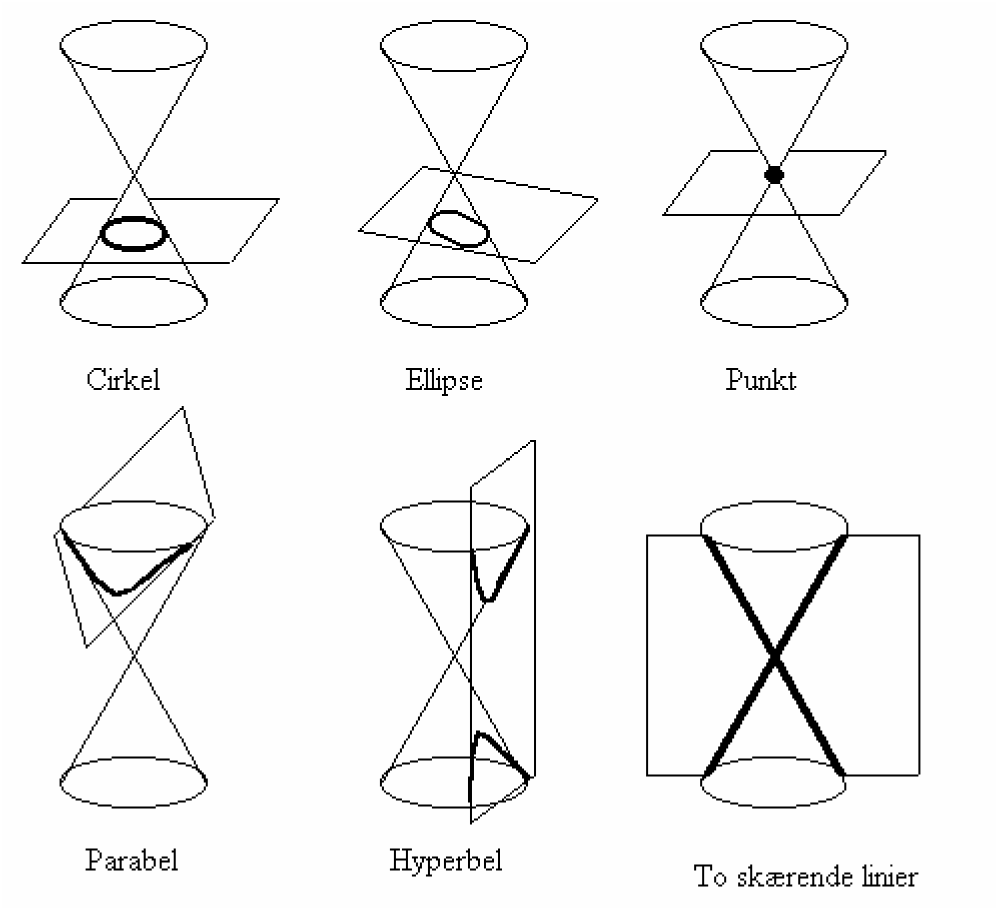
Matematikkens mysterier

- på et højt niveau

af

Kenneth Hansen

5. Kurver og keglesnit



5. Kurver og keglesnit

5.1 Kurver: Parameterfremstilling og ligning

Inspirationen til studiet af kurver kommer oprindeligt fra fysikken. Her betragter man følgende problemstilling: En partikel P bevæger sig på en eller anden kompliceret måde. Hvordan kan denne bevægelse beskrives (og analyseres) ?

En matematisk beskrivelse af denne bevægelse kan opnås ved at observere, at partiklen til ethvert tidspunkt t befinder sig i et punkt P_t .

Vi kan da betragte stedvektoren $\overrightarrow{OP_t}$ til dette punkt.

Denne stedvektor er et eksempel på en *vektorfunktion*, som ganske simpelt er en funktion fra (en delmængde af) de reelle tal til mængden af vektorer. (Normalt nøjes vi med at kigge på *plane* kurver, hvilket betyder, at vores vektorfunktion antager værdier i mængden af vektorer i *planen*).

Vi har altså en vektorfunktion $\vec{r}(t)$, hvor variablen t er tiden, og partiklens bevægelse kan beskrives ved ligningen

$$\overrightarrow{OP_t} = \vec{r}(t)$$

Vi siger, at vi har en *parameterfremstilling* for partiklens *banekurve.*

Eksempel

Betragt vektorfunktionen $\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$. Dette er parameter-fremstillingen for en linie gennem punktet (0;0) og med retningsvektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Faktisk har denne linie ligningen $y = x$.

Men denne linie kan også beskrives som banekurven for vektorfunktionen

$$\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^3 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbf{R}$$

idet ethvert punkt, som ligger på linien med ligningen $y = x$, må have koordinaterne (x,x), og dette punkt har stedvektoren

$$\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{x}^{\,3} \\ \sqrt[3]{x}^{\,3} \end{pmatrix} = \vec{r}_2(\sqrt[3]{x})$$

Derimod beskriver parameterfremstillingen

$$\vec{r}_3(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

kun den del af linien med ligningen $y = x$, som har ikke-negative x-koordinater.

Ovenstående eksempel viser, at det er muligt at *eliminere* parameteren i en parameterfremstilling, og herved at finde en ligning for kurven.

Eksempel

Lad f være en ganske almindelig funktion. Grafen for f er kurven med ligningen $y = f(x)$. Denne kurve har parameterfremstillingen

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Eksempel

Kurven med parameterfremstillingen

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

er den velkendte enhedscirkel. For at bevise dette, beviser vi, at *koordinatfunktionerne* $x(t) = \cos t$ og $y(t) = \sin t$ opfylder cirklens ligning:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Dette ses let ved indsættelse og anvendelse af idiotformlen:

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

Generelt gælder, at kurven med parameterfremstillingen

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x_0 + r\cos t \\ y_0 + r\sin t \end{pmatrix}$$

fremstiller cirklen med centrum (x_0, y_0) og radius *r*. Dette kan vises ved indsættelse i cirklens ligning

$$(x - x_o)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Eksempel

Denne figur kaldes *Descartes' blad*. Den har parameterfremstillingen

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t}{t^3 + 1} \\ \dfrac{t^2}{t^3 + 1} \end{pmatrix}$$

Man kan vise, at denne kurve opfylder ligningen

$$x^3 + y^3 - xy = 0 .$$

Eksempel

Figuren ovenfor er en *trebladet rose*. Den har parameterfremstillingen

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(3t)\cos t \\ \cos(3t)\sin t \end{pmatrix},\ 0 \le t < 2\pi$$

Eksempel

Archimedes' spiral er kurven med parameterfremstillingen

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t \\ t\sin t \end{pmatrix},\ t > 0$$

Eksempel

Den 'fiskeformede' kurve til venstre har parameterfremstillingen

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 3 \\ t^3 - 4t \end{pmatrix}$$

Her er punktet (1;0) er såkaldt *dobbeltpunkt* - der er nemlig to parameterværdier (2 og -2) som giver dette punkt på kurven.

Sådanne *multiple punkter* er hyppigt forekommende - f.eks. indeholder den trebladede rose fra før et *tripelpunkt*.

Opgaver

1.1 Hvilke af følgende kurver har dobbeltpunkter (eller multiple punkter): Enhedscirklen, Descartes' blad, den trebladede rose og Archimedes' spiral? Angiv i hvert tilfælde de multiple punkter.

1.2 Tegn den kurve, som er givet ved parameterfremstillingen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+2 \\ t^2 - 3x + 5 \end{pmatrix}$$

Bemærk, at kurven er en parabel, og eliminér parameteren t.

1.3 Hvilken type kurver fremkommer ud fra parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cos(2t) - 6 \\ 5\sin(2t) + 7 \end{pmatrix} \ ?$$

Opskriv en ligning for denne kurve.

1.4 Tegn kurven givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 - t \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Kurven har et dobbeltpunkt; bestem dette.

5.2 Hastighed, acceleration og tangenter

Igen kommer inspirationen fra fysikken. Indenfor *kinematikken*, som er studiet af en partikels bevægelse, opererer man med forskellige begreber: *Stedfunktion*, *hastighed* og *acceleration*. Det simpleste tilfælde indenfor kinematikken er det retlinede tilfælde, hvor vor partikels banekurve er en (del af en) ret linie:

Partiklens bevægelse kan nu beskrives ved hjælp af *stedfunktionen* $s(t)$, som til tiden t angiver partiklens position.

Hastigheden er defineret som $v(t) = s'(t)$, og idet

$$v(t) = s'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

fortolkes hastigheden som ændringen i position pr. tidsenhed.

Tilsvarende defineres *accelerationen* som $a(t) = v'(t) = s''(t)$, og igen fortolkes denne som ændringen i hastighed pr. tidsenhed.

Endelig definerer man *farten* som $|v(t)|$.

Disse ting overføres nærmest uden videre til de tilfælde, hvor partiklen bevæger sig i to eller tre dimensioner; men idet vi er matematikere og ikke fysikere, så skal vi først lige sikre os, at vi kan gennemføre dette program. Vi nøjes med at behandle det todimensionale tilfælde.

Definition 1

a) Vektorfunktionen $\vec{r}(t)$ kaldes *kontinuert* i intervallet *I*, hvis begge koordinatfuktionerne er kontinuerte i *I*,

b) Vektorfunktionen $\vec{r}(t)$ er *differentiabel* i intervallet *I*, hvis begge koordinatfunktionerne er differentiable i *I*.

c) Vektorfunktionen $\vec{r}(t)$ er *to gange differentiabel* i intervallet *I*, hvis begge koordinatfunktionerne er to gange differentiable i *I*.

Som ved de reelle funktioner har vi, at to gange differentiable vektorfunktioner er differentiable, og at differentiable vektorfunktioner er kontinuerte.

Definition 2 (LS)

a) Lad $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix}$ være en differentiabel vektorfunktion.

Hastighedsfunktionen $\vec{r}\,'(t)$ defineres som vektor-funktionen $\begin{pmatrix} r_1'(t) \\ r_2'(t) \end{pmatrix}$, og *farten* defineres som $|\vec{r}\,'(t)|$.

b) Lad $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \end{pmatrix}$ være en to gange differentiabel vektorfunktion.

Accelerationsfunktionen $\vec{r}\,''(t)$ defineres som vektorfunktionen $\begin{pmatrix} r_1''(t) \\ r_2''(t) \end{pmatrix}$.

Eksempel

Et af de klassiske eksempler indenfor kinematikken er *jævn cirkelbevægelse*. En partikel bevæger sig i en cirkel med radius a og centrum i (0;0). Bevægelsen er jævn, dvs. *vinkelhastigheden* ω, som er antal gennemløbne radianer pr. sekund, er konstant. Omløbstiden, som er den tid, det tager for partiklen at løbe cirkelbanen igennem én gang, er givet ved

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

idet der er 2π radianer på en cirkelomgang.
Selve bevægelsen kan beskrives ved stedfunktionen

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a\cos(\omega t) \\ a\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

og vi finder umiddelbart

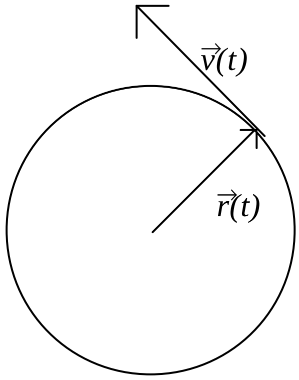
$$\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} -a\omega\sin(\omega t) \\ a\omega\cos(\omega t) \end{pmatrix} = -\omega\hat{\vec{r}}(t)$$

$$\vec{r}\,''(t) = \begin{pmatrix} -a\,\omega^2\cos(\omega t) \\ -a\,\omega^2\sin(\omega t) \end{pmatrix} = -\omega^2\vec{r}(t)$$

Heraf kan ses forskellige interessante ting:

1) Hastighedsvektoren $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$ står altid vinkelret på stedvektoren, og er en retningsvektor for tangenten til banekurven.

2) Accelerationen er modsat rettet og proportional med stedvektoren. Denne acceleration kaldes *centripetal-accelerationen*.



Vi skal nu se på den geometriske betydning af hastighedsvektoren.

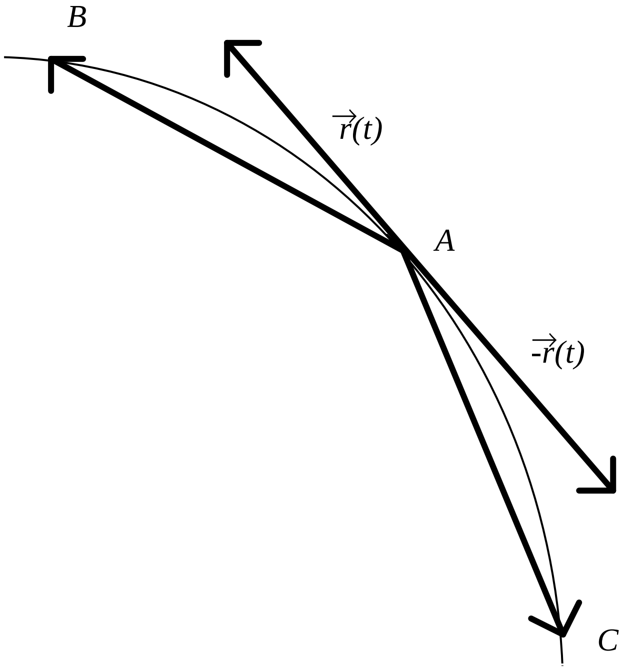
Sætning 3 (LS)

Lad $\vec{r}(t)$ være en differentiabel vektorfunktion. Hvis $\vec{r}\,'(t_0) \neq \vec{0}$, så har kurven i punktet $\vec{r}(t_0)$ en tangent med retningsvektoren $\vec{r}\,'(t_0)$.

(Bemærk, at hvis $\vec{r}\,'(t_0) = \vec{0}$ så kan kurven både have og ikke have en tangent - mere herom senere).

Bevis:

Betragt figuren nedenfor:



Her er punkterne A, B og C bestemt ved

$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}(t_0) \ , \ \overrightarrow{OB} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) \ , \ \overrightarrow{OC} = \vec{r}(t_0 - \Delta t)$$

hvor $\Delta t > 0$ er en lille, positiv tilvækst i parameteren t.

Vi kan af figuren se, at

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0) = \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}\Delta t$$

og

$$\overrightarrow{AC} = \vec{r}(t_0 - \Delta t) - \vec{r}(t_0) = \frac{\vec{r}(t_0 - \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}\Delta t$$

er retningsvektorer for *halvsekanterne* startende i A og gående igennem B og C. Idet $\Delta t > 0$, er vektorerne

$$\frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t} \quad \text{og} \quad \frac{\vec{r}(t_0 - \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

ligeledes retningsvektorer for de to halvsekanter.

Tages grænseværdien $\Delta t \to 0$ ses, at vi har de to *halvtangenter* med retningsvektorerne $\vec{r}\,'(t_0)$ og $-\vec{r}\,'(t_0)$. Idet disse ikke er nul og modsat rettede, danner de tilsammen en tangent med retningsvektoren $\vec{r}\,'(t_0)$.

Eksempel

Vi har kurven med parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - 3t \\ 2t - 5 \end{pmatrix}$$

og vil gerne bestemme en *ligning* for tangenten til kurven i punktet $(4\,,3)$.

Først og fremmest skal vi finde den t-værdi, som giver punktet (4 , 3). Dette gøres ved at løse to ligninger med en ubekendt:

$$\begin{Bmatrix} t^2 - 3t = 4 \\ 2t - 5 = 3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} t^2 - 3t - 4 = 0 \\ 2t = 8 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} t^2 - 3t - 4 = 0 \\ t = 4 \end{Bmatrix}$$

Idet $t = 4$ ses også at passe med den øverste ligning, så ligger punktet (4,3) faktisk på kurven, og svarer til parameterværdien 4.

Herefter skal vi finde en parameterfremstillingen for tangenten. Vi differentierer vektorfunktionen

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

og sætter $t = 4$ for at finde tangentens retningsvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2\cdot 4-3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da tangentegn går gennem punktet (4,3) har tangenten altså parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Endelig kan vi finde en ligning ved at bemærke, at tværvektoren $\hat{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ faktisk er en normalvektor til tangenten:

$$-2(x-4)+5(y-3)=0$$

- og dette er den ønskede ligning.

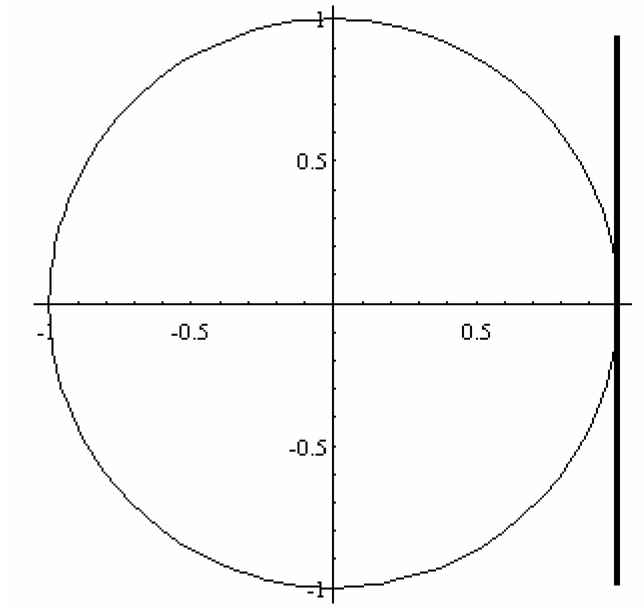
Hvis $\vec{r}(t_0) = \vec{0}$, så kan der ske følgende ting, som vi illustrerer med et par eksempler:

a) Kurven har en almindelig tangent.

Til højre er vist banekurven for vektor-funktionen

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t^3) \\ \sin(t^3) \end{pmatrix}$$

Det ses, at $\vec{r}\,'(0) = \vec{0}$, men ikke desto mindre har kurven en lodret tangent, som vist på figuren, i punktet (1,0).

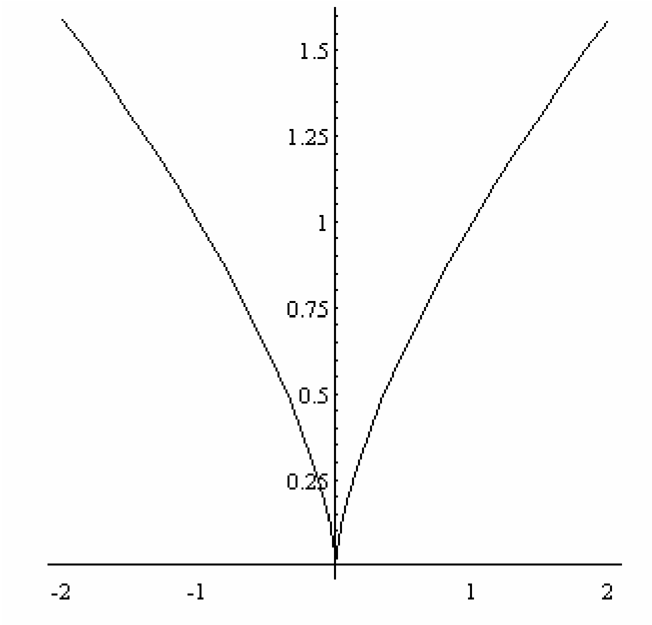


b) Kurven har en spids.

Dette illustreres af figuren til højre - denne viser parameterfremstillingen

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

Kurven har her en spids i punktet (0;0) - dette betyder, at de to halvtangenter er ens-rettede og ikke modsat rettede som ved den almindelige tangent.

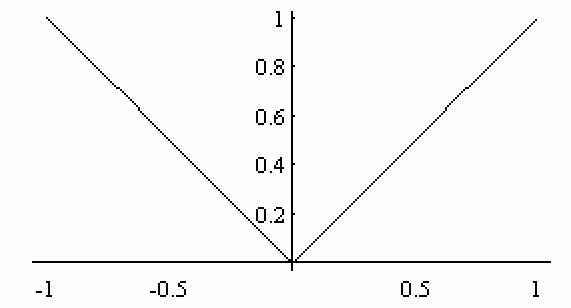


c) **Kurven har et knæk.**

Til højre ses banekurven for parameterfremstillingen

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ |t| \end{pmatrix}$$

I punktet (0,0) har den et knæk på 45° - dvs. at de to halvtangenter her danner en vinkel på 45°.



Opgaver

2.1 Bestem en ligning for tangenten til kurven med parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - 2t + 6 \\ t^3 - 6t^3 + 3t - 1 \end{pmatrix}$$

med røringspunkt i punktet svarende til parameterværdien 2.

2.2 Betragt kurven givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - 2t \\ t^3 - t^2 - 2t \end{pmatrix}$$

Bevis, at punktet (0,0) er et dobbeltpunkt.
Bestem den spidse vinkel mellem de to tangenter gennem dobbeltpunktet.

2.3 Betragt en kurve, givet ved vektorfunktionen $\vec{f}(t)$. Betragt to punkter *A* og *B* på kurven, svarende til parameterværdierne t_0 og t_1. Man kan bevise, at længden af kurven mellem *A* og *B* er givet ved integralet

$$\int_{t_0}^{t_1} \left| \vec{f}\,'(t) \right| dt \,.$$

Brug dette til at bevise, at omkredsen af en cirkel med radius *r* er $2\pi r$.

(Vink: Brug parameterfremstillingen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(t) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$, og sæt $t_0 = 0$, $t_1 = 2\pi$).

2.4 Betragt kurven givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t\sqrt{t} \end{pmatrix} \,,\ 1 \le t \le 4$$

Tegn denne kurve.
Bestem længden af denne kurve.

2.5 *Den logaritmiske spiral* er kurven givet ved parameterfremstillingen

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{at}\ \cos(t) \\ e^{at}\ \sin(t) \end{pmatrix}, t > 0$$

Her er *a* en positiv konstant.

a) Tegn den logaritmiske spiral for $a = \frac{1}{2}$.

b) Bevis følgende formel

$$\vec{f}\,'(t) = a\vec{f}(t) + \hat{f}(t)$$

c) Bevis, at vinklen mellem stedvektoren og tangentvektoren er konstant for alle punkter på spiralen.

d) Hvilken anden kurve opfylder egenskaben i c ?

5.3 Kurveundersøgelser

I dette kapitel vil vi vise, hvordan man laver den store, forkromede kurveundersøgelse. Vi betragter vektorfunktionen

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin 2t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

og vil undersøge banekurven for følgende:

a) kurvens skæringer med x- og y-aksen,
b) tangenter parallelle med en af koordinatakserne,
c) dobbeltpunkter, og tangenter i dobbeltpunkterne
d) symmetri,
e) en ligning for kurven, og
f) arealet indesluttet af kurven.

Vi starter med at skitsere kurven, så vi ved, hvad der foregår:

Skæringer med koordinatakserne

For at finde skæringer med koordinatakserne løser vi ligningerne

$$y(t) = 0 \qquad \text{og} \qquad x(t) = 0$$

hvor $x(t) = \sin(t)$ og $y(t) = \sin(2t)$ er koordinatfunktionerne. Vi får:

skæringer med *x*-aksen:

$$y(t) = 0 \iff \sin(2t) = 0 \iff$$

$$2t = 0 \ \vee \ 2t = \pi \ \vee \ 2t = 2\pi \ \vee \ 2t = 3\pi \ \vee \ 2t = 4\pi \iff$$

$$t = 0 \ \vee \ t = \frac{\pi}{2} \ \vee \ t = \pi \ \vee \ t = \frac{3\pi}{2} \ \vee \ t = 2\pi$$

Indsættes disse værdier i parameterfremstillingen, ser man, at kurven skærer x-aksen i punkterne

$$(0,0)\ ,\ (1,0)\ ,\ (0,0)\ ,\ (-1,0)\ ,\ (0,0)$$

Man ser allerede her, at punktet (0,0) er et dobbeltpunkt.

Bemærk, at (0,0) egentligt ikke er et dobbeltpunkt - vi arbejder med trigonometriske funktioner og bør derfor betragte parameterværdierne 0 og 2π som ens!

skæringer med *y*-aksen:

$$x(t)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(t)=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=0 \ \vee t=\pi \vee t=2\pi$$

Ved indsættelse får man igen punktet (0,0).

Kurven skærer altså koordinatakserne i punkterne

$$(0,0) \quad (1,0) \quad (0,0) \quad (-1,0) \quad (0,0)$$

Tangenter, som er parallelle med koordinatakserne

Ved differentiation ses, at

$$\vec{r}\,'(t)=\begin{pmatrix}\cos(t)\\ 2\cos(2t)\end{pmatrix}$$

Vi løser ligningerne

$$y'(t)=2\cos(2t)=0 \qquad \text{og} \qquad x'(t)=\cos(t)=0$$

for at finde de parameterværdier, hvor tangenten er parallel med henholdsvis x- og med y-aksen. Vi udelader detaljerne; men det ses, at

for $t=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$ er tangenten parallel med x-aksen.

og

for $t=\frac{\pi}{2}$ og for $t=\frac{3\pi}{2}$ er tangenten parallel med y-aksen

Indsættes disse parameterværdier ses, at

i punkterne $(\frac{\sqrt{2}}{2},1)$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2},1)$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2},-1)$, $(\frac{\sqrt{2}}{2},-1)$ er tangenten parallel med x-aksen

og

i punkterne (1,0) og (-1,0) er tangenten parallel med y-aksen

Dobbeltpunkter og tangenter heri.

Det ses fra grafen og fra undersøgelsen i a), at punktet (0,0) er dobbeltpunkt, idet dette punkt svarer til parameterværdierne 0 og π. På grafen ser man, at der ikke er flere multiple punkter.

Vi vil finde vinklen mellem tangenterne i dobbeltpunktet. Dertil observerer vi, at $\vec{r}\,'(0)$ og $\vec{r}\,'(\pi)$ er retningsvektorer for disse tangenter, så det er nok at finde vinklen v mellem disse vektorer. Vi får:

$$\vec{r}\,'(0) = \begin{pmatrix} \cos(0) \\ 2\cos(2\cdot 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}\,'(\pi) = \begin{pmatrix} \cos\pi \\ 2\cos(2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\cos v = \frac{\vec{r}\,'(0)\cdot\vec{r}\,'(\pi)}{|\vec{r}\,'(0)||\vec{r}\,'(\pi)|} = \frac{1\cdot(-1)+2\cdot 2}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+2^2}} = \frac{3}{5}$$

$$v = \arccos(\frac{3}{5}) \approx 53{,}13^\circ .$$

Symmetri

Ser man på figuren, så aner man, at banekurven både er symmetrisk om x-aksen, om y-aksen og om origo. Dette kan bevises:

Banekurven er symmetrisk om x-aksen, hvis følgende udsagn gælder:

$$(x,y) \text{ ligger på banekurven} \quad \Leftrightarrow \quad (x,-y) \text{ ligger på banekurven}$$

Men dette gælder, idet

(x,y) ligger på banekurven

$\Updownarrow$

der findes en parameterværdi t, således at $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Men betragtes nu parameterværdien $\pi - t \;(+2\pi)$ (hvor vi evt. adderer 2π for at kunne blive indenfor definitionsmængden) ses, at

$$\vec{r}(\pi - t) = \begin{pmatrix} \sin(\pi - t) \\ \sin(2\pi - 2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin(-2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\sin(2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

hvilket viser, at punktet $(x,-y)$ ligeledes ligger på banekurven.

Tilsvarende ses, at banekurven er symmetrisk om y-aksen, dvs.

$$(x,y) \text{ ligger på banekurven } \Leftrightarrow (-x,y) \text{ ligger på banekurven}$$

ved at betragte parameterværdien $t+\pi\ (-2\pi)$.

Endelig kan man vise, at kurven er symmetrisk om origo, dvs.

$$(x,y) \text{ ligger på banekurven } \Leftrightarrow (-x,-y) \text{ ligger på banekurven}$$

ved at betragte parameterværdien $-t\ (+2\pi)$.

En ligning for kurven

Det er normalt temmeligt svært at finde en ligning for en given banekurve; men i dette tilfælde er det nemt:

$$y^2 = (\sin(2t))^2 = (2\sin t \cos t)^2 =$$

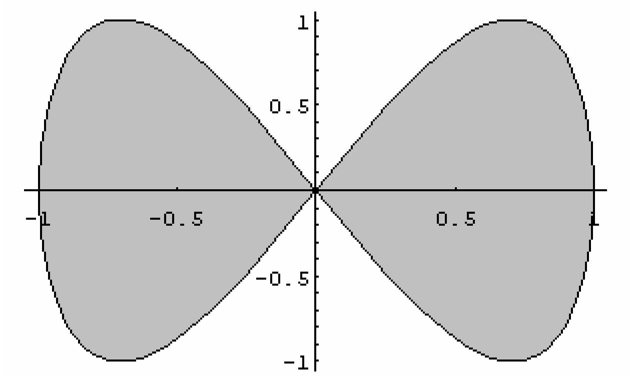
$$4\sin^2 t\cos^2 t = 4\sin^2 t(1-\sin^2 t) = 4x^2(1-x^2)$$

hvilket viser, at banekurven har ligningen

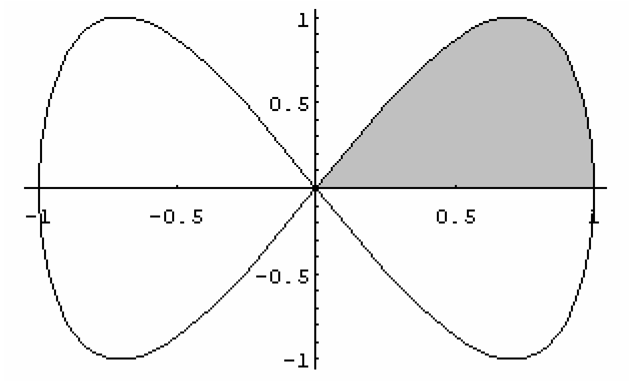
$$y^2 = 4x^2(1-x^2)$$

Arealet indesluttet af kurven.

Vi skal nu beregne arealet af det grå område nedenfor. Dette er området indesluttet af banekurven. Det er værd at bemærke, at det ikke altid er muligt at tale om et sådant areal.



Vi starter med at observere, at det er nok at beregne arealet af det grå område nedenfor:



idet det oprindelige areal er 4 gange så stort som det nye areal pga. kurvens symmetri.

En generel måde at beregne sådanne areal på er følgende: Antag, at vi har udtrykt y som funktion af x. Dette kan man principielt gøre ved at eliminere parameteren, men i praksis er dette ikke altid muligt. Dette gør heller ikke noget, for arealmetoden virker alligevel.

y er altså en funktion af x, og det skraverede areal er derfor givet ved integralet

$$\int_0^1 y\,dx$$

hvor grænserne 0 og 1 aflæses på figuren.

Vi laver nu en (omvendt) substitution, hvor vi indfører variablen t bestemt ved $x = \sin t$ - altså i virkeligheden x-koordinatfunktionen.

Hvad sker der med y? Jo, y skal erstattes med $y = \sin(2t)$, som man ser ud fra parameterfremstillingen.

Endelig skal grænserne ændres - når $x = 1$ er $t = \dfrac{\pi}{2}$, og når $x = 0$ er $t = 0$.

Vi har nu et integral i t, og dette kan beregnes ganske nemt. Udregningen bliver alt i alt

$$\int_0^1 y\,dx = \int_0^{\pi/2} \sin(2t)\,d(\sin(t)) = \int_0^{\pi/2} \sin(2t)\cos(t)\,dt$$

Man skal nu anvende dobbeltvinkelformlen $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$

$$= \int_0^{\pi/2} 2\sin(t)\cos^2(t)dt$$

og endelig skal man substituere $u = \cos(t)$

$$= \int_1^0 -2u^2 du = \left[-\frac{2}{3}u^3\right]_1^0 = \frac{2}{3}$$

Bemærk, at dette var arealet indesluttet af den 'kvarte kurve'. Det totale areal indesluttet af kurven er fire gange så stort og derfor lig $\frac{8}{3}$.

Opgaver

3.1 Betragt kurven givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 \\ t^4 - 1 \end{pmatrix}$$

Undersøg denne kurve for skæringspunkter med koordinatakserne, punkter, hvori tangenterne er parallelle med koordinatakserne og eventuelle symmetrier.
Tegn kurven.
Bestem arealet af den punktmængde, der indesluttes af kurven og x-aksen.

3.2 Betragt kurven

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 + t^2 - 2t \\ t^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Undersøg denne kurve for skæringspunkter med koordinatakserne, punkter med vandrette eller lodrette tangenter og symmetrier.
Tegn kurven.
Kurven har et dobbeltpunkt. Bestem dette, og bestem vinklen mellem de to tangenter i dobbeltpunktet.

3.3 Betragt kurven med parameterfremstillingen

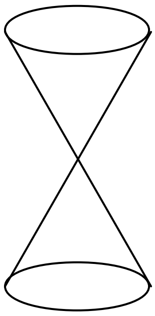
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 - 4 \\ t^3 - t^2 \end{pmatrix}$$

Tegn kurven.
Kurven afgrænser sammen med x-aksen en punktmængde, som har et areal.
Bestem dette areal.

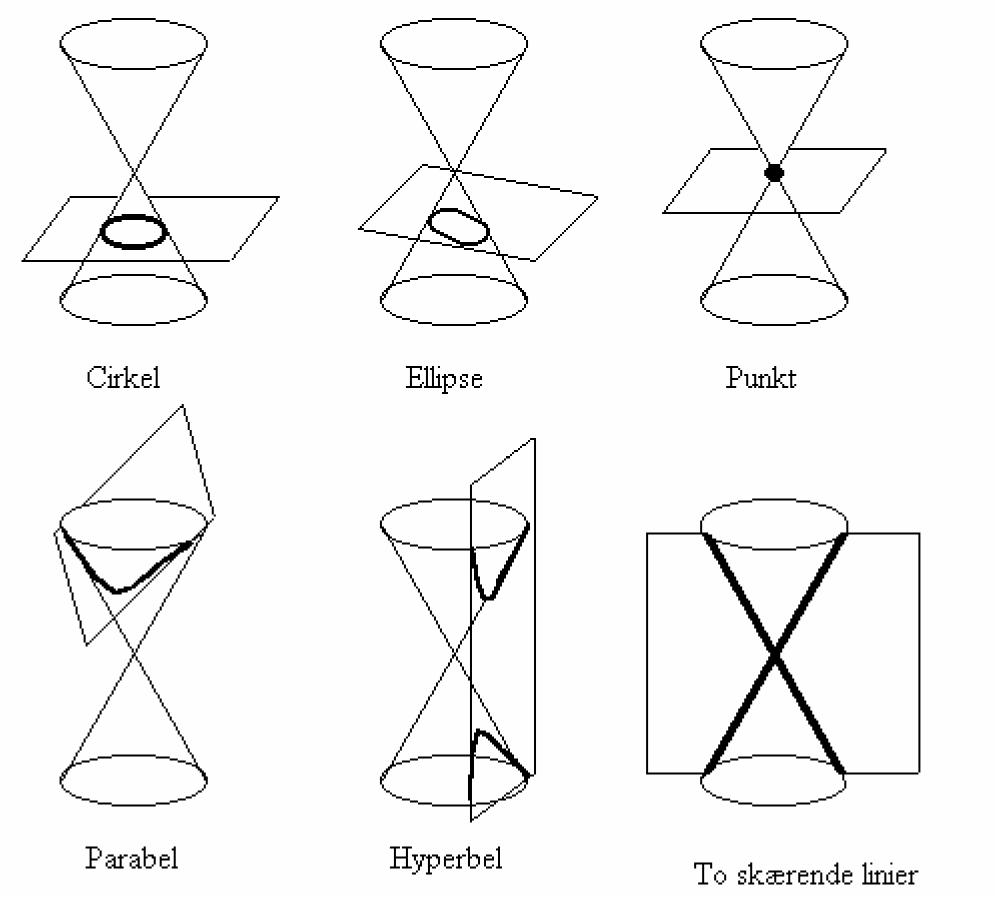
5.4 Keglesnit

Keglesnit er en fælles betegnelse for visse kurver: Cirkler, ellipser, parabler og hyperbler. Disse kurver har nemlig en hel række egenskaber til fælles.

Oprindelige blev keglesnittene studeret af de gamle grækere. Det var også dem, som fandt på selve ordet keglesnit. Denne lidt underlige betegnelse skyldes følgende måde at definere keglesnittene på:



Betragt en dobbeltkegle, dvs. to kegler, som møder hinanden i midten. Vi betragter de punktmængder der fremkommer, når vi snitter en plan med denne dobbeltkegle. Der viser sig at være følgende muligheder:



De to lidt underlige keglesnit, punktet og de skærende linier, betragtes ikke som rigtige keglesnit - de kaldes *degenererede keglesnit*.

Studerer man keglesnittene vha. analytisk geometri, så kan man bevise følgende sætning:

Sætning 4

Lad

$$Q(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

være et *andengradspolynomium* i x og y, og antag, at mindst et af tallene A, B eller C er forskelligt fra 0.

Da vil ligningen

$$Q(x,y) = 0$$

fremstille er keglesnit, og endvidere gælder, at hvis *diskriminanten* $d = B^2 - 4AC$ er

a) positiv, så er keglesnittet en hyperbel eller to skærende linier,

b) negativ, så er keglesnittet en ellipse, en cirkel, et punkt, eller den tomme mængde, og

c) nul, så er keglesnittet en parabel, to parallelle linier, en linie eller den tomme mængde.

Beviset er kompliceret, så det udelades.

Keglesnittene spiller en vis rolle indenfor bl.a. astronomi: Ifølge *Keplers love* og *Newtons gravitationslov* vil et objekt under indflydelse af Solens (eller Jordens) tyngdefelt bevæge sig i en keglesnitformet bane. For planeter og andre gravitationelt bundne objekter vil denne bane typisk være en ellipse. Asterioder, som ikke er bundet af Jordens tyngdefelt, vil derimod bevæge sig i parabel- eller hyperbelformede baner.

Vi vil i de kommende afsnit studere ellipser, parabler og hyperbler. Cirklen fortjener ikke noget særskilt afsnit, idet det er at betragte som et specialtilfælde af en ellipse.

5.5 Ellipsen

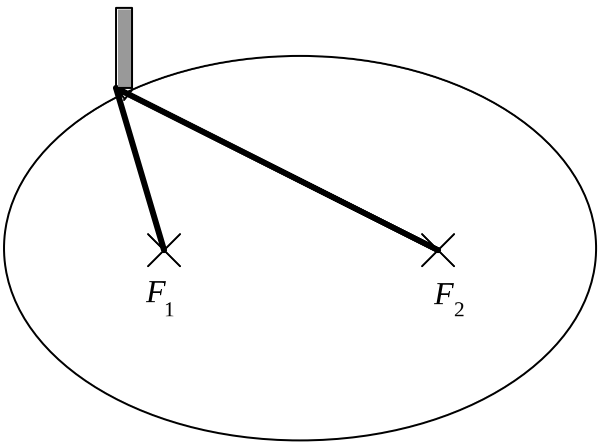
En *ellipse* kan bedst karakteriseres som en fladtrykt cirkel.
Vi vil starte med at beskrive ellipsen på forskellige måder:

Definition 5

Ellipsen med *brændpunkterne* F_1 og F_2 og *storaksen* $2a$ er mængden af de punkter *P*, som opfylder ligningen

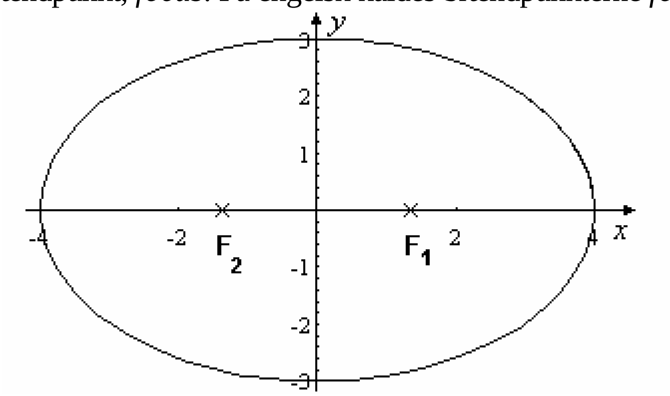
$$|F_1P| + |F_2P| = 2a$$

Denne definition viser, hvorledes man kan tegne en ellipse:



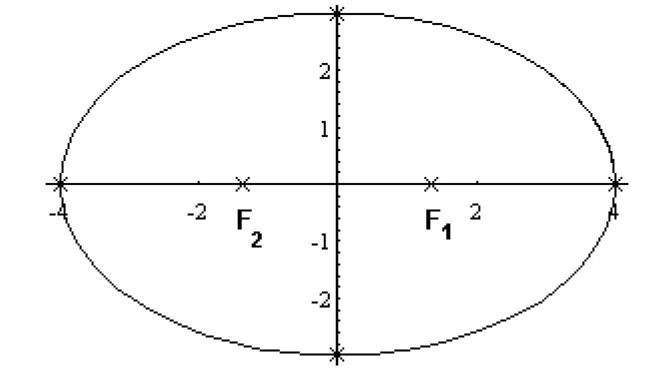
Man tager er stykke snor af længden $2a$ og to tegnestifter, som anbringes i brændpunkterne. Snorens ender bindes i tegnestifterne. Man kan nu tegne ellipsen ved at holde snoren stramt udspændt af en blyant og lade denne blyant glide hele vejen rundt.

Bemærk, at hvis brændpunkterne er sammenfaldende, så fås en *cirkel* med radius *a*. Bemærk endvidere, at brændpunkterne betegnes med symbolet *F*. Dette skyldes det latinske ord for brændpunkt, *focus*. På engelsk kaldes brændpunkterne *focal points.*



For at finde ellipsens ligning skal vi vælge et koordinatsystem. Det viser sig, at det er bedst at vælge et koordinatsystem, således at ellipsens *centrum*, som er punktet midt mellem de to brændpunkter, og koordinatsystemets begyndelsespunkt falder sammen. Endvidere er det smart at vælge *x*-aksen, således at begge brændpunkter ligger hér.

Ellipsen ligger nu i den såkaldte *standardposition*. Skæringspunkterne mellem koordinatakserne og ellipsen kaldes *ellipsens toppunkter,* og der ses at være 4 af dem.



De fire toppunkter har koordinaterne $(a,0)$, $(0,b)$, $(-a,0)$ og $(0,-b)$, hvor *a* er den halve storakse, og *b* kaldes den *halve lilleakse*. (2*b* er da *lilleaksen*).
Brændpunkterne har koordinaterne $(ea,0)$ og $(-ea,0)$, hvor *e* er *excentriciteten.*

Vi har følgende sammenhæng mellem de halve storakser og excentriciteten:

Sætning 6

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad \text{og} \qquad b = \sqrt{a^2 - a^2e^2} = a\sqrt{1-e^2}$$

Bevis:

Toppunktet $T = (0,b)$ ligger på ellipsen, dvs. vi har ligningen

$$|TF_1| + |TF_2| = 2a$$

Idet $F_1 = (ea,0)$ og $F_2 = (-ea,0)$, fås

$$|TF_1| = |TF_2| = \sqrt{(\pm ea - 0)^2 + (0-b)^2} = \sqrt{e^2a^2 + b^2}$$

og ligningen bliver

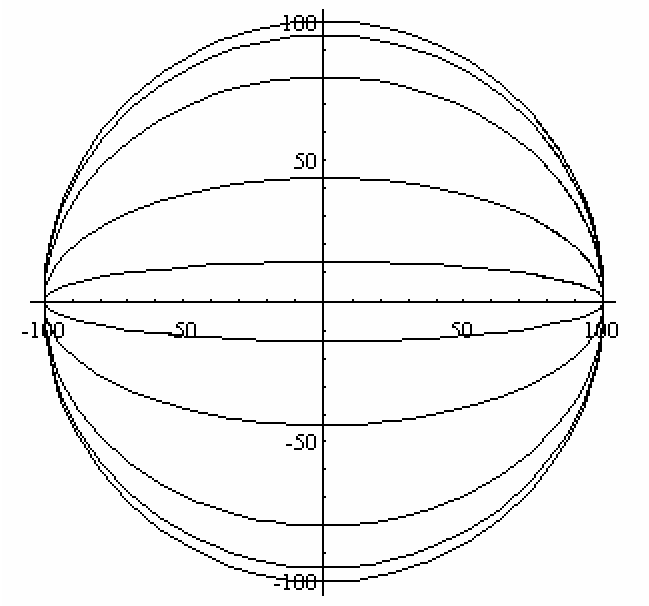
$$2\sqrt{e^2a^2 + b^2} = 2a$$

Divideres denne ligning med 2 og kvadreres, så fås

$$e^2a^2 + b^2 = a^2$$

fra hvilken de to udsagn i sætningen let udledes.

Excentriciteten er et mål for ellipsens fladtrykthed - for en cirkel er $a = b$, og excentriciteten bliver 0. Efterhånden som excentriciteten vokser imod 1, som er excentricitetens maksimale værdi (hvorfor?), bliver ellipsen mere og mere fladtrykt. På figuren nedenunder er vist ellipser med $a = 100$ og excentriciteterne 0; 0.3; 0.6; 0.9 og 0.99.



Ifølge *Kepler's lov* er alle planetbanerne i Solsystemet ellipser. Dette gælder også for kometer og deslige. F.eks. kan man nævne, at Jordens baneexcentricitet er på snollede 0.0167, hvilket giver en næsten cirkulær bane - forskellen mellem storaksen og lilleaksen, i astronomien kaldet *apohelion* og *perihelion*, er på ca. $2 \cdot 10^7$ km, hvilket bør ses i forhold til en middelafstand til Solen på $1.495 \cdot 10^{11}$ km. Afvigelsen er på 0.01%. Halley's komet har derimod en ekstremt excentrisk bane - her er $e = 0.967$.

Vi kan nu opskrive ellipsens ligning:

Sætning 7

Ellipsen i standardposition med storaksen 2*a* og lilleaksen 2*b* har ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Bevis:

Vi lader $P = (x, y)$ være et punkt i planen, som opfylder ligningen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Vi vil vise, at $|PF_1| + |PF_2| = 2a$. For at gøre dette udregnes

$$|PF_1|^2 = \sqrt{(x - ea)^2 + (y - 0)^2}^2 = (x - ea)^2 + y^2 =$$

$$x^2+e^2a^2-2aex+y^2=$$

$$x^2+e^2a^2-2aex+b^2(1-\frac{x^2}{a^2})=$$

$$x^2(1-\frac{b^2}{a^2})+e^2a^2-2aex+b^2=$$

$$x^2e^2+e^2a^2-2aex+(a^2-e^2a^2)=x^2e^2+a^2-2aex=(a-ex)^2$$

og derfor

$$|PF_1|=|a-ex|=a-ex\,,$$

idet $|ex|\le a$.

Tilsvarende fås, at $|PF_2|=a+ex$, og ved addition fås

$$|PF_1|+|PF_2|=2a$$

Afslutningsvis angiver vi en parameterfremstilling for ellipsen:

Sætning 8

Ellipsen med centrum i (0,0) og med storaksen 2*a* og lilleaksen 2*b* har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix} \quad , \quad t\in[0,2\pi]$$

Bevis:

Ved indsættelse i ellipsens ligning fås

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{(a\cos t)^2}{a^2}+\frac{(b\sin t)^2}{b^2}=\cos^2 t+\sin^2 t=1$$

Opgaver

5.1 En ellipse har storaksen 8 og lilleaksen 4. Hvad er excentriciteten? Skitsér ellipsen.

5.2 En ellipse har storaksen 16 og excentriciteten 0,5. Hvad er lilleaksen?

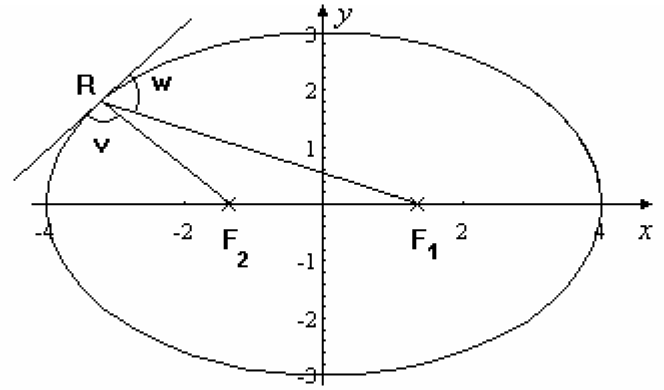
Skitsér ellipsen

5.3 Bevis, at en ellipse med storaksen 2a og lilleaksen 2b har arealet πab
(Vink: Brug parameterfremstillingen fra sætning 8).
Der findes i øvrigt ingen simpel formel for omkredsen af en ellipse.

5.4 Ellipsen opfylder følgende geometriske egenskab:

Lad *R* være et tilfældigt punkt på ellipsens periferi, og lad v og w være vinklerne mellem henholdsvis liniestykket RF_2 og tangenten i *R*, og mellem liniestykket RF_1 og tangenten i *R*.

Så er $v = w$.



Bevis dette. (Vink: Se beviset for sætning 11).

Denne egenskab anvendes indenfor lægevidenskaben: Man behandler for nyresten ved at knuse nyrestenen med ultralyd. Denne ultralyd skal helst koncentreres i patientens nyre, uden at resten af patienten får særligt store doser ultralyd.
Dette opnås ved at placere patienten i et ellipsoide-formet kammer (ellipsoiden er ellipsens omdrejningslegeme). Patienten placeres, således nyren befinder sig i det ene brændpunkt, og en stærk ultralydskilde placeres i det andet brændpunkt. Ultralyden udgår nu fra det ene brændpunkt, reflekteres af væggene og samler sig i det andet brændpunkt, hvor nyrestenen knuses.

5.6 Parablen

Parablen er et velkendt objekt, så vi starter med at resumere de væsentligste egenskaber:

Sætning 9

Kurven med ligningen $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, fremstiller en parabel. *Toppunktet* for parablen er punktet med koordinaterne

$$\left(-\frac{b}{2a};-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

En parabel med toppunktet (0;0) siges at være i *standardposition*; den har da ligningen $y = ax^2$.

En anden måde at karakterisere en parabel på er som følger:

Sætning 10

Parablen i standardpositionen med ligningen $y = ax^2$ kan beskrives som mængden af punkter P i planen, som opfylder $|PF| = \text{dist}(P,l)$. Her er *brændpunktet F* og *ledelinien l* givet ved $F = (0;\frac{1}{4a})$ og $l: y = -\frac{1}{4a}$.

Bevis:

Hvis punktet P ligger på parablen, så kan dets koordinater skrives som $P = (x, ax^2)$. Vi har da

$$|PF| = \sqrt{(x-0)^2 + (ax^2 - \frac{1}{4a})^2} = \sqrt{x^2 + a^2x^4 + \frac{1}{16a^2} - \frac{1}{2}x^2} =$$

$$\sqrt{a^2x^4 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16a^2}} = \sqrt{(ax^2 + \frac{1}{4a})^2} = \left|ax^2 + \frac{1}{4a}\right|$$

og idet linien l er vandret, så er $\mathrm{dist}(P, l)$ forskellen i y-koordinater:

$$\mathrm{dist}(P, l) = \left|ax^2 - (-\frac{1}{4a})\right| = \left|ax^2 + \frac{1}{4a}\right|$$

Ergo, hvis P ligger på parablen, så er $|PF| = \mathrm{dist}(P, l)$

Omvendt, lad punktet $P = (x, y)$ opfylde, at $|PF| = \mathrm{dist}(P, l)$. Vi skal da vise, at P ligger på parablen, dvs. at $y = ax^2$. Vi har

$$|PF| = \sqrt{(x-0)^2 + (y - \frac{1}{4a})^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - \frac{1}{2a}y + \frac{1}{16a^2}}$$

og

$$\mathrm{dist}(P, l) = \left|y - (-\frac{1}{4a})\right| = \left|y + \frac{1}{4a}\right|$$

Sættes disse lig hinanden, fås ved kvadrering på begge sider

$$x^2 + y^2 - \frac{1}{2a}y + \frac{1}{16a^2} = y^2 + \frac{1}{2a}y + \frac{1}{16a^2}$$

eller

$$x^2 = \frac{1}{a}y$$

hvilket viser, at $y = ax^2$, og at P derfor ligger på parablen.

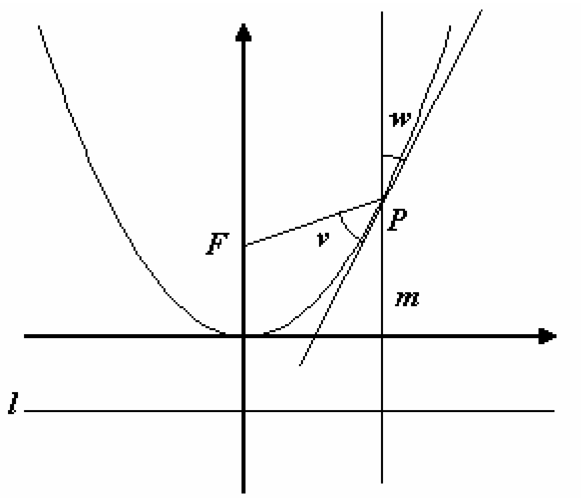
Vi afslutter med følgende egenskab ved parablen, som i øvrigt forklarer, hvorledes en *parabolantenne* fungerer:

Sætning 11

Lad P være et punkt på parablen med ligningen $y = ax^2$, lad m være den lodrette linie gennem P, og lad t være tangenten til parablen i punktet P. Der gælder da, at

$$v = w$$

hvor v er vinklen mellem liniestykket PF og t, og w er vinklen mellem linierne t og m. (Se figuren).



Bevis:

Vi antager for simpelheds skyld, at $a > 0$.

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ at^2 \end{pmatrix}$$

er en parameterfremstilling for parablen, og det betyder, at vi kan skrive P på formen $(t_0, a \cdot t_0{}^2)$, hvor t_0 er et fast tal. Endvidere ses, at en retningsvektor $\vec{t}$ for tangenten er

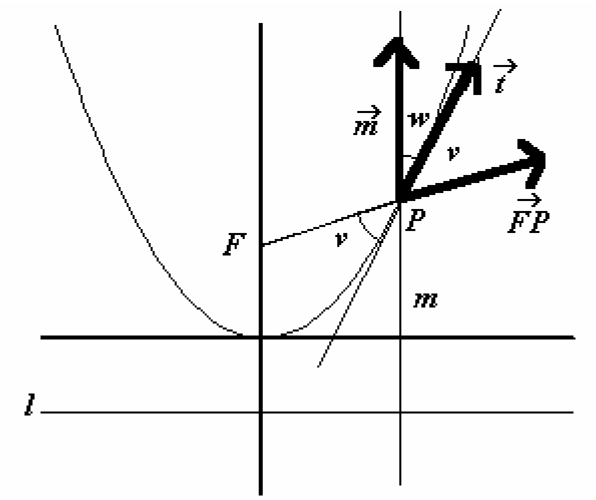
$$\vec{t} = \vec{r}\,'(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2at_0 \end{pmatrix}$$

Vi har også, at

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er en retningsvektor for linien *m*, samt

$$\overrightarrow{FP} = \begin{pmatrix} t_0 \\ at_0{}^2 - \dfrac{1}{4a} \end{pmatrix}$$



Af figuren ses, at vi skal vise, at vinklerne mellem $\vec{m}$ og $\vec{t}$ og mellem $\vec{t}$ og $\overrightarrow{FP}$ er ens. Det er da nok at vise, at cosinus til vinklerne er ens, dvs. at vise, at

$$\frac{\vec{m} \cdot \vec{t}}{|\vec{m}||\vec{t}|} = \frac{\overrightarrow{FP} \cdot \vec{t}}{\left|\overrightarrow{FP}\right||\vec{t}|}$$

eller, efter en mindre omskrivning:

$$|FP|\vec{m}\cdot\vec{t} = |\vec{m}|\,\overrightarrow{FP}\cdot\vec{t}$$

Nu er

$$|\vec{m}| = \left|\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right| = 1 \qquad\qquad \vec{m}\cdot\vec{t} = 2at_0$$

$$|FP| = \sqrt{t_0{}^2 + (at_0{}^2 - \frac{1}{4a})^2} = \sqrt{a^2t_0{}^4 + \frac{1}{2}t_0{}^2 + \frac{1}{16a^2}} =$$
$$\sqrt{(at_0{}^2 + \frac{1}{4a})^2} = \left|at_0{}^2 + \frac{1}{4a}\right| = at_0{}^2 + \frac{1}{4a}$$

idet vi har antaget, at $a > 0$, og

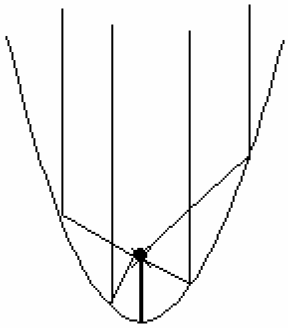
$$\overrightarrow{FP}\cdot\vec{t} = \begin{pmatrix} t_0 \\ at_0{}^2 - \frac{1}{4a}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2at_0\end{pmatrix} = t_0 + 2a^2t_0{}^3 - \frac{1}{2}t_0 = 2a^2t_0{}^3 + \frac{1}{2}t_0$$

så vores ligning bliver

$$(at_0{}^2 + \frac{1}{4a})2at_0 = 2a^2t_0{}^3 + \frac{1}{2}t_0$$

hvilket jo umiskendeligt er et sandt udsagn.

En *parabolantenne* er en antenne formet som en *paraboloide*, som jo er den figur, man får, når man drejer en parabel omkring sin symmetriakse (hvis parablen er i standardpositionen, så er symmetriaksen netop y-aksen). Parabolantennen er lavet af et materiale, som kan reflektere radiobølger; normalt er dette et metal; og i parablens brændpunkt sidder selve antennen, dvs. den dims, hvori radiobølgerne opfanges og sendes videre til f.eks. radioen eller TV'et.



Antennen rettes mod en fjerntliggende satellit, fra hvilken radiobølgerne kommer parallelt, på figuren lodret nedad. Disse radiobølger rammer parabolantennen og reflekteres. Ifølge den fra fysikken velkendte *reflektionslov* er indfaldsvinklen, dvs. vinklen mellem den indfaldende radiobølge og parablens tangent, lig udfaldsvinklen, som er vinklen mellem den udgående radiobølge og parabeltangenten. Men ifølge sætning 11 går denne udgående radiobølge gennem brændpunktet F, hvori selve antenne sidder. Alt i alt opnår man, at hele den stråling, som rammer den relativt store parabolantenne, faktisk koncentreres i den lille antenne, hvorved radiosignalet forstærkes betydeligt.

5.7 Hyperblen

Den sidste af de tre slags keglesnit er *hyperblen.* Denne kan defineres som:

Definition 12

Hyperblen med *brændpunkterne* F_1 og F_2 og storaksen $2a$ er defineret som mængden af de punkter P, som opfylder ligningen

$$\left| |PF_1| - |PF_2| \right| = 2a$$

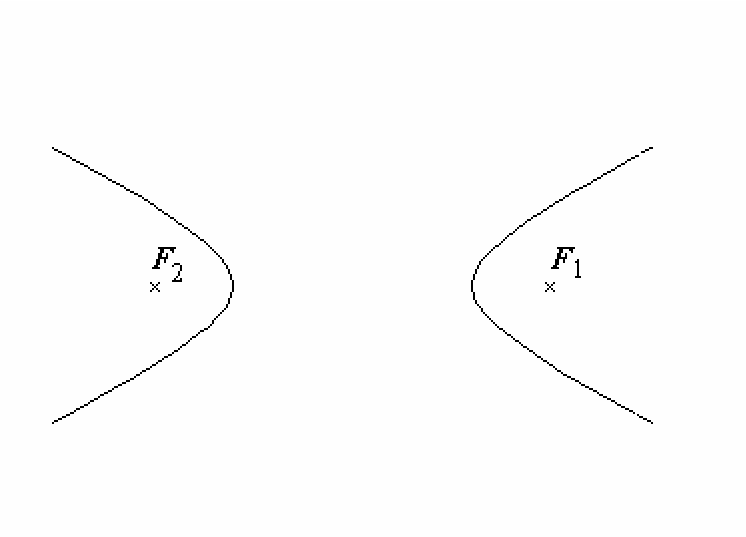
Excentriciteten e af hyperblen defineres som

$$e = \frac{|F_1F_2|}{2a}$$

Endelig defineres hyperblens *lilleakse* $2b$ ved

$$b^2 = a^2(e^2 - 1)$$

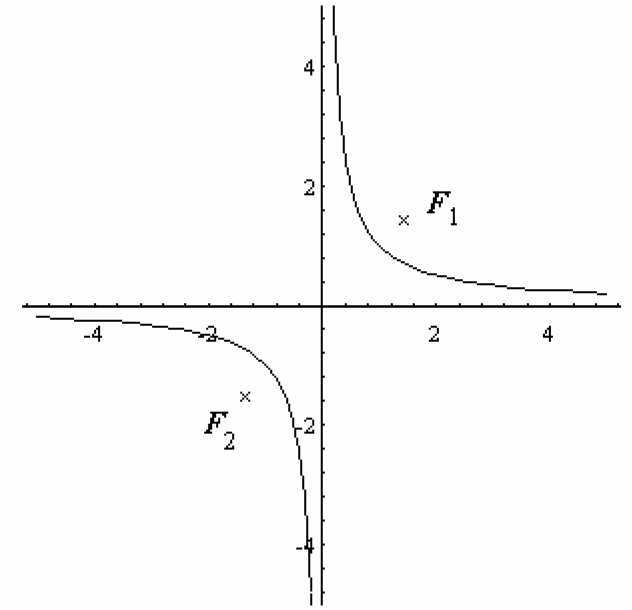
En typisk hyperbel ser ud som følger:



Der er en vis lighed mellem ellipser og hyperbler: En ellipse består af punkter, hvor *summen* af afstandene til brændpunkterne er konstant, mens en hyperbel består af punkter, hvor *differensen* mellem afstandene til brændpunkterne er konstant. Endvidere minder definitionerne af storaksen, lilleaksen og excentriciteten om hinanden. Vi skal senere se andre ligheder; men først studerer vi den mest kendte hyperbel:

Sætning 13

Grafen for funktionen $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ er en hyperbel med brændpunkterne $F_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ og $F_2 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, storaksen $2a = 2\sqrt{2}$, excentriciteten $e = \sqrt{2}$ og lilleaksen $2b = 2\sqrt{2}$



Bevis:

Vi betragter punktet $P = (x, \frac{1}{x})$. For dette punkt haves

$$|PF_1| = \sqrt{(x - \sqrt{2})^2 + (\tfrac{1}{x} - \sqrt{2})^2} =$$

$$\sqrt{x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 + \tfrac{1}{x^2} - \tfrac{2\sqrt{2}}{x} + 2} =$$

$$\sqrt{(x + \tfrac{1}{x} - \sqrt{2})^2} = \left|x + \tfrac{1}{x} - \sqrt{2}\right|$$

og

$$|PF_2| = \sqrt{(x + \sqrt{2})^2 + (\tfrac{1}{x} + \sqrt{2})^2} =$$

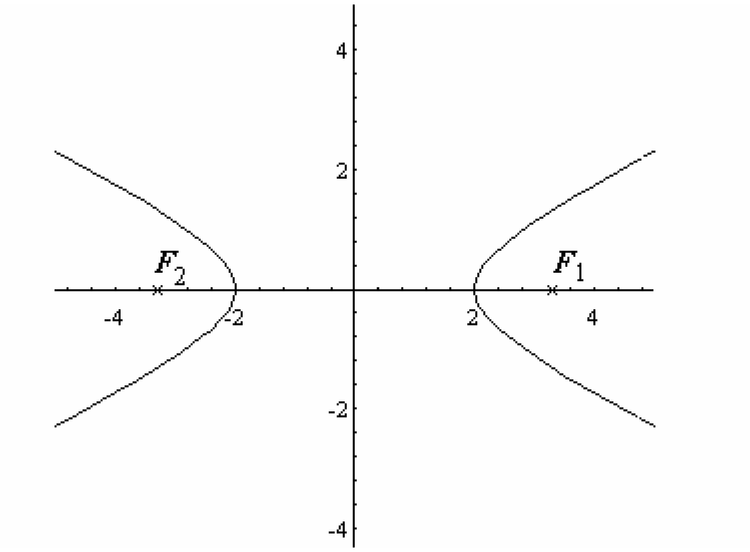
$$\sqrt{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 + \tfrac{1}{x^2} + \tfrac{2\sqrt{2}}{x} + 2} =$$

$$\sqrt{(x + \tfrac{1}{x} + \sqrt{2})^2} = \left|x + \tfrac{1}{x} + \sqrt{2}\right|$$

Det ses umiddelbart, at

$$\left| |PF_1| - |PF_2| \right| = 2\sqrt{2} = 2a$$

En hyperbel, hvor brændpunkterne ligger på x-aksen, symmetrisk placeret om origo, siges at ligge i *standardpositionen*.



Sætning 14

Hyperblen med storaksen $2a$ og excentriciteten e har, når den ligger i standardpositionen:

a) brændpunkterne $(-ea,0)$ og $(ea,0)$, og

b) ligningen $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

.

Endvidere gælder, at

c) hyperblen skærer x-aksen i punkterne $(-a,0)$ og $(a,0)$,

d) hyperblen har de skrå asymptoter $y = \dfrac{b}{a}x$ og $y = -\dfrac{b}{a}x$

Bevis:

a) Idet brændpunkterne ligger på x-aksen symmetrisk om origo, må de have koordinaterne $F_1 = (x_0,0)$ og $F_2 = (-x_0,0)$. Definitionen af excentriciteten giver nu,

$$2x_0 = |F_1F_2| = e \cdot 2a \qquad \text{eller} \qquad x_0 = ea\,.$$

b) Beviset herfor minder meget om det tilsvarende bevis for ellipsens ligning (9).

c) Sættes $y = 0$ i hyperblens ligning, så ses, at hyperblens skæringspunkter med x-aksen netop er $(-a,0)$ og $(a,0)$.

d) Vi viser, at funktionen $f(x) = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$ har den skrå asymptote $y = \frac{b}{a}x$. (Den anden asymptote kan behandles tilsvarende). Betragt differensen

$$f(x) - \frac{b}{a}x = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}(\sqrt{x^2 - a^2} - x) =$$

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{(\sqrt{x^2 - a^2} - x)(\sqrt{x^2 - a^2} + x)}{(\sqrt{x^2 - a^2} + x)} = \frac{b}{a} \cdot \frac{(x^2 - a^2) - x^2}{(\sqrt{x^2 - a^2} + x)} =$$

$$\frac{b}{a} \cdot \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}$$

Når x går imod uendelig, så vil nævneren $\sqrt{x^2 - a^2} + x$ ligeledes gå imod uendelig, hvorved hele udtrykket vil gå imod 0.

Vi afslutter med endnu en lighed mellem ellipsen og hyperblen.

Definition 15

Funktionerne *hyperbolsk sinus* og *hyperbolsk cosinus* defineres ved

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{og} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Disse navne begrundes af følgende sætning, som skal sammenlignes med sætning 8.

Sætning 16

Betragt hyperblen i standardposition med stor- og lilleakserne $2a$ og $2b$. Denne hyperbels *højre gren* er banekurven for parameterfremstillingen

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} a\cosh x \\ b\sinh x \end{pmatrix}$$

Bevis:

Vi indsætter parameterfremstillingen i hyperblens ligning

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2\cosh^2 t}{a^2} - \frac{b^2\sinh^2 t}{b^2} = \cosh^2 t - \sinh^2 t =$$

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{2x}}{4} =$$

$$\frac{4e^x e^{-x}}{4} = 1$$

Dette viser, at parameterfremstillingens banekurve er en del af hyperblen. Nærmere eftertanke viser ligeledes, at $\cosh x > 1$, hvilket betyder, at kun hyperblens højre gren (eller sammenhængskomponent) frembringes af parameterfremstillingen.

Facitliste

1.1 Descartes' blad: (0,0) er **ikke** dobbeltpunkt
Trebladede rose (0,0) er tripelpunkt

1.2 $y = x^2 - 7x + 15$

1.3 Cirkel med centrum i (-6,7) og radius 5
$(x+6)^2 + (y-7)^2 = 25$

1.4 (0,0) er dobbeltpunktet - det antages for $t = 1$, $t = -1$

2.1 $9(x-6) + 2(y+11) = 0$

2.2 (0,0) er dobbeltpunktet - det antages for $t = 0$, $t = 2$
$26{,}57°$

2.4 $\frac{80}{27}\sqrt{10} - \frac{13}{27}\sqrt{13}$

2.5 d) Cirklen (sæt $a = 0$)

3.1 skærer akserne i (0,-1) , (1,0) , (-1,0)
tangenten er aldrig parallel med koordinatakserne (for (0,–1) er tangentvektoren nulvektoren)
symmetrisk om y-aksen
arealet er $\frac{8}{7}$

3.2 skærer akserne i (0,-4) , (0,-3) og (0,0)
tangent parallel med x-aksen i (0,-4)
tangent parallel med y-aksen i parameterværdierne $\frac{-2 \pm \sqrt{28}}{6}$
symmetrisk om y-aksen
dobbeltpunktet er (0,0) ($t = 2$, $t = -2$) 79,38°

3.3 $\frac{1}{10}$

5.1 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

5.2 $2b = 8\sqrt{3}$