kan betale 15000 kr. i udbetaling og dernæst 600 kr. pr. måned startende en måned efter købet. Afbetalingsrenten er 2,25% pr. måned.

Hvor dyr en bil kan han købe, hvis han betaler bilen over
- a) 36 måneder?
- b) 60 måneder?

8.20 I forbindelse med en ekstraindbetaling til et kloakeringsprojekt fik grundejerne valget mellem to muligheder:

Enten
at indbetale 13500 kr. på én gang den 1.september 1989
eller
at få en afbetalingsordning, hvor der betales 555 kr. pr. måned i 30 måneder. Den første ydelse betales den 1. oktober 1989.

En grundejer valgte afbetalingsordningen.

Gør rede for, at renter er 1,41% pr. måned ved denne afbetalingsordning.

Hvor stort et beløb betalte grundejeren i renter ved den første ydelse?

8.21 Et lån med en månedlig rente på 1,4% kan afvikles over 48 måneder med en månedlig ydelse på 610 kr.

Bestem lånets størrelse.

I et andet lån låner man 20000 kr. til en månedlig ydelse på 610 kr. i 48 måneder.

Bestem den månedlige rente for lånet med en decimal?

8.22 I Sparekassen Nordjylland kan man låne til forbedring af bolig. Hvis man låner 25000 kr. og betaler tilbage med en fast månedlig ydelse i 10 år, er renten 1,03% pr. måned.

Bestem den faste månedlige ydelse på dette lån?

Hvis man låner 130000 kr. og betaler tilbage med en fast månedlig ydelse i 20 år, er ydelsen 1453 kr. pr. måned.

Undersøg, om renten (i procent) er større eller mindre på dette lån end på det føromtalte lån?

8.23 På et lån med hovedstolen 10000 kr. og med løbetiden 36 måneder er den månedlige ydelse 341 kr.

Bestem den månedlige rente i procent med en decimal.

8.24 I bladet *Management*, august 1984, kunne man læse nedenstående, som handler om udviklingen i ØK's koncernomsætning:

> ØK's koncernomsætning udgjorde i 1973 ca. 17,5 mia. kroner, og 10 år senere var omsætningen 16,9 mia. kroner. I denne periode er priserne næsten tredoblede, og målt i 1973-priser er omsætningen derfor faldet dramatisk - fra 17,5 mia. kr til 6,2 mia. kr.

Bestem på grundlag af oplysningerne i udklippet prisindex for året 1983, når index for året 1973 sættes til 100.

8.25 Tabellen nedenfor stammer fra "Nyt fra Danmarks Statistik", nr. 57, 1989, og viser udviklingen i forbrugerprisindexet for Grønland i perioden januar 1980 - januar 1989.

1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989
100	106,9	122,5	137,5	148,6	162,5	171,3	176,2	189,6	198,0

Hvor mange procent er forbrugerprisindexet steget fra januar 1986 til januar 1989?

Det oplyses, at forbrugerprisindexet er steget med 2.6% i perioden fra juli 1988 til januar 1989.

Beregn forbrugerprisindexet for juli 1988.

Beregn forbrugerprisindexet for januar 1989, når forbrugerprisindexet for januar 1985 sættes til 100.

8.26 Maksimér kriteriefunktionen

$$K(x,y) = 8x + 9y$$

når betingelserne

$$x \geq 0 \quad , \quad y \geq 0 \quad , \quad x + 2y \leq 8$$
$$2x + 3y \leq 13 \quad , \quad x + y \leq 6$$

skal være opfyldte.

8.27 Arealet af en have er på 300m^2. Haveejeren bruger en time pr. uge på at holde og pleje enten 60m^2 græsplæne eller 30m^2 blomsterbed. Desværre har han kun 7 timer om ugen til at passe have.

Han søn vil gerne have, at mindst halvdelen af haven skal være plæne, mens hans kone kræver, at mindst en trediedel af haven skal være blomsterbed.
Haveejeren har fundet ud af, at han opnår halvanden gang så meget glæde ved $1m^2$ plæne som ved $1m^2$ blomsterbed.
Hvorledes skal han planlægge sin haves indretning, således at hans kone og søn bliver tilfredse, hans pasningstid ikke overstiger 7 timer om ugen, og hans glæde bliver størst?

8.28 To smuglere tager til Tyskland for at hente billig sprut. De har på forhånd aftalt med en mellemhandler, at de kan købe whisky og rom for henholdsvis 40 og 30 kroner pr. flaske. Mellemhandleren har i alt 70 flasker whisky og 80 flasker rom. De to smuglere har imidlertid kun kunnet skaffe 3400 kr. til indkøbet, og de har aftalt, at de højst vil forsøge at smugle 100 flasker sprut over grænsen. Smuglerne ved fra tidligere, at de kan tjene 60 kr. på en flaske whisky og 50 kr. på en flaske rom.
Hvorledes skal de købe sprut, således at deres fortjeneste bliver maksimal?

Facitter

1.1 a: 0,45 b: 0,17 c: 0,724 d: 0,0016 e: 0,0001 f: 0,0101
g: 1,92 h: 0,000001 i: 2% j: 32,5% k: 3,52% l: 101%
m: 10,1% n: 9000% o: 100% p: 200%

1.2 a: 5% b: 9,05 % c: 34,5 d: 0,19

1.3 70000,- 90000,- 28,57%

1.4 Ialt er der 150 elever, heraf 37,5 sproglige og 52,5 HF'ere
(Procenttallene må være afrundede...)

2.1 37,55% 68,84%

2.2 56% 18,75%

3.1

k_0	r	n	k_n
2000	3%	12	**2851,52**
3500	1,25%	14	**4164,84**
488,18	0,6%	4	500
152882,18	11%	18	1000000
100	**25,89%**	10	1000
4000	**17,02%**	4	7500
800	25,6%	**5**	2500
2000	7,4%	**25**	12000
100	**17,88%**	14	1000
4000	15,7%	**6**	9600

3.2 5,38%

3.3 Indtjeningen *faldt* med 0,90% pr. år.

4.1 a: 8191 b: 1431655765 c: 2116774,72
d: 100 (formlen kan *ikke* anvendes, idet $a = 1$)

4.2

y	r	n	A_n
200	11%	10	**3344,40**
1000	6%	4	**4374,62**
2100	3%	20	**56427,79**
8827,43	8%	30	1000000
4566,33	2%	10	50000
961,23	13%	6	8000
250	13%	**5**	1620
200	17%	**20**	26007
2000	8,3%	**10**	29389
150	5,6%	15	**3386,86**
868,95	3,2%	9	8900
1105	7,2%	**12**	20000

4.3 a: 15192,93 b: 30272,86 c: 20272,86

4.4 a: 71354,78 b: 93790,16
c: Pengene har stået i banken i længere tid.

5.1

G	n	r	y
120000	8	9%	**21608,93**
50000	16	12%	**7169,50**
80000	48	2%	**2608,15**
11469,33	24	7%	1000
1043,22	10	14%	200
1387,04	7	3,2%	224,31
8000	**6**	13%	2001,23
9000	**36**	2%	352,80
6000	**18**	3%	436
6304,89	4	11%	2000

5.2 2,0%

5.3 144,61 kr B's rente er størst

6.1 a: juli og december b: 146,79 c: 146 d: 1,355%
e: 0,450% f: 5,80% g: 193,5

7.1 a: $(x,y)=(\frac{8}{5},\frac{3}{5})$ $K=\frac{36}{5}$ b: $(x,y)=(4,3)$ $K=104$
c: $(x,y)=(\frac{9}{5},\frac{16}{5})$ $K=\frac{98}{5}$

7.2 800 tons X og 300 tons Y.

Kapiteloversigt

Gennemsnitlig rente

$$1+r=\sqrt[n]{(1+r_1)(1+r_2)\dots(1+r_n)}$$

Renteformlen

k_0 er startkapitalen
r er renten pr. termin
n er antallet af terminer
k_n er kapitalen efter n terminer

$$k_n = k_0 \cdot (1+r)^n$$

Annuitetsopsparing

y er den indbetalte ydelse pr. termin
r er renten pr. termin
n er antallet af terminer
A_n er indestående efter n terminer

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Annuitetslån

G er grundstolen, dvs. det lånte beløb
y er ydelsen pr. termin
r er renten pr. termin
n er antallet af terminer

$$G = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$