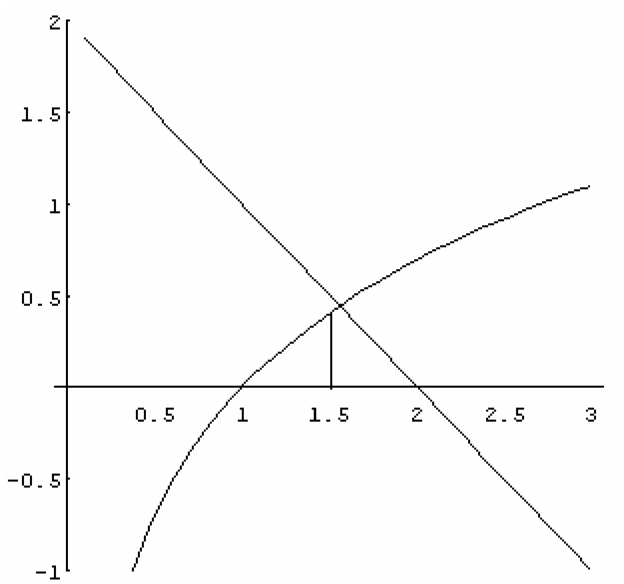
Matematikkens mysterier

- på et obligatorisk niveau

af

Kenneth Hansen

5. Differentialregning

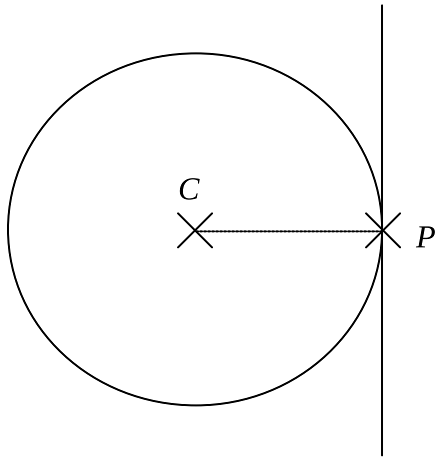


Hvornår skærer graferne for funktionerne
$x \mapsto \ln x$ og $x \mapsto 2 - x$
hinanden?

5. Differentialregning

5.1 Differentialregning

Differentialregning handler i første omgang om at finde tangenter til vilkårlige kurver. Vi kender i øjeblikket kun en kurve, for hvilken vi kan finde tangenter, nemlig cirklen, så lad os et øjeblik se, hvordan cirkeltangenter opfører sig:



Vi har en cirkel med centrum *C*, og kigger på tangenten til cirklen gennem punktet *P*, som naturligvis ligger på cirkelperiferien.

Denne tangent opfylder tre egenskaber:

1) Tangenten er orthogonal med liniestykket *PC*, som er radius i cirklen.

2) Tangenten skærer kun cirklen i ét punkt.

3) Forstørrer man cirklen og tangenten uendeligt meget op, så er cirklen og tangenten sammenfaldende.

Egenskab 3) kræver vist en nærmere forklaring:

Hvis man kigger på Jordkloden fra meget lang afstand, f.eks. fra et rumskib, så er Jordkloden helt klart en kugle. Kigger man ud fra et højt sted - Aalborgtårnet eller Himmelbjerget - så ser Jorden umiddelbart flad ud; men man kan dog ane, ved at kigge ud imod horisonten, at Jorden faktisk krummer en smule. Står man midt på Nytorv, så ser Jorden ganske flad ud. Og er man en myre, så vil den vanvittige idé, at Jorden er rund, aldrig falde en ind.

Kort sagt - Jorden er nok en kugle, men set på meget små afstande er den en plan.

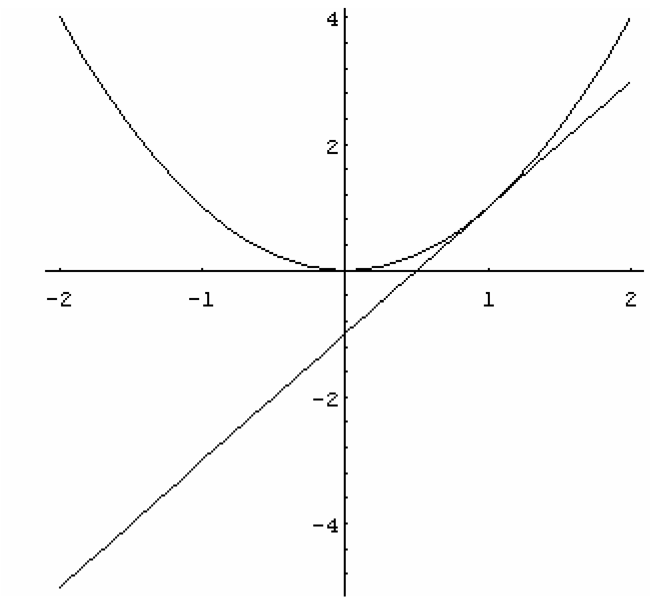
En matematiker ville sige, at Jorden *globalt* er en kugle, men *lokalt* en plan.

Tilsvarende er en cirkel globalt set cirkelformet, men lokalt set en ret linie. Forstørrer vi cirklen op omkring punktet *P*, så vil cirklen nemlig ligne en ret linie. Denne rette linie er faktisk tangenten.

Lad os nu betragte en anden velkendt kurve, nemlig parablen med ligningen $y = x^2$. Vi vil gerne finde en tangent til parablen i punktet $(1;1)$.

Vi kan ikke bruge egenskab 1) til at finde tangenten - parablen har hverken et centrum eller en radius. Egenskab 2) virker heller ikke - på tegningen nedenunder skærer både den skrå linie (med ligningen $y = 2x - 1$) og den lodrette linie (med ligningen $x = 1$) parablen i netop et punkt. Hvilken skal vi så vælge som tangenten?

Men egenskab 3) er god at bruge! Forstørrer man nemlig parablen, så ser man, at omkring punktet $(1;1)$ er parablen lokalt en ret linie, som er sammenfaldende med den skrå linie med ligningen $y = 2x - 1$. Og det er denne linie, vi vil betragte som tangenten til parablen i punktet $(1;1)$.



Helt generelt betragter vi grafen for en funktion *f*, dvs. vi betragter kurven med ligningen $y = f(x)$. Hvad har vi egentligt brug for at vide for at kunne beskrive tangenten til kurven i punktet $(x_0, f(x_0))$?

Ligningen for en linie er jo generelt givet ved

$$y = y_0 + a(x - x_0)$$

hvor a er liniens hældningskoefficient, og (x_0, y_0) er et punkt, som linien går igennem. Men vi ved jo, at tangenten går gennem punktet $(x_0, f(x_0))$, så det er kun hældningskoefficienten a, vi ikke kender.

Nu vil tangenthældningen a jo afhænge af, hvor på grafen vi befinder os, så denne tangenthældning betegner vi med $f'(x_0)$ (læses: f mærke af x nul). Vi indikerer således, at tangenthældningen afhænger af x-koordinaten til *tangentens røringspunkt* $(x_0, f(x_0))$. Altså

Definition 1 (FS)

Hældningskoefficienten af tangenten til grafen for funktionen $f(x)$ i røringspunktet $(x_0, f(x_0))$ betegnes med $f'(x_0)$.

Denne nye funktion $f'(x)$ betegnes som *den differentierede funktion til* $f(x)$, eller som *differentialkvotienten til* $f(x)$, eller som den *afledede funktion.*

Vi har faktisk også næsten bevist følgende sætning:

Sætning 2 (FS)

Tangenten til grafen for funktionen $f(x)$ i røringspunktet $(x_0, f(x_0))$ har ligningen

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Bevis:

I den generelle ligning for en linie med hældningskoefficienten a gennem punktet (x_0, y_0):

$y = y_0 + a(x - x_0)$

erstatter man a med $f'(x_0)$ og y_0 med $f(x_0)$.

Det eneste problem er blot at kunne beregne differentialkvotienten til en given funktion. Det er dette, resten af dette hæfte handler om!

Lad os varme op med en opgave:

Opgave 1.1

a) Tegn på millimeter-papir en graf over funktionen $f(x) = x^2$. x-værdierne skal gå fra −3 til 3.

b) Tegn efter bedste skøn tangenterne i punkterne på grafen med x-koordinaterne −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3.

c) Find hældningskoefficienterne til de 7 tangenter, og udfyld følgende skema:

x_0	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x_0)$							
$f'(x_0)$							

d) Man skulle nu gerne opdage, at tangenthældningerne (den nederste række) har en sammenhæng med x-værdierne (øverste række). Hvilken sammenhæng?

Vi skulle gerne i den foregående øvelse have opdaget, at

hvis $f(x) = x^2$, så er $f'(x) = 2x$.

En lidt simplere måde at skrive dette på er følgende

$$(x^2)' = 2x$$

Opgave 1.2

Lav tilsvarende undersøgelser for funktionerne:

1) $f(x) = x^3$, $x_0 = -2, -1, 0, 1, 2$

2) $f(x) = \sqrt{x+4}$, $x_0 = -4, -3, 0, 2, 4, 5$

3) $f(x) = e^x$, $x_0 = -2, -1, 0, 1, 2$

4) $f(x) = 10^x$, $x_0 = -2, 1, 0, 1$

5) $f(x) = \ln x$, $x_0 = \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, 5$

6) $f(x) = \log x$, $x_0 = \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, 5$

7) $f(x) = |x-2| + 2$, $x_0 = 0, 1, 2, 3, 4$.

I opgave 1.2 skete der et par sjove ting:

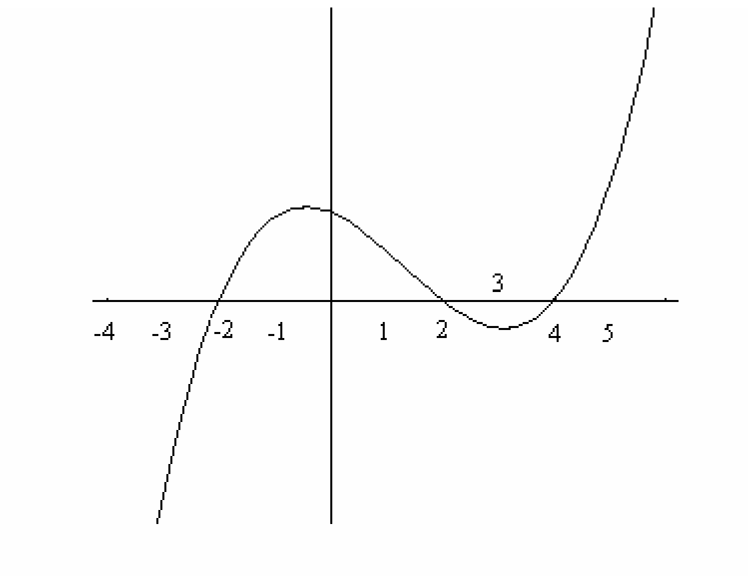
I punkt 2) opdagede man, at funktionen $f(x) = \sqrt{x+4}$ har en *lodret* tangent i punktet $(-4; 0)$. Idet en lodret linie ingen hældningskoefficient har, kan man ikke differentiere $\sqrt{x+4}$ i punktet med x-koordinaten -4.

I punkt 7) opdagede man, at grafen for funktionen $f(x)=|x-2|+2$ knækker i punktet $(2;2)$. Uanset hvor meget man forstørrer grafen, vil der her altid være et knæk, og det er umuligt at definere en tangent. Igen er det altså umuligt at differentiere funktionen her.

Differentialregning kan anvendes til temmeligt mange ting. Bl.a. kan man ved hjælp af differentialregning se, hvornår en funktion er voksende eller aftagende (funktionens *monotoniforhold*), og man kan let finde de steder, hvor funktionen er størst eller mindst. Vi giver et eksempel:

Eksempel

Betragt funktionen *f*, hvis graf er vist nedenunder:



Vi er interesserede i at udfylde følgende skema - ikke med tal, for dem kan vi ikke aflæse på grafen, men med fortegn:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$									
$f'(x)$									

Umiddelbart kan vi se, at $f(-3)<0$, idet punktet på grafen med *x*-koordinaten -3 ligger under *x*-aksen, og at $f(-2)=0$ og $f(-1)>0$. På denne måde kan den første række i skemaet let udfyldes.

$f'(-3)>0$, fordi en tangent til grafen med røringspunktet (-3,*f*(-3)) vil være opadrettet - grafen er jo voksende hér.

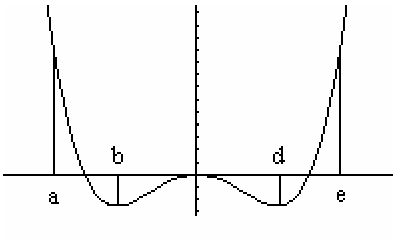
$f'(3)=0$, fordi tangenten her er vandret. Vi bemærker, at vi i punktet $(3; f(3))$ har et *lokalt minimum* for funktionen f - omkring $x=3$ er alle funktionsværdierne større end $f(3)$.

Opgave 1.3

Udfyld resten af skemaet ovenfor.

Opgave 1.4

Betragt grafen for funktionen g nedenfor:



Der er markeret 5 punkter: a, b, $c=0$, d og e.

Udfyld skemaet nedenunder med de korrekte fortegn:

x	a	b	c	d	e
$g(x)$					
$g'(x)$					

Opgave 1.5

Nedenfor er angivet fortegnene for $h(x)$ og $h'(x)$ for udvalgte x-værdier. Skitsér et muligt forløb for grafen for h:

x	-2	-1	0	1	2
$h(x)$	+	0	-	0	+
$h'(x)$	0	-	0	+	+

Opgave 1.6

Man kan bevise, at hvis

$$f(x) = \sqrt{x}$$

så er

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

(x må naturligvis ikke være 0).

Find ligningerne for tangenterne til grafen for f med røringspunkterne

a) $(1, f(1))$

b) $(9,3)$

c) $(4, f(4))$

d) $(5, f(5)))$

Opgave 1.7

Betragt funktionen g givet ved $g(x) = x^3$ og $g'(x) = 3x^2$.

a) Bestem ligningerne for de to tangenter til grafen for g, og som har røringspunkterne $(1, g(1))$ og $(2, g(2))$.

b) Bestem et gradtal for vinklen mellem disse to tangenter.

c) Bestem røringspunktet for den vandrette tangent til grafen for g.

5.2 Funktioner

Enhver videnskab har et eller flere begreber, som er altafgørende indenfor denne videnskab. F.eks. er det vigtigste begreb indenfor fysikken *energi*, og i kemi snakker man ikke om andet end *atomer* og *kemiske bindinger*. Den moderne biologi bygger på *genetikken*. Det allervigtigste begreb indenfor matematikken er

funktionen

Så hvad er en funktion?

Den naive måde at betragte en funktion på er at sige, at en funktion er en maskine: Man propper et tal (eller noget andet) ind i funktionen, som så tænker lidt og spytter et tal ud.

F.eks. vil funktionen $\sqrt{}$ spytte tallet 3 ud, når tallet 9 puttes ind.

En mere præcis definition er

Definition 3

En *funktion* er et udtryk af formen

$$f : A \to B : x \mapsto f(x)$$

hvor
A er en mængde, som kaldes *definitionsmængden*, Dm(f),
B er en mængde, som kaldes *sekundærmængden*, Sm(f),
$x \mapsto f(x)$ kaldes *forskriften*.

Udtrykket $f(x)$ skal være defineret for alle elementer $x \in A$, og *funktionsværdien* $f(x)$ skal altid være element i sekundærmængden B.

Achtung: Sekundærmængden er **ikke** det samme som funktionens værdimængde! (Hvad værdimængden er, får vi først svar på i et senere hæfte)

Eksempel

Her er nogle funktioner, som alle er forskellige (hvorfor?)

$$f_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto x^2$$
$$f_2 : \mathbf{R} \to [0;\infty[: x \mapsto x^2$$
$$f_3 : [0;\infty[\to [0;\infty[: x \mapsto x^2$$
$$f_4 : [0;\infty[\to \mathbf{R} : x \mapsto x^2$$

Nedenstående er *ikke* funktioner (hvorfor?)

$$g_1 : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto \frac{1}{x} \qquad\qquad g_2 :]0;\infty[\to [1,2] : x \mapsto \frac{1}{x}$$

Normalt er man lidt sløset med at angive definitions- og sekundærmængden for en funktion - man bruger nedenstående regel:

Med mindre andet er angivet, så er funktionens definitionsmængde og sekundærmængde den størst mulige.

I praksis lader man Dm(f) være alle de x-værdier, hvori funktionen kan defineres, og man lader Sm(f) være mængden af alle de reelle tal, $\mathbf{R}$.

Forskriften for en funktion kan være mange ting - et regneudtryk, et tabelopslag osv.; men det vigtigste er, at forskriften kun givet ét output for et givet input.

En historie

En dag var Mette og Michael henne i Møllekøbing Super-Dupér for at købe mælk. Mette gik først ind og købte en liter letmælk. "Det bliver 4,25", sagde kassedamen. Så gik Michael ind og købte en liter letmælk. "Det bliver 12,75", sagde kassedamen. Det blev Michael sur over, og han spurgte: "Hvorfor det?". "Jo", svarede kassedamen, "her i Møllekøbing Super-Dupér er prisen ikke en funktion af varen".

Havde kassedamen ret?

Har man nogle funktioner, så kan man konstruere nye funktioner ud fra disse.

Definition 4

Lad $f: A \to \mathbf{R}$ og $g: B \to \mathbf{R}$ være funktioner. *Sumfunktionen* defineres da som

$$f+g: A \cap B \to \mathbf{R}: x \mapsto f(x)+g(x)$$

Forskriften for $f+g$ er altså bare summen af forskrifterne for f og g, mens definitionsmængden for $f+g$ er **fællesmængden** mellem definitionsmængderne for f og g. Det er nødvendigt at tage denne fællesmængde, fordi kun indenfor denne er man sikker på, at begge addenderne er definerede.

Eksempel

Betragt funktionerne

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}: x \mapsto x^2$$

$$g: [0;\infty[\to \mathbf{R}: x \mapsto \sqrt{x}$$

$$h: \mathbf{R} \to \mathbf{R} \setminus \{0\}: x \mapsto \frac{1}{x}$$

Sumfunktionerne er

$$f+g: [0,\infty[\to \mathbf{R}: x \mapsto x^2+\sqrt{x}$$

$$f+h: \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}: x \mapsto x^2+\frac{1}{x}$$

$$g+h:]0,\infty[\to \mathbf{R}: x \mapsto \sqrt{x}+\frac{1}{x}$$

Man kan naturligvis også trække funktioner fra hinanden, gange to funktioner eller endda dividere to funktioner. Dog skal man passe på, når man dividerer to funktioner - nævneren må ikke være 0 !

Definition 5

Lad $f : A \to \mathbf{R}$, $g : B \to \mathbf{R}$ og $h : C \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$ være funktioner. Da defineres

$$f - g : A \cap B \to \mathbf{R} : x \mapsto f(x) - g(x)$$

og

$$f \cdot g : A \cap B \to \mathbf{R} : x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

og

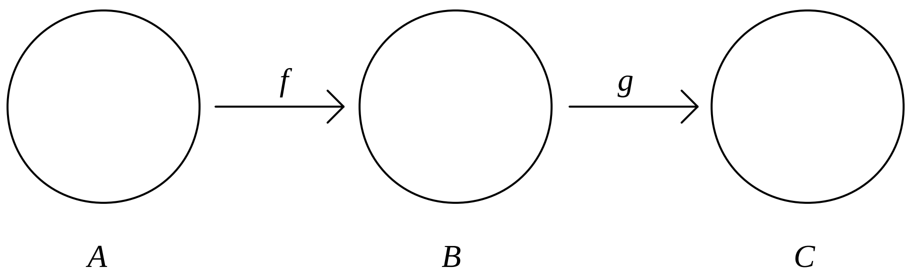
$$\frac{f}{h} : A \cap C \to \mathbf{R} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

Bemærk, at man undgår, at funktionen h kan antage værdien 0 ved at udelade 0'et fra sekundærmængden for h.

Hvis man alligevel vil dividere med en funktion, som kan antage værdien 0, så må man udelukke nulpunkterne fra definitionsmængden.

Endelig kan man *sammensætte* funktioner:

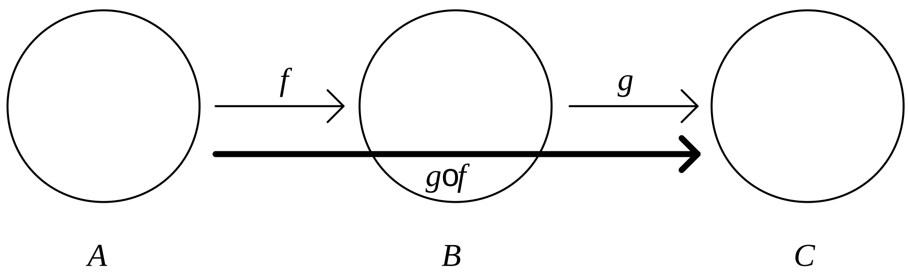
Betragt to funktioner $f : A \to B$ og $g : B \to C$. Lidt naivt kan man opfatte f som en maskine, der tager et element fra mængden A og laver det om til et element i B, og g som en maskine, der laver et element i B om til et element i C.



Nu kunne man jo få den vanvittige idé at lave en ny funktion, som skal gøre følgende:

> Et element $x \in A$ laves om af funktionen f til et element $f(x) \in B$. Men elementer i B er guf for g, og derfor kan g æde $f(x)$ og derefter opgylpe elementet $g(f(x)) \in C$.

Men dette er jo forskriften for en funktion, som går fra A til C:



Denne funktion betegnes $g \circ f$ - og dette udtales 'g bolle f'.

> **Definition 6**
>
> Lad $f : A \to B$ og $g : B \to C$ være to funktioner, således at $\mathrm{Sm}(f) = \mathrm{Dm}(g)$. Den *sammensatte funktion* $g \circ f$ defineres da ved
> $$g \circ f : A \to C : x \mapsto g(f(x))$$
> .
>
> Funktionen f betegnes som den *indre funktion*, og g kaldes den *ydre funktion*.

Bemærk den lidt underlige konvention, at den indre funktion står til *højre*.

(Strengt taget er det ikke nødvendigt, at $\mathrm{Sm}(f) = \mathrm{Dm}(g)$, for at man kan definere $g \circ f$. Det er nok, hvis $\mathrm{Sm}(f) \subseteq \mathrm{Dm}(g)$)

Eksempel

Betragt funktionerne

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto x^2$ og $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto x + 1$

Vi kan her danne hele *to* sammensatte funktioner:

$$g \circ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto x^2 + 1$$

og

$$f \circ g : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto (x+1)^2$$

Som det ses, er der stor forskel på de to funktioner. Det er altså ikke ligegyldigt, hvilken rækkefølge, vi sammensætter funktioner i.

Vi kan faktisk danne nogle flere sammensatte funktioner:

$$f \circ f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto (x^2)^2 = x^4$$

$$g \circ g : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto x+1+1 = x+2$$

og endnu mere perverst:

$$g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ g \circ g : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto x+10$$

Opgave 2.1

Hvilke af nedenstående er funktioner?

$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}:x\mapsto\sqrt{|x|}$ $\qquad g:\mathbf{R}\to[0;1]:x\mapsto\dfrac{1}{x^2+1}$

$h:[0;1]\to\mathbf{R}:x\mapsto\dfrac{1}{x}$ $\qquad i:\mathbf{R}\to[0;\infty[:x\mapsto x^2$

$j:\mathbf{R}\to[0;\infty[:x\mapsto x^3$

Opgave 2.2

Find definitions- og sekundærmængderne for nedenstående funktionsforskrifter:

$f:x\mapsto x^2+2x$ $\qquad g:x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$h:x\mapsto\sqrt{x+2}$ $\qquad i:x\mapsto\sqrt{x^2}$

$j:x\mapsto\sqrt{x}^2$

Opgave 2.3

Givet nedenstående funktioner:

$f:]0;\infty[\to\mathbf{R}:x\mapsto\log x$ $\qquad g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}:x\mapsto x+2$

$h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}:x\mapsto e^x$ $\qquad i:[4;\infty[\to\mathbf{R}:x\mapsto\sqrt{x-4}$

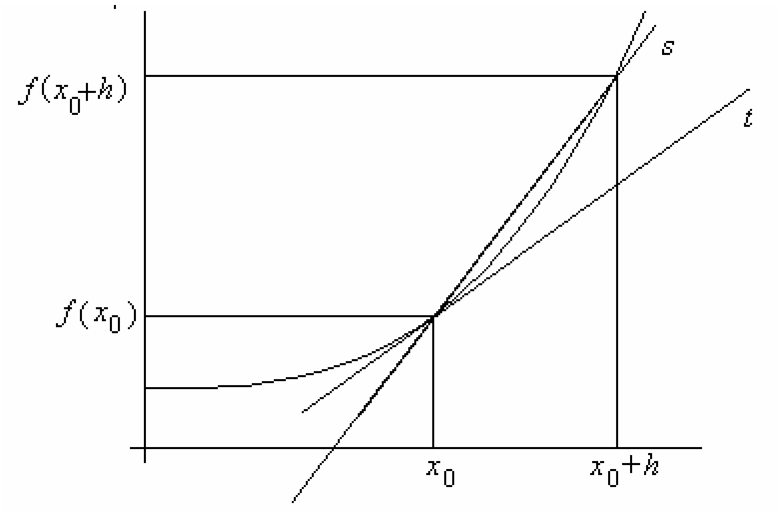
Opskriv forskrifterne med definitions- og sekundærmængde for de sammensatte funktioner
$g\circ f$, $h\circ f$, $f\circ h$, $g\circ i$ og $g\circ f\circ i\circ h$.

Kan $f\circ g$ defineres? Opskriv i så fald forskriften.

5.3 Tretrinsraketten

Tretrinsraketten er et middel til at beregne, dvs. finde et generelt udtryk for differentialkvotienten for en given funktion. Beregningen foregår i tre trin, heraf navnet.

For at forstå, hvad tretrinsraketten egentligt er, skal vi se på tangenter og *sekanter*:



Ovenfor er vist grafen for funktionen $f(x)$ og to linier - tangenten t til grafen med røringspunktet $(x_0, f(x_0))$, og *sekanten*, som er linien s gennem de to punkter $(x_0, f(x_0))$ og $(x_0+h, f(x_0+h))$ på grafen. Tallet h er her et lille tal - positivt eller negativt - som ligger tæt på 0. Bemærk, at h ikke må være 0, da i så fald de to punkter, som bestemmer sekanten er sammenfaldende, og denne derfor er udefineret.

Ideen er nu, at sekanten næsten er en tangent, og at jo nærmere h er på 0, jo mere er sekanten faktisk en tangent. Vi kan derfor beregne *sekanthældningerne* og undersøge, hvorledes de opfører sig, når h nærmer sig 0. Med lidt held finder vi måske *tangenthældningen*.

Lad os som et eksempel undersøge funktionen $f(x) = x^2$. Vi ved fra foregående kapitel, at differentialkvotienten gerne skulle være $f'(x) = 2x$.

Vi starter med at beregne hældningen for sekanten gennem de to punkter

$$(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_0^2) \text{ og } (x_0+h, f(x_0+h)) = (x_0+h, (x_0+h)^2)$$

Hertil bruger vi formlen fra analytisk geometri, som siger, at hældningen for linien gennem punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Det er rimeligt nemt at beregne nævneren i denne brøk:

$$x_2 - x_1 = (x_0 + h) - x_0 = h$$

Vi beregner tælleren. Denne tæller betegner man traditionelt Δf , så vi har

$$\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) = (x_0 + h)^2 - x_0{}^2 =$$
$$x_0{}^2 + 2x_0 h + h^2 - x_0{}^2 = 2x_0 h + h^2$$

Sekanthældningen er nu

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{2x_0 h + h^2}{h} = 2x_0 + h$$

og når h går imod 0, så bliver *tangenthældningen*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h \to 0}(2x_0 + h) = 2x_0$$

- og det var jo det, vi forventede!

Det lidt underlige symbol $\lim\limits_{h \to 0}$ er en såkaldt *grænseværdi*, som vi skal høre mere om lidt senere. Foreløbigt betyder det bare, at vi sætter h lig 0.

Tretrinsraketten er ganske simpelt ovenstående metode anvendt på en hvilken som helst funktion:

Tretrinsraketten

Trin 1: Beregn $\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$.

Trin 2: Beregn $\frac{\Delta f}{h}$.

Trin 3: Beregn grænseværdien $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h}$.

Resultatet er differentialkvotienten $f'(x_0)$.

Man anvender ofte indenfor matematik og fysik betegnelsen ΔC for en ændring af en størrelse *C*. Dette slår igennem i tretrinsraketten: Vi benytter symbolet Δf for en ændring af funktionsværdien *f*. I de gode gamle dage brugte man faktisk også symbolet Δx for en ændring i størrelsen x - i dag bruger vi dog symbolet *h*, fordi det er lettere at skrive og gør tingene mere overskuelige.

Både Δf og $\Delta x = h$ er jo differenser, så størrelsen $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ kaldes en *differens-kvotient*. Tilsvarende kaldes den afledede funktion $f'(x)$ også en *differential-kvotient*, og den skrives nogen gange som $\dfrac{df}{dx}$. (Ikke så underligt, når man tænker på, at det græske bogstav *delta*, Δ, svarer til det latinske bogstav 'd'.)

Faktisk bruger man slutproduktet af tretrinsraketten til at give en formel definition af differentialkvotienten:

Definition 7

Differentialkvotienten eller *den afledede funktion* til funktionen f er den nye funktion

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Vi har faktisk også - i vores eksempel - bevist følgende

Sætning 8 (FS)

$$(x^2)' = \frac{d(x^2)}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

Igen ses det, at differentialkvotienten kan skrives på flere måder (uønsket barn har mange øgenavne...).

Flere differentialkvotienter er:

Sætning 9 (FS)

$$(\frac{1}{x})' = \frac{d}{dx}(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}$$

Bevis:

Vi lader *f* betegne funktionen $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Trin 1: $\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0} =$

$$\frac{x_0-(x_0+h)}{x_0(x_0+h)} = \frac{-h}{x_0^{\,2}+x_0h}$$

Trin 2: $\frac{\Delta f}{h} = \frac{-1}{x_0^{\,2}+x_0h}$

Trin 3: $\lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x_0^{\,2}+x_0h} = \frac{-1}{x_0^{\,2}}$

Sætning 10 (FS)

$$(\sqrt{x})' = \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Bevis:

Vi anvender betegnelsen $g(x) = \sqrt{x}$:

Trin 1: $\Delta g = \sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0} = (\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}) \cdot \frac{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} =$

$$\frac{(\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})}{(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} = \frac{\sqrt{x_0+h}^{\,2}-\sqrt{x_0}^{\,2}}{(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0})} =$$

$$\frac{x_0+h-x_0}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} = \frac{h}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}$$

-tricket var her at få isoleret *h*, så man i næste trin kan komme til at dividere det væk.

Trin 2: $\frac{\Delta g}{h} = \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}$

Trin 3: $\lim_{h\to 0}\frac{\Delta g}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Man kan godt differentiere en funktion flere gange. Her bruger man en lidt speciel notation:

Den dobbelt afledede betegnes $f''(x)=\frac{d^2 f}{dx^2}$

Den tre gange afledede betegnes $f'''(x)=\frac{d^3 f}{dx^3}$

Den fire gange afledede betegnes $f^{(4)}(x)=\frac{d^4 f}{dx^4}$.

...

Den femogfyrretyvende afledede betegnes $f^{(45)}(x)=\frac{d^{45} f}{dx^{45}}$.

Endelig bruger man, når man vil beregne den afledede funktion i et bestemt punkt, følgende notation:

$$f'(x_0)=\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$$

Således har vi

$$\frac{d}{dx}(x^3)=3x^2$$

og

$$\left.\frac{d}{dx}(x^3)\right|_{x=2}=3(2)^2=12.$$

Opgaver

3.1 Definitionsmængderne og sekundærmængderne blev ikke specificeret for funktionerne i sætningerne 9 og 10. Gør dette.

Er definitionsmængderne for de afledede funktioner altid lig definitionsmængderne for de oprindelige funktioner?

3.2 Differentiér funktionen $h(x)=x^3$ vha. tretrinsraketten.

3.3 Vi har nu differentieret funktionerne med forskrifterne x^2, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$ og x^3.

Alle disse er faktisk potensfunktioner.

Opskriv funktionerne og deres afledede efter hinanden, og opskriv den som *potensfunktioner*. Er der et mønster?

5.4 Grænseværdi og kontinuitet

Vi skal nu studere begreberne *grænseværdi* og *kontinuitet*. En grundig og præcis gennemgang af disse begreber kræver meget, meget mere matematisk maskineri, end vi vil køre i stilling, så gennemgangen bliver lidt løs og intuitiv, med vægten lagt på det beskrivende.

Definition 11

Funktionen f har *grænseværdien* a for x gående imod x_0, hvis funktionsværdien $f(x)$ ligger tæt på tallet a, når x ligger tæt på x_0. Vi skriver

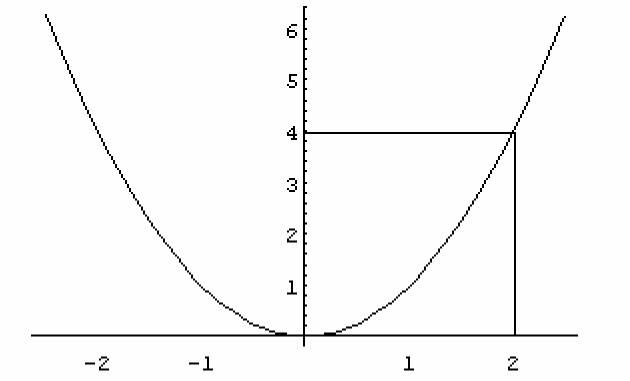
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

Det lidt mystiske "lim" stammer fra latin - *limes* betyder nemlig grænse.

Bemærk, at denne definition slet ikke siger noget om $f(x_0)$ - faktisk behøver funktionen f slet ikke at være defineret i x_0. Men til gengæld skal funktionen være defineret i en omegn omkring x_0.

I tretrinsraketten optræder en grænseværdi, hvor $h \to 0$. Her skal man betragt differenskvotienten $\frac{\Delta f}{h}$ som en funktion af h.

Eksempel

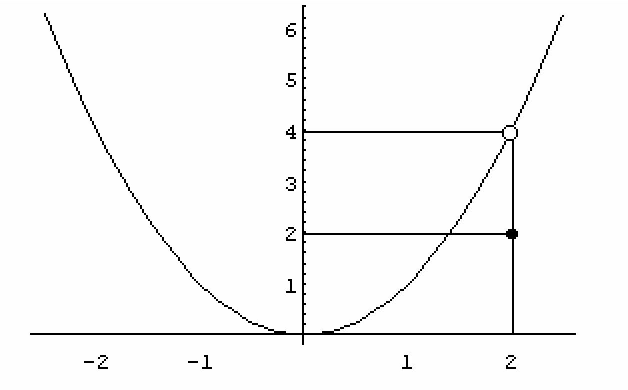


Til venstre er vist grafen for funktionen

$$f(x) = x^2$$

Vi ser umiddelbart, at

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$



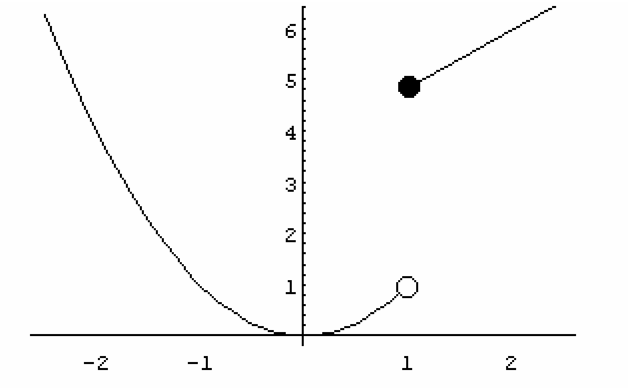
Her er grafen for funktionen g med forskriften

$$g(x)=\begin{cases} x^2 & ,x \neq 2 \\ 2 & ,x=2 \end{cases}$$

Igen ses, at

$$\lim_{x \to 2} g(x)=4.$$

Bemærk, at dette ikke er lig med funktionsværdien: $g(2)=2$.



Endelig har vi grafen for funktionen h med forskriften

$$h(x)=\begin{cases} x+4 & ,x \geq 1 \\ x^2 & ,x<1 \end{cases}$$

Det ses, at grænseværdien $\lim_{x \to 1} h(x)$ slet ikke eksisterer: Tallene mindre end 1 siger, at grænseværdien skal være 1, mens tallene større end 1 siger, at grænseværdien skal være 5.

Til gengæld siger vi, at

$$\lim_{x \to 1-} h(x)=1 \qquad \text{og} \qquad \lim_{x \to 1+} h(x)=5$$

- man taler om *grænseværdier fra venstre* og *fra højre*.

Grænseværdier opfører sig pænt mht. addition osv. af funktioner. Der gælder følgende sætning, som vi ikke beviser:

Sætning 12

Lad f og g være funktioner, således at grænseværdierne

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \quad \text{og} \quad \lim_{x\to x_0} g(x)$$

eksisterer. Da eksisterer nedenstående grænseværdier, og de antager endvidere de angivne værdier:

a) $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$

b) $\lim_{x\to x_0}(f-g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x)$

c) $\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$

d) $\lim_{x\to x_0}(f/g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) / \lim_{x\to x_0} g(x)$

(Ved d) antages det, at $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$).

Kontinuitet er indenfor den højere matematik et meget vigtigt begreb; men her får vi kun brug for definitionen og et par sætninger.

Definition 13

Funktionen f kaldes *kontinuert i tallet* $x_0 \in \text{Dm}(f)$, hvis

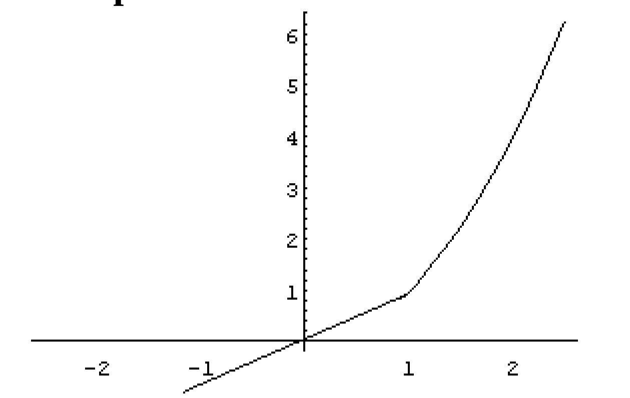
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Funktionen f kaldes *kontinuert*, hvis f er kontinuert i alle punkter i sin definitionsmængde.

Hvis en funktion ikke er kontinuert i et punkt, så kaldes den *diskontinuert* i dette punkt.

Grafisk betyder kontinuitet i et punkt, at funktionens graf ikke springer i punktet:

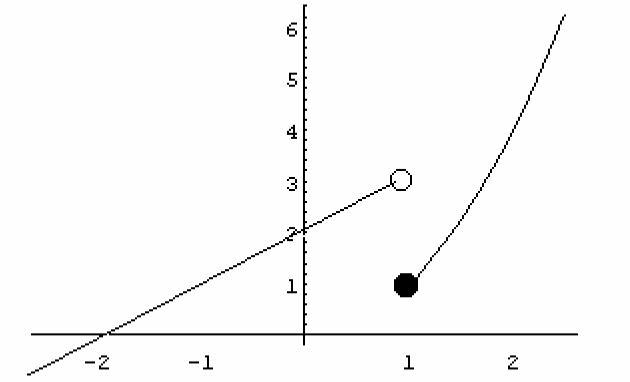
Eksempel



Her er grafen for funktionen

$$x \mapsto \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ x, & x < 1 \end{cases}$$

Funktionen er kontinuert i punktet 1, idet grafens to stykker passer fint sammen.



Her er grafen for funktionen

$$x \mapsto \begin{cases} x^2, & x \geq 1 \\ x+2, & x < 1 \end{cases}$$

Funktionen er diskontinuert i punktet 1, idet funktionens to stykker ikke passer sammen her.

En tommelfingerregel, når man arbejder men kontinuerte funktioner er, at alle almindelige, skikkelige funktioner, hvis forskrift ikke er gaffelfunktioner, og som er summer, produkter osv. af almindelige potenser, logaritmer, eksponentialfunktioner, normalt er kontinuerte. Derimod kan gaffelfunktioner godt være diskontinuerte i "gaffelpunkterne", hvor forskriften skifter. Disse skal derfor undersøges ekstra godt.

Sætning 14

Lad $f: A \to \mathbf{R}$ og $g: B \to \mathbf{R}$ være kontinuerte funktioner. Så er nedenstående funktioner ligeledes kontinuerte:

$$f+g: A \cap B \to \mathbf{R}$$
$$f-g: A \cap B \to \mathbf{R}$$
$$f \cdot g: A \cap B \to \mathbf{R}$$
$$f/g: A \cap B \to \mathbf{R}$$

(Det antages ved kvotientfunktionen, at g ingen nukpunkter har!)

Også sammensætning af funktioner bevarer kontinuitet. Der gælder nemlig:

Sætning 15

Lad $f : A \to B$ og $g : B \to C$ være kontinuerte funktioner. Så er den sammensatte funktion

$$g \circ f : A \to C$$

også kontinuert.

Opgaver

4.1 Betragt funktionerne *f* og *g* med forskrifterne

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, x < 0 \\ x - 2, x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{og} \qquad g(x) = \begin{cases} 3x - 4, x > 2 \\ 2x - 2, x \leq 2 \end{cases}$$

a) Bestem tallene

$$\lim_{x \to 2} f(x), \quad \lim_{x \to 0} f(x), \quad \lim_{x \to 2} g(x), \quad \lim_{x \to 0} g(x)$$

forudsat, at de eksisterer.

b) Bestem $f(2)$, $f(0)$, $g(2)$, $g(0)$

c) Er *f* kontinuert i tallet 2? I tallet 0?
Er *g* kontinuert i tallet 2? I tallet 0?

4.2 Grænseværdier kan nogen gange bestemmes eksperimentielt - hermed menes, at man kan få en idé om, hvad

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

er lig, ved at beregne funktionsværdier $f(x)$ for tal x, som ligger tæt på x_0.

Her skal vi bestemme grænseværdien $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

a) Udfyld nedenstående skema:

x	$\frac{e^x - 1}{x}$
1	
0,1	
0,01	
0,001	
0,0001	
0,00001	

b) Hvad tror du, ovennævnte grænseværdi er lig med?

c) Er dette er bevis for, at

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1?$$

4.3 Funktionen f er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} e^x & ,x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Er funktionen f kontinuert?

5.5 Differentiabilitet

Endelig kommer vi til begrebet *differentiabilitet*:

Definition 16

1) Funktionen f er *differentiabel* i punktet $x_0 \in \mathrm{Dm}(f)$, hvis der eksisterer en omegn A om x_0, således at $A \subseteq \mathrm{Dm}(f)$, og

2) grænseværdien $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ eksisterer.

En *omegn* om et punkt er et lille, åbent interval omkring punktet. F.eks. er intervallet $]0{,}999\,;1{,}001[$ en omegn omkring punktet 1.

Hvis en funktion ikke er differentiabel i et punkt x_0, så er der normalt tre grunde til dette:

a) x_0 er ikke et *indre punkt* i funktionens definitionsmængde, dvs. betingelse 1) er ikke opfyldt i definition 16. Dette sker typisk i intervalendepunkter.

b) Funktionen er ikke kontinuert i punktet x_0.

c) Funktionen er nok kontinuert i punktet x_0, men grafen knækker, og grænseværdien i betingelse 2) i definition 16 eksisterer ikke.

Til punkt b) ovenfor er der at bemærke, at

Sætning 17

Lad funktionen f være differentiabel i punktet x_0. Så er f også kontinuert i x_0.

Bevis:

f er differentiabel i punktet x_0, så grænseværdien

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

eksisterer.

Derfor gælder, at grænseværdien
$$\lim_{h\to 0}(f(x_0+h)-f(x_0)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot\lim_{h\to 0} h =$$

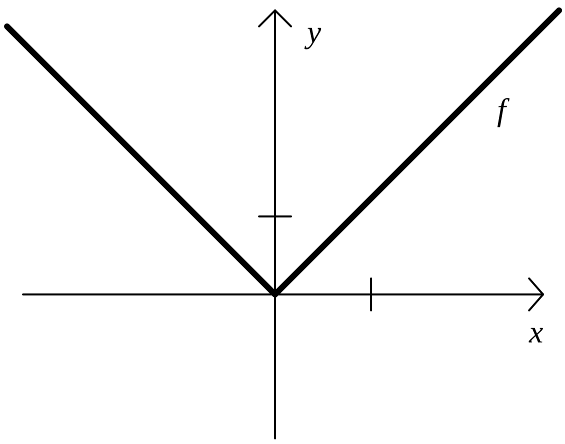
$$f'(x_0)\cdot 0 = 0$$

eksisterer, og er lig 0.

Men dette betyder, at
$$f(x_0) = \lim_{h\to 0} f(x_0) = \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$
og funktionen er altså kontinuert i x_0

Et eksempel på tilfælde c) er følgende:

Eksempel



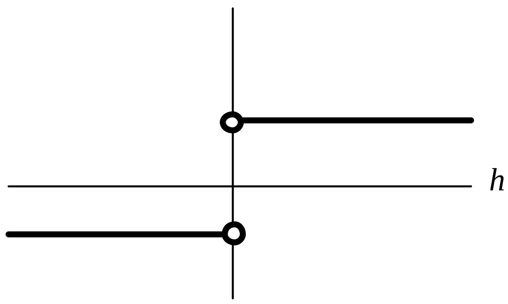
Funktionen
$$f(x) = |x|$$
er *ikke* differentiabel i x=0:

Bruger vi tretrinsraketten, bliver vi nemlig nødt til at dele op i to tilfælde, alt efter om h er positiv eller negativ:

1. trin: $h>0$: $\Delta f = |0+h|-|0| = |h| = h$
$h<0$: $\Delta f = |0+h|-|0| = |h| = -h$

2. trin: $h>0$: $\dfrac{\Delta f}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$
$h<0$: $\dfrac{\Delta f}{h} = \dfrac{-h}{h} = -1$

3.trin: Grænseværdien $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\Delta f}{h}$ eksisterer ikke; tegner vi $\dfrac{\Delta f}{h}$ som funktion af h, ser vi hvorfor:



I dette eksempel er funktionen *f* ikke differentiabel, idet

$$\lim_{h\to 0-}\frac{\Delta f}{h}=-1 \qquad \text{og} \qquad \lim_{h\to 0+}\frac{\Delta f}{h}=1$$

er forskellige.

I dette tilfælde taler man i øvrigt om *differentialkvotienter fra venstre* og *fra højre*:

Differentialkvotienten fra venstre er

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0-}\frac{\Delta f}{h} \quad (=-1)$$

mens differentialkvotienten fra højre er

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0+}\frac{\Delta f}{h} \quad (=1)$$

Opgaver

5.1 Betragt nedenstående funktioner:

$$f(x)=\begin{cases} x & ,x\le 2 \\ 2x-2 & ,x>2 \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} x+3 & ,x\le 2 \\ 2x & ,x>2 \end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\le 2 \\ 2x & ,x>2 \end{cases} \qquad i(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\le 2 \\ 4x-4 & ,x>2 \end{cases}$$

a) Hvilke af de fire funktioner er kontinuerte i punktet $x=2$?

b) Hvilke af de fire funktioner er differentiable i punktet $x=2$?

c) Bestem $f'(2)$, $g'(2)$, $h'(2)$ og $i'(2)$, hvis de ellers eksisterer.

5.6 Regneregler - en oversigt

Der findes temmeligt mange regler for, hvordan man kan differentiere en given funktion. Vi skal naturligvis bevise dem alle; men til en start kommer vi med en oversigt og viser, hvorledes reglerne anvendes i praksis.

Reglerne kan deles op i to slags: Generelle regler og differentiation af specifikke funktioner.

De generelle regler er

Sumreglen
$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

Differensreglen
$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

Konstantreglen
$(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$

Produktreglen
$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Kvotientreglen

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Kædereglen (eller differentiation af en sammensat funktion)

$$(f \circ g)'(x) = (f' \circ g)(x) \cdot g'(x)$$

De specifikke funktioners differentialkvotienter er

$$\frac{d(x^r)}{dx} = r \cdot x^{r-1} \qquad \frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \frac{d(a^x)}{dx} = \ln a \cdot a^x$$

samt nogle regler for de trigonometriske funktioner. Disse regler venter vi dog med.

Ud fra disse egentligt ganske få regler kan alverdens funktioner differentieres!

En god taktik, når man skal differentiere et støøre funktionsudtryk, er at tage én ting ad gangen. Det gør udregningen mere overskuelig, og man undgår fejl.

Eksempel

$$(x^3+3x^2-4x+\ln x)' = \quad (x^3)'+(3x^2)'-(4x)'+(\ln x)' =$$
$$3x^2+3\cdot 2x-4+\tfrac{1}{x} =$$
$$3x^2+6x-4+\tfrac{1}{x}$$

$$((4x^3+e^x)\cdot(5x^3+\sqrt{x}))' =$$
$$(4x^3+e^x)'\cdot(5x^3+\sqrt{x})+(4x^3+e^x)\cdot(5x^3+\sqrt{x})' =$$
$$(12x^2+e^x)\cdot(5x^3+\sqrt{x})+(4x^3+e^x)\cdot(15x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}) =$$
$$60x^5+5x^3e^x+12x^2\sqrt{x}+\sqrt{x}e^x+60x^5+2\frac{x^3}{\sqrt{x}}+15x^2e^x+\frac{e^x}{2\sqrt{x}} =$$
$$120x^5+14x^2\sqrt{x}+5x^3e^x+15x^2e^x+\sqrt{x}e^x+\frac{e^x}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{x^2+2}{3x+2}\right)' = \quad \frac{(x^2+2)'\cdot(3x+2)-(x^2+2)\cdot(3x+2)'}{(3x+2)^2} =$$
$$\frac{2x\cdot(3x+2)-(x^2+2)\cdot 3}{(3x+2)} =$$
$$\frac{6x^2+4x-3x^2-6}{(3x+2)^2} = \frac{3x^2+4x-6}{(3x+2)^2}$$

- den bitre erfaring viser, at det sjældent kan betale sig at gange nævneren ud i en differentieret kvotient.

Ved brug af kædereglen skal man passe på med at identificere den indre og den ydre funktion:

$$(\sqrt{2x+3})' = \frac{1}{2\sqrt{2x+3}}\cdot(2x+3)' = \frac{1}{2\sqrt{2x+3}}\cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$$

$$((2\sqrt{x}+4e^x)^3)' = 3(2\sqrt{x}+4e^x)^2\cdot(2\sqrt{x}+4e^x)' =$$
$$3(2\sqrt{x}+4e^x)^2\cdot(\tfrac{1}{\sqrt{x}}+4e^x)$$

- igen viser den bitre erfaring, at man ikke skal gange produktet ud.

$$\left(\frac{1}{2x+3}\right)' = \frac{1'\cdot(2x+3)-1\cdot(2x+3)'}{(2x+3)^2} = \frac{0-2}{(2x+3)^2} = -\frac{2}{(2x+3)^2}$$

men dette kan også differentieres som en sammensat funktion:

$$\left(\frac{1}{2x+3}\right)' = ((2x+3)^{-1})' = (-1)\cdot(2x+3)^{-2}\cdot(2x+3)' = -2(2x+3)^{-2}$$

Opgaver

6.1 Differentiér nedenstående udtryk. (Skriv evt. om til en potensfunktion)

a)	x^4	b)	$3x^7$	c)	x^{-2}	d)	$\sqrt{x}$
e)	$x\sqrt{x}$	f)	$2e^x$	g)	2^x	h)	$\ln x$
i)	$\sqrt[3]{x}$	j)	$\sqrt[4]{x}$	k)	4^x	l)	$(\frac{1}{2})^x$

6.2 Differentiér nedenstående udtryk.

a)	x^2-3x	b)	$4x^2+7$	c)	$3x-2$
d)	$8x^3-7x^2+4$	e)	$2x^7+4x^2-3$	f)	$2x^6+3\ln x$
g)	$\frac{1}{2}x^2+3x-4$	h)	$15x^3-4x^6+3\sqrt{x}$	i)	$2e^x+3^x$
j)	$8x^3-3x+2$	k)	$\sqrt{x}-4^x+3e^x$	l)	$3\ln x+5x$

6.3 Differentiér nedenstående udtryk.

a)	$(x^2-2)(x+1)$	b)	$x(3x+2)$
c)	$(3x+2)e^x$	d)	$(\ln x+3)(x^3-4)$
e)	$2x(3x+5)$	f)	$(4x^2+3)(3x^4+2x^3-4x)$
g)	$(x^2-1)(x^{-3}+3)$	h)	$(3x^2-\ln x)(2^x+e^x)$

6.4 Differentiér nedenstående udtryk.

a)	$\dfrac{4x^2-3}{x-1}$	b)	$\dfrac{2+x}{3x^2}$
c)	$\dfrac{x+1}{2x+3}$	d)	$\dfrac{4+\ln x}{2x-1}$
e)	$\dfrac{x^2+2x-4}{x^2-3x+6}$	f)	$\dfrac{x^3-1}{x-1}$
g)	$\dfrac{e^x}{x}$	h)	$\dfrac{x}{e^x}$
i)	$\dfrac{\ln x}{2x+3}$	j)	$\dfrac{x}{x^4-3}$

6.5 Differentiér nedenstående udtryk.

a)	$(x+1)(x+2)(x-3)$	b)	$(x-3)(x^2+2x)x$
c)	$(\dfrac{x+1}{x-1})\cdot(\dfrac{1}{2x}-\dfrac{x^2}{x-2})$	d)	$\dfrac{(x^2-3x)(2x+4)}{x+4}$

e) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-1}e^x$ f) $(x+\dfrac{1}{x})(x^2-3x)(2x-2)$

6.6 Differentiér nedenstående udtryk.

a) $\sqrt{x+1}$ b) $\ln(3x-6)$

c) $(x+4)^7$ d) $\sqrt{x^2+1}$

e) $(x+\ln x)^{-3}$ f) e^{x+2}

g) $\exp(x^2+2x-1)$ h) $\sqrt{e^x}$

i) $\sqrt{x+\ln x}$ j) $(2x^3+3x-1)^{12}$

k) $\ln(\ln x)$ l) $\sqrt{\ln x}$

m) $\ln(\sqrt{x})$ n) $e^{\sqrt{x}}$

6.7 Differentiér nedenstående udtryk:

a) $\ln(\sqrt{x+3}-4)$ b) $\dfrac{(x^3-2)^2}{\sqrt{2x-1}}$

c) $(e^x+6)^2-\sqrt{2x+e^x}$ d) e^x-x^e

e) $\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{3x-8}(2x^3+1)^2$ f) $\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{\ln(8x-1)}$

5.7 Beviser for regnereglerne

Vi skal nu vise, hvorledes man kan udlede regnereglerne for en sum, differens, , produkt, kvotient eller sammensætning af funktioner. Alle beviserne anvender tretrinsraketten.

> **Sætning 18 (FS)**
>
> Lad $f : A \to \mathbf{R}$ og $g : B \to \mathbf{R}$ være differentiable funktioner. Så er $f + g : A \cap B \to \mathbf{R}$ differentiabel, og
> $$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Bevis:

Trin 1:

$$\begin{aligned}\Delta(f+g) = \; & (f+g)(x+h) - (f+g)(x) = \\ & (f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x)) = \\ & f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x) = \\ & \Delta f + \Delta g\end{aligned}$$

Trin 2:

$$\frac{\Delta(f+g)}{h} = \frac{\Delta f + \Delta g}{h} = \frac{\Delta f}{h} + \frac{\Delta g}{h}$$

Trin 3: Funktionerne *f* og *g* er differentiable, så vi ved, at

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{h} = f'(x) \qquad \text{og} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\Delta g}{h} = g'(x)$$

Men så gælder ifølge sætning 12a, at

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta(f+g)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\Delta f}{h} + \frac{\Delta g}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{\Delta g}{h} = f'(x) + g'(x)$$

hvilket viser, at $f+g$ faktisk er differentiabel, samt at

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

> **Sætning 19 (FS)**
>
> Lad $f : A \to \mathbf{R}$ og $g : B \to \mathbf{R}$ være differentiable funktioner. Så er $f - g : A \cap B \to \mathbf{R}$ differentiabel, og
> $$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

Bevis:

Se opgave 7.1
(Beviset minder meget om beviset for sætning 18).

Sætning 20 (FS)

Lad $f : A \to \mathbf{R}$ være en differentiabel funktion, og lad $k \in \mathbf{R}$. Så er funktionen $kf : A \to \mathbf{R}$ differentiabel, og

$$(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$$

Bevis:

Trin 1: $\Delta(kf) = \quad (kf)(x+h) - (kf)(x) =$

$k \cdot f(x+h) - k \cdot f(x) =$

$k \cdot (f(x+h) - f(x))$

$k \cdot \Delta f$

Trin 2: $\dfrac{\Delta(kf)}{h} = \dfrac{k \cdot \Delta f}{h} = k \cdot \dfrac{\Delta f}{h}$

Trin 3: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\Delta(kf)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (k \cdot \dfrac{\Delta f}{h}) = k \cdot \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\Delta f}{h} = k \cdot f'(x)$

hvilket dels beviser, at kf er differentiabel, dels at

$$(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$$

Sætning 21 (FS)

Lad $f : A \to \mathbf{R}$ og $g : B \to \mathbf{R}$ være differentiable funktioner. Så er sumfunktionen $f \cdot g : A \cap B \to \mathbf{R}$ differentiabel, og

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Bevis:

Trin 1:

$$
\begin{aligned}
\Delta(f\cdot g) = {} & (f\cdot g)(x+h)-(f\cdot g)(x) = \\
& f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x) = \\
& f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x+h)\cdot g(x) + f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x) \\
& f(x+h)\cdot(g(x+h)-g(x)) + (f(x+h)-f(x))\cdot g(x) = \\
& f(x+h)\cdot\Delta g + \Delta f\cdot g(x)
\end{aligned}
$$

Her var fidusen af trække leddet $f(x+h)\cdot g(x)$ fra og samtidigt lægge det til igen.

Trin 2:

$$\frac{\Delta(f\cdot g)}{h} = \frac{f(x+h)\cdot\Delta g + \Delta f\cdot g(x)}{h} = f(x+h)\cdot\frac{\Delta g}{h} + \frac{\Delta f}{h}\cdot g(x)$$

Trin 3:

Idet funktionen f er differentiabel, så er f derfor kontinuert. Dette betyder, at

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$$

Vi får da, at

$$
\begin{aligned}
& \lim_{h\to 0}\frac{\Delta(f\cdot g)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot\Delta g + \Delta f\cdot g(x)}{h} = \\
& \lim_{h\to 0}\left(f(x+h)\cdot\frac{\Delta g}{h} + \frac{\Delta f}{h}\cdot g(x)\right) = \\
& \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\Delta g}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{\Delta f}{h}\cdot\lim_{h\to 0} g(x) = \\
& f(x)\cdot g'(x) + f'(x)\cdot g(x).
\end{aligned}
$$

Dette viser dels, at produktfunktionen $f\cdot g$ er differentiabel, dels at

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Sætning 22 (FS)

Lad $f : A \to \mathbf{R}$ og $g : B \to \mathbf{R}\setminus\{0\}$ være differentiable funktioner. Så er $f\,/\,g : A\cap B \to \mathbf{R}$ differentiabel, og

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Bevis:

Idet g er differentiabel, så er definitionsmængden B for g et åbent interval (eller en forening af flere åbne intervaller). Ethvert punkt i B

kan derfor omgives af en omegn indeholdt i *B*. Dette betyder, at vi altid kan tage grænseværdierne nedenfor.

Trin 1:

$$\Delta(\tfrac{f}{g}) = (\tfrac{f}{g})(x+h)-(\tfrac{f}{g})(x) =$$

$$\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)} =$$

$$\frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)} =$$

$$\frac{f(x+h)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)} =$$

$$\frac{(f(x+h)-f(x))\cdot g(x)-f(x)\cdot(g(x+h)-g(x))}{g(x+h)\cdot g(x)} =$$

$$\frac{\Delta f\cdot g(x)-f(x)\cdot\Delta g}{g(x+h)\cdot g(x)}$$

Trin 2:

$$\frac{\Delta(f/g)}{h}=\frac{1}{g(x)\cdot g(x+h)}\left(\frac{\Delta f}{h}\cdot g(x)-f(x)\cdot\frac{\Delta g}{h}\right)$$

Trin 3:

Idet funktionen g er differentiabel, så er g kontinuert, og

$$\lim_{h\to 0} g(x+h)=g(x)$$

Tages grænseværdien $h\to 0$, så fås

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta(f/g)}{h}=\frac{1}{g(x)^2}(f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x))$$

hvilket beviser sætningen.

> **Sætning 23 (FS)**
>
> Lad $f: A\to B$ og $g: B\to C$ være differentiable funktioner. Så er den sammensatte funktion $g\circ f: A\to C$ ligeledes differentiabel, og der gælder, at
>
> $$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$$

Bevis:

Lad $x_0\in A$ være et fastholdt punkt i mængden *A*, og definér $y_0=f(x_0)\in B$. Definér endvidere hjælpefunktionen $k: B\to C$ ved

$$k(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}, & y \neq y_0 \\ g'(y_0) & , y = y_0 \end{cases}$$

Idet g er differentiabel, så er k kontinuert, og der gælder

$$g(y) - g(y_0) = k(y) \cdot (y - y_0)$$

for alle værdier af y.

Vi skal nu have sving i tretrinsraketten, men i stedet for at lade $h \to 0$, så sætter vi $x = x_0 + h$ og lader $x \to x_0$

Trin 1: $\Delta(g \circ f) = (g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0) = k(f(x)) \cdot (f(x) - f(x_0))$

Trin 2: $\dfrac{\Delta(g \circ f)}{h} = \dfrac{\Delta(g \circ f)}{x - x_0} = k(f(x)) \cdot \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = k(f(x)) \cdot \dfrac{\Delta f}{h}$

Trin 3: Lader vi nu $x \to x_0$, så vil

$$\lim_{x \to x_0} k(f(x)) = k(f(x_0)) = k(y_0) = g'(y_0) = g'(f(x_0))$$

og

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h} = f'(x_0)$$

Kombineres dette, så ses, at

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta(g \circ f)}{h} = g'(f(x_0)) \circ f'(x_0)$$

Opgaver

7.1 Opskriv alle detaljerne i beviset for sætning 19.

5.8 Differentiation af log, exp & pot

Hvorfor er matematikere så vilde med den naturlige logaritme og det underlige tal $e = 2.7182818...$? Forklaringen kommer her:

Hjælpesætning 24

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\log_a(1+t)}{t}$$

Bemærk, at sætningen siger, at når man differentierer en logaritmefunktion, så får man differentialkvotienten konstant $\cdot \frac{1}{x}$, idet grænseværdien (konstanten) jo ikke afhænger af variablen x, men kun af grundtallet a.

Bevis:

Tretrinsraketten med $f(x) = \log_a x$.

Trin 1: $\Delta f = \log_a(x+h) - \log_a x =$

$$\log_a\left(\frac{x+h}{x}\right) = \log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

Trin 2:

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a(1+h/x)}{h/x}$$

Her forlængdede vi brøken med $\frac{1}{x}$.

Trin 3: At tage grænseværdien, når størrelsen h går imod nul er det samme som at tage grænseværdien, når $t = \frac{h}{x}$ går imod 0. Så det gør vi:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta f}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a(1+h/x)}{h/x} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{\log_a(1+t)}{t}$$

•

Er vi egentligt blevet klogere? Tja, ikke ret meget; fra exp, pot & log- kapitlet ved vi, at alle logaritmefunktioner er proportionale: Kender vi én logaritmefunktion, f.eks. titalslogaritmen, så kan vi finde alle andre logaritmer ved brug af formlen:

$$\log_a(x) = \frac{\log x}{\log a}$$

(Det er jo også derfor, at lommeregneren kun har en eller to logaritmeknapper, nemlig **LOG** og **LN**).

Hjælpesætningen viser, at når man differentierer en logaritmefunktion, så er differentialkvotienten proportional med $\frac{1}{x}$.

Nu kan man jo være smart og konsekvent bruge den logaritmefunktion, hvis differentialkvotient er $\frac{1}{x}$, altså hvor konstanten $\lim_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)}{t} = 1$. Det viser sig, at denne logaritmefunktion netop er *den naturlige logaritmefunktion*.

Man kan overbevise sig om dette ved at beregne grænseværdien for forskellige grundtal. Når man skal beregne grænseværdier på denne måde, så er det smart at beregne udtrykket $\frac{\log_a(1+10^{-7})}{10^{-7}}$ (altså hvor $t = 10^{-7}$) og så satse på, at dette tal ligger tæt på grænseværdien.

Vi har

$$\frac{\log_2(1+10^{-7})}{10^{-7}} = 1{,}442795 \qquad (a=2)$$

$$\frac{\log_3(1+10^{-7})}{10^{-7}} = 0{,}9102392 \qquad (a=3)$$

men

$$\frac{\ln(1+10^{-7})}{10^{-7}} = 1{,}00000000 \qquad (a=e)$$

Vi har altså følgende sætning:

Sætning 25

1) $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

2) $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x\cdot \ln a}$

Bevis:

1) følger af hjælpesætningen ovenfor, idet konstanten $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = 1$.

2) Her kan vi f.eks. gennemføre udregningerne

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{d}{dx}(\frac{\ln x}{\ln a}) = \frac{1}{\ln a}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a} = \frac{1}{x\cdot\ln a}$$

Eksponentialfunktioner kan differentieres ved at bruge kædereglen:

Sætning 26

1) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

2) $\frac{d}{dx}(a^x) = \ln a \cdot a^x \quad , \quad a > 0$

Bevis:

1) Vi har, at $\ln(e^x) = x$

Dette er faktisk en sammensat funktion, idet vi ligeså godt kunne skrive

$$(\ln \circ \exp)(x) = x .$$

Anvender vi kædereglen, så får vi

$$\frac{1}{e^x} \cdot (e^x)' = 1$$

eller

$$(e^x)' = e^x .$$

2) $(a^x)' = (e^{x\ln a})' = (x\ln a)' e^{x\ln a} = \ln a \cdot a^x$

Når man skal differentiere potensfunktioner, dvs. funktioner med forskriften x^a, så skal man passe lidt på - definitionsmængden afhænger stærkt af eksponenten a. Vi erindrer fra den geniale exp, pot & log-bog, at

$$\mathrm{Dm}(x^a) = \begin{cases} \mathbf{R} & , \ a \in \mathbf{N}_0 \\ \mathbf{R} \setminus \{0\} & , a \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}_0 \\ ]0;\infty[& , a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \end{cases}$$

Sætning 27

$$\frac{d}{dx}(x^a) = a \cdot x^{a-1}$$

Bevis:

Beviset går ud på at fastlægge et reelt tal x, og så se på, for hvilke eksponenter a potensfunktionen x^a er defineret.

Når $x > 0$, så er der ingen begrænsninger på a. Ved at bruge kædereglen fås, at

$$(x^a)' = (e^{a \ln x})' = (a \ln x)' \cdot e^{x \ln a} = a \cdot \frac{1}{x} \cdot x^a = a \cdot x^{a-1}.$$

Når $x < 0$, så er eksponenten a pisket til at være et helt tal. Vi kan da gøre følgende:

$$(x^a)' = ((-1)^a (-x)^a)' = (-1)^a ((-x)^a)'$$

Bemærk, at når x er negativ, så er $-x$ positiv. Ved at bruge differentiationen ovenfor kan vi nu differentiere videre:

$$(-1)^a ((-x)^a)' = (-1)^a (-x)' a (-x)^{a-1} = (-1)^a (-1) a (-x)^{a-1} =$$
$$a(-1)^2 (-1)^{a-1} (-x)^{a-1} = a \cdot 1 \cdot x^{a-1} = ax^{a-1}.$$

Når $x = 0$, så må a være et ikke-negativt, helt tal. Hvis $a = 0$, så er potensfunktionen x^a den konstante funktion 1, og differentialkvotienten bliver 0, også for $x = 0$, hvilket passer fint med formlen.

Hvis $a > 0$, så skal vi bruge tretrinsraketten til at finde $\left.\frac{d}{dx}(x^a)\right|_{x=0}$:

Trin 1: $\Delta f = (0+h)^a - 0^a = h^a - 0 = h^a$

Trin 2: $\dfrac{\Delta f}{h} = \dfrac{h^a}{h} = h^{a-1}$

Trin 3: Hvis $a = 1$, så bliver grænseværdien 1, hvilket passer fint med den formel, vi skal bevise.
Hvis $a > 1$, så bliver grænseværdien 0, hvilket igen passer fint.

Bemærk, at hvis $a > 0$, og a ikke er et helt tal, så er udtrykket x^a nok defineret for $x = 0$; men potensfunktionen er *ikke* differentiabel her. Grunden er jo, at funktionen ikke er defineret i en omegn omkring 0.

Opgaver

8.1 Bevis formlen

$$(\sqrt[3]{x})' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

ved at omskrive til en potensfunktion og differentiere.
For hvilke værdier af x har formlen gyldighed?

8.2 Man kan også vise, af $(e^x)' = e^x$ ved direkte at bruge tretrinsraketten. Her får man da i trin 3 brug for at vide, at

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1 \qquad \text{(Se opgave 4.2)}$$

Brug tretrinsraketten til at bevise, at $(e^x)' = e^x$.

5.9 Newton, Leibniz og fysik

Differentialregningen (og dens onde stedbroder, *integralregningen*) blev opfundet samtidigt omkring 1685 af englænderen Isaac Newton (1642-1727) og tyskeren Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

Leibniz var mest interesseret i de rent matematiske aspekter af differentialregningen, så som tangenter; men Newton opfandt differentialregningen som et teknisk hjælpemiddel indenfor fysikken.

Newton arbejdede meget med den del af fysikken, som kaldes *mekanikken*, og som beskæftiger sig med legemers bevægelse. Som grundlag for mekanikken fandt Newton følgende love:

Newtons 1. lov

Et legeme, som ikke er påvirket af nogen resulterende kraft, vil enten være i hvile eller bevæge sig med konstant hastighed i samme retning.

Newtons 2. lov

Et legeme med massen m, som påvirkes af kraften F, vil accelereres med en acceleration a, som opfylder ligningen

$$F = m \cdot a$$

Newtons 3. lov

Et legeme, som påvirker et andet legeme med en kraft, vil af dette andet legeme blive påvirket af en kraft med samme størrelse, men med modsat retning.

Og endelig havde Newton sin *gravitationslov*:

Newtons gravitationslov

Tyngdekraften mellem to legemer med masserne m_1 og m_2, og som befinder sig i afstanden r fra hinanden, påvirker hinanden med en tyngdekraft af størrelsen

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

hvor *gravitationskonstanten* $G = 6,67 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{Nm}^2 / \mathrm{kg}^2$

Differentialregningen kommer ind, når man skal finde ud af, hvad *acceleration* og *hastighed* egentligt er for noget.

Forestil dig, at du har en partikel, som bevæger sig en-dimensionalt, f.eks. på en ret linie. Partiklens position s kan beskrives som en funktion $s(t)$ - positionen s afhænger jo af tiden t.

Hvad er partiklens hastighed, $v(t)$? Hastighed, der er jo noget med tilbagelagt vejstrækning pr. tidsenhed, dvs.

$$v(t) = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Dette er jo ikke særligt nøjagtigt, fordi tidsenheden Δt er for stor. Så vi lader derfor Δt gå imod nul, og alt i alt får vi

Sætning 28

En partikel, hvis position er bestemt ved stedfunktionen $s(t)$, har hastigheden

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}.$$

Acceleration er jo hastighedsændring pr. tidsenhed, så derfor får vi

Sætning 29

En partikel, hvis position er givet ved stedfunktionen $s(t)$, har accelerationen

$$a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt} = s''(t) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Eksempel

For en bold, som kastes lodret opad, kan man opskrive følgende udtryk for boldens højde s over jordoverfladen:

$$s(t) = -4{,}9\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}t^2 + 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}t + 3\mathrm{m}$$

Hastigheden er

$$v(t) = s'(t) = -9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}t + 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

og accelerationen

$$a(t) = v'(t) = -9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

Heraf kan man se, at boldens acceleration altid er konstant lig $9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ og hedadrettet. Denne acceleration kaldes *tyngdeaccelerationen* og forkortes g.

Det generelle udtryk for en partikel, som kastes opad med begyndelseshastigheden v_0 og starthøjden s_0, er øvrigt givet ved

$$s(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + s_0.$$

Opgaver

9.1 Indenfor fysik støder man på fænomenet *radioaktivitet*.

Forsøger man at beskrive dette fænomen matematisk, så finder man ud af følgende sammenhæng:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-kt}$$

Her betegner t tiden, $N(t)$ er antallet af kerner af et bestemt radioaktivt stof til tilden t, N_0 er antallet af kerner til tiden $t = 0$, og k er den såkaldte henfaldskonstant, som kun afhænger af, hvilket stof vi betragter.

a) Gør rede for, at antallet af kerner aftager eksponentielt med tiden.

b) Gør rede for, at halveringstiden $T_{1/2}$ er givet ved

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$$

Fysikere taler også om *aktiviteten* $A(t)$ af stoffet. Størrelsen $A(t)$ defineres som antal radioaktive henfald pr. sekund til tiden t.

c) Gør rede for, at $A(t) = -N'(t)$

(Vink: Minusset kommer, fordi kernerne **forsvinder** ved henfaldet).

d) Vis, at

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-kt}$$

hvor $A_0 = kN_0$, og vis også, at

$$A(t) = k \cdot N(t)$$

5.10 Stamfunktioner

Differentialregningens anvendelse indenfor fysik (kinematik), som blev omtalt i sidste sektion, rejser et fundamentalt problem:

> Hvorledes bestemmer man en funktion, når man kun kender dens differentialkvotient?

Dette problem kaldes *stamfunktionsproblemet* og er udgangspunktet for *integralregningen*. Selve integralregningen er en noget kompliceret affære, som naturligt hører hjemme på højt niveau, så vi skal her nøjes med at snuse til emnet.

Definition 28

Lad f være en kontinuert funktion. En funktion F kaldes en *stamfunktion* til f, hvis

$$F'(x) = f(x)$$

Eksempel

Betragt funktionen

$$f(x) = 3x^2$$

Nogle stamfunktioner til f er

$$F_1(x) = x^3 \quad , \qquad F_2(x) = x^3 + 6 \qquad \text{og} \qquad F_3(x) = x^3 - 1$$

Som det ses, har en funktion normalt flere stamfunktioner. Dette uddybes i nedenstående sætninger:

Sætning 29

Lad funktionen f have stamfunktionen F. Lad k være et vilkårligt reelt tal. Så vil sumfunktionen $F+k$ også være en stamfunktion til f.

Bevis:

Idet F er en stamfunktion til f, så gælder der, at $F'(x) = f(x)$.

Vi skal vise, at funktionen med forskriften $F(x)+k$ er en stamfunktion til f, og dette gøres ved at differentiere:

$$(F(x)+k)' = F'(x) + (k)' = f(x) + 0 = f(x)$$

Gælder det omvendte? Kan enhver stamfunktion fås ved at tage en vilkårlig stamfunktion og hertil lægge en konstant.

Hvis definitionsmængden for funktionen f er et interval, så er svaret JA:

Sætning 30

Lad $f: I \to \mathbf{R}$ være en kontinuert funktion, defineret på et interval I. Lad F_1 og F_2 være to stamfunktioner til F. SÅ findes en konstant k, således at

$$F_2(x) = F_1(x) + k \text{, for alle } x \in I$$

Bevis:

Vi betragter differensfunktionen $F_2 - F_1$. Hvad er denne differentieret?

$$(F_2(x) - F_1(x))' = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Idet vi er på et interval, og de eneste funktioner her, som differentieret giver 0, er konstante funktioner, så kan vi konkludere, at

$$F_2(x) - F_1(x) = k$$

hvor k er en konstant.

Bemærk, at denne sætning **ikke** gælder, hvis definitionsmængden ikke er et interval.

Eksempel

Funktionen

$$f: \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}: x \mapsto -\frac{1}{x^2}$$

har bl.a. nedenstående to stamfunktioner

$$F_1: \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}: x \mapsto \frac{1}{x} + 2$$

og

$$F_2: \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} + 3, x > 0 \\ \frac{1}{x} - 5, x < 0 \end{cases}$$

Men disse to funktioner afviger ikke fra hinanden med en konstant!

Man plejer at skrive stamfunktioner som *ubestemte integraler*, f.eks.

$$\int 3x^2 dx = x^3 + k$$

Det lange S-agtige symbol kaldes et *integraltegn*. Integralet er ubestemt, netop fordi vi ikke kan bestemme stamfunktionen - konstanten fra sætning 29 og 30 kommer nemlig i vejen.

Enhver differentialregningsregel giver anledning til en integrationsregel - vi nøjes med at angive de vigtigste:

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$
$$\int (f(x)-g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$
$$\int kf(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$
$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + k n \neq -1$$
$$\int \tfrac{1}{x} dx = \ln|x| + k$$
$$\int e^x dx = e^x + k$$

Med disse regler kan man beregne mange integraler:

Eksempel

$$\int (2x^4 + 5x - 3)dx = 2 \cdot \tfrac{1}{4+1} x^{4+1} + 5 \cdot \tfrac{1}{1+1} x^{1+1} - 3x + k =$$
$$\tfrac{2}{5} x^5 + \tfrac{5}{2} x^2 - 3x + k$$

Opgaver

10.1 Bevis nedenstående formler. (Vink: Differentiér!)

a) $\int \ln x dx = x \ln x - x + k$ b) $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + k$

10.2 Bestem nedenstående ubestemte integraler:

a) $\int (x^2 - 3x + 2)dx$ b) $\int 8x^3 dx$

c) $\int (4x + \sqrt{x})dx$ d) $\int (e^x - 8)dx$

e) $\int (2x^{-4} - 7x^{-2} + 3x^{-1})dx$ f) $\int 3dx$

g) $\int x(x^2 + 1)dx$ h) $\int (x^3 + x)dx$

10.3 Bestem den stamfunktion F til funktionen $f(x) = 3x^2 + 2$, som opfylder, at $F(1) = 0$.

5.11 Approximation

Approximation betyder tilnærmelse, og differentialregning giver en udmærket metode til at beregne tilnærmede funktionsværdier. Ideen er ganske simpel - vi ved jo, at tangenten til grafen for en funktion ligger tæt på selve grafen. Vi kan derfor tilnærme grafen med tangenten.

I praksis anvender man ikke denne geometriske sprogbrug. Tangentligningen omdøber man til *det approximerende førstegradspolynomium:*

Definition 31

Lad f være en funktion, som er differentiabel i punktet x_0. *Det approximerende førstegradspolynomium i* x_0 er funktionen

$$p(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Bemærk den store lighed med tangentligningen

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Faktisk er tangenten grafen for det approximerende førstegradspolynomium.

Anvendelsen af det approximerende førstegradspolynomium ligger som sagt i, at vi let kan tilnærme funktionsværdier.

Eksempel

Lad os beregne tallet $(1{,}00001)^2$. Vi observerer, at tallet 1,00001 ligger tæt på tallet 1, og at vi er interesseret i at finde en funktionsværdi for funktionen $f(x)$.

Vi finder det approximerende førstegradspolynomium:

$x_0 = 1$ $\qquad$ $f(x_0) = f(1) = 1^2 = 1$

$f'(x) = (x^2)' = 2x$ $\qquad$ $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$

så

$$p(x) = 2(x-1) + 1 = 2x - 1.$$

Ergo,

$$(1{,}00001)^2 = f(1{,}00001) \approx p(1{,}00001) = 2 \cdot 1{,}00001 - 1 = 1{,}00002.$$

Dette skal sammenlignes med den eksakte værdi, som er

$$(1{,}00001)^2 = 1{,}0000200001.$$

Nu kan man spørge sig selv om, hvad brug man har for approximerende førstegradspolynomier - man kan jo bare tvære tallene ind på lommeregneren! Svaret er naturligvis, at lommeregneren benytter sig af approximerende førstegradspolynomier og den slags.

I praksis benytter lommeregneren de såkaldte *Taylor-rækker*, som er approximerende polynomier af højere grad. Her har man brug for den afledede og de højere afledede i punktet x_0. Formlen er

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

hvor vi har lavet en n'te ordens *Taylorudvikling omkring* x_0. Dette vil normalt være en ganske god tilnærmelse til funktionen *f*, og jo flere led vi tager med (dvs. jo større tallet *n* er), jo bedre er approximationen.

Eksempel

Vi betragter funktionen $f(x) = e^x$ med $x_0 = 0$. Det er meget nemt at differentiere denne funktion; vi har nemlig $f^{(n)}(x) = e^x$, uanset værdien af *n*.

Taylor-rækken til 5. orden bliver derfor

$$p(x) = e^0 + \tfrac{e^0}{1!}(x-0) + \tfrac{e^0}{2!}(x-0)^2 + \tfrac{e^0}{3!}(x-0)^3 + \tfrac{e^0}{4!}(x-0)^4 + \tfrac{e^0}{5!}(x-0)^5 =$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}.$$

Lad os beregne tallet *e*. Vi sætter *x*=1 i Taylor-rækken og får på lommeregneren

$$e \approx p(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = 2,7166667$$

Den rigtige værdi er $e = 2,7182818...$

Tagner man istedet den 10. ordens Taylor-række fås

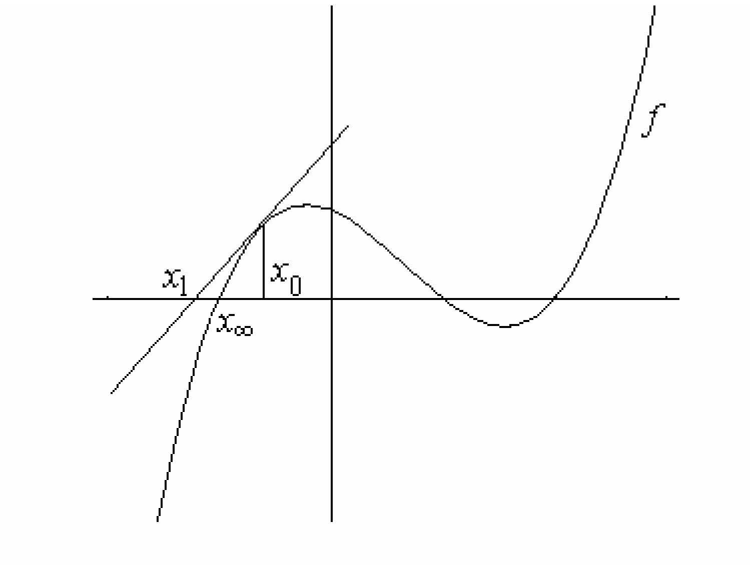
$$e \approx 2,7182818...$$

som passer med mange, mange decimaler.

5.12 Newton-Raphsons iterationsmetode

Newton-Raphsons iterationsmetode er en rimeligt genial metode til at løse alle mulige slags ligninger. Den kan løse ligninger numerisk, dvs. den kan producere er løsning, som ikke er eksakt, men approximativ. Metoden bygger på differentialregning.

Betragt en differentiabel funktion $f(x)$. Vi vil finde et nulpunkt for funktionen, dvs. et tal x_∞, således at $f(x_\infty) = 0$. Vi har en anelse om, at dette nulpunkt ligger i nærheden af tallet x_0.



For at finde en bedre tilnærmelse til nulpunktet end x_0 approximerer vi funktionen med dens tangent i x_0. Vi kan ikke umiddelbart finde nulpunktet for funktionen, men vi kan sagtens finde nulpunktet for tangenten. Tangentens ligning er nemlig

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

og forudsat $f'(x_0) \neq 0$ (dvs. at tangenten ikke er vandret), så er nulpunktet

$$0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\Updownarrow$$

$$f'(x_0)x_0 - f(x_0) = f'(x_0)x$$

$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{f'(x_0)x_0 - f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Dvs. at man kunne formode, at tangentens skæring med x-aksen

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

er en bedre approximation end x_0 til nulpunktet x_∞.

Denne proces kunne vi jo gentage eller *iterere*, og få en endnu bedre tilnærmelse

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

eller endnu, endnu bedre

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

eller endnu, endnu, endnu bedre

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$

osv.........

Vi får altså en række tal: x_0 , x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , ..., som skulle blive en bedre og bedre tilnærmelse til nulpunktet x_∞.

I praksis skynder man sig at opskrive forskriften for den såkaldte *iterationsfunktion*:

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

og så beregne

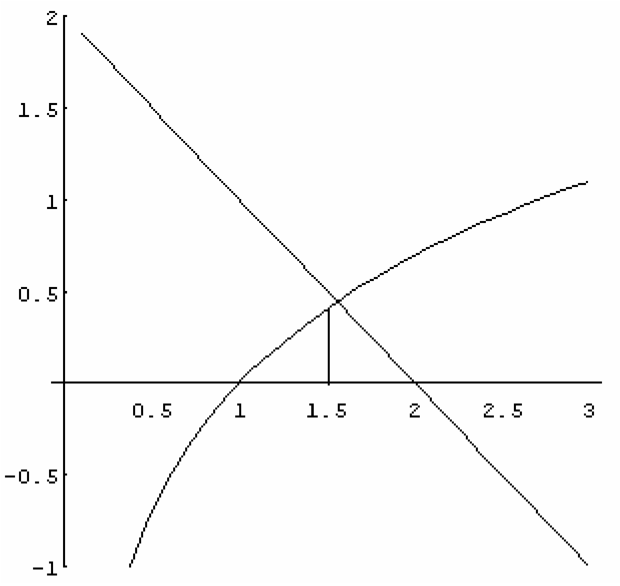
$$x_1 = F(x_0),\ \ x_2 = F(x_1),\ x_3 = F(x_2), \ldots$$

Eksempel

Vi vil løse ligningen

$$\ln x = 2 - x$$

Ser man på graferne for de to funktioner $x \mapsto \ln x$ og $x \mapsto 2 - x$, så kan man se, at graferne skærer hinanden omkring punktet med x-koordinaten 1,5.



Vi starter med at omskrive ligningen til den nye ligning

$$\ln x-(2-x)=0$$

og vi ser, at vi skal finde et nulpunkt for funktionen

$$f(x)=\ln x-(2-x)=\ln x-2+x$$

Vi opskriver iterationsfunktionen

$$f'(x)=(\ln x-2+x)'=\frac{1}{x}+1$$

$$F(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{\ln x-2+x}{1/x+1}=x-\frac{x\ln x-2x+x^2}{1+x}=$$

$$\frac{x(1+x)}{1+x}-\frac{x\ln x-2x+x^2}{1+x}=\frac{x+x^2-(x\ln x-2x+x^2)}{x+1}=$$

$$\frac{3x-x\ln x}{x+1}$$

(det er ikke altid, at det kan betale sig at omskrive iterationsfunktionen - men her kunne det!)
Som startværdien x_0 vælger vi tallet fra grafen ovenfor, nemlig $x_0=1,5$. Ved at iterere får vi

$$x_1=F(x_0)=F(1,5)=\frac{3\cdot 1,5-1,5\ln 1,5}{1,5+1}=1,5567209$$

$$x_2=F(x_1)=F(1,5567209)=1,5571456$$

$$x_3=F(x_2)=F(1,5571456)=1,5571456$$

(Det er en god idé at putte tallet x_n ind i lommeregnerens hukommelse, når man skal beregne det efterfølgende tal x_{n+1}).

Det viser sig, at vi allerede efter 3 iterationer får en stabil værdi på 1,5571456. Løsningen til ligningen er altså 1,5571456 med 7 decimaler.

Opgaver

12.1 Løs nedenstående ligninger med 5 decimaler.

a) $\ln x - x + 4 = 0$ b) $x^2 - e^x = 0$

12.2 Newton-Raphson's metode virker ikke altid. Forsøg med denne metode i nedenstående tre tilfælde.

a) $x - e^x = 0$ med $x_0 = 0$

b) $x^3 - 5x = 0$ med $x_0 = 1$

c) $e^x - \sqrt{x} = 0$ med $x_0 = 1$

Havd gik galt?
Tegn i alle tre tilfælde de relevante grafer og undersøg grafisk, hvad der gik galt.

12.3 En anden metode til at løse ligninger med numerisk, er den såkaldte *bisektionsmetode*. Denne er langsommere end Newton-Raphson, men kan til gengæld bruges i langt flere tilfælde.

Metoden går ud på at finde en løsning til ligningen $f(x) = 0$, hvor *f* er en kontinuert funktion.
Man starter med et interval $[x_0, x_1]$, hvor $f(x_0)$ og $f(x_1)$ har modsatte fortegn. Idet *f* er kontinuert, så må der findes et nulpunkt i dette interval. (Hvorfor?).
Sæt $x_2 = (x_0 + x_1)/2$ - x_2 er midtpunktet af det oprindelige interval. Hvis $f(x_2)$ har samme fortegn som $f(x_0)$, så må der findes et nulpunkt i intervallet $[x_2, x_1]$, og i det andet tilfælde må nulpunktet ligge i $[x_0, x_2]$.
Vi har nu et interval, som er halvt så stort som det første, og hvori det stadigvæk findes et nulpunkt. (Bisektion betyder halvering...)
Fortsættes på denne måde, så fås en følge af stadigt mindre intervaller, hvori der findes et nulpunkt. På et tidspunkt er intervallet så lille, at nulpunktet er bestemt med det ønskede antal decimaler.

Tegn graferne for funktionerne i opgave 12.2 (hvis du da ikke allerede har gjort dette). Find derefter samtlige løsninger til de tre ligninger vha. bisektionsmetoden. Du skal bestemme løsningerne med 3 decimaler.

5.13 Et hurtigt bevis for toppunktsformlen

Sætning 32

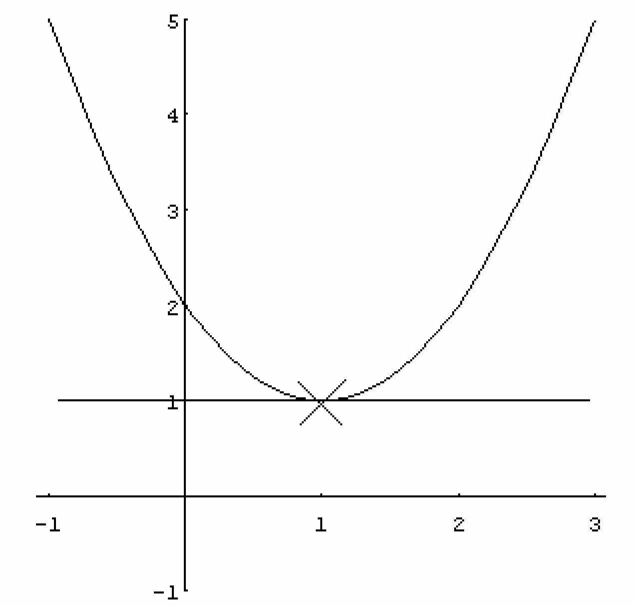
Parablen med ligningen

$$y = ax^2 + bx + c \quad , \quad a \neq 0$$

har sit toppunkt i

$$(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a})$$

Bevis:



Ligger man på parablen til højre, så ser man, at vi har en vandret tangent i parablens toppunkt. Lad os finde *x*-koordinaten til dette punkt: Vi har, at

$$f'(x) = 2ax + b$$

og dette udtryk er lig nul for

$$2ax + b = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$x = -\frac{b}{2a}$$

Dette er altså toppunktets *x*-koordinat!

Vi kan så finde *y*-koordinaten ved indsættelse:

$$f(-\frac{b}{2a}) = a(-\frac{b}{2a})^2 + b(-\frac{b}{2a}) + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c =$$
$$-\frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

5.14 Opgaver

14.1 Nedenstående er taget fra *Samvirke*, august 1980. Det er en del af en artikel af professor Ove Nathan om moderne atomfysik:

> **Universets alder - et kort sekund**
> Senest har kvarkfysikken sat spørgsmålstegn ved endnu en "hellig ko": Protonens absolutte stabilitet. Kvark-modellen forudsiger, at protonen er radioaktiv med en halveringstid på ca. 10^{30} år (et ettal med 30 nuller efter). Halveringstiden er den tid, der skal hengå, før halvdelen af et vist antal protoner en sønderdelt til andre partikler. Man kan naturligvis ikke direkte måle et tidsrum på 10^{30} år - selv universets alder (ca. 20 milliarder år) er kun et kort sekund i sammenligning. Men hvis man har mange protoner, kan man i løbet af et års tid gøre sig håb om at iagttage sønderdelingen af nogle få protoner. Forsøget er inden for rækkevidde, hvis man iagttager ca. 10^{30} protoner, svarende til protonantallet i et middelstort svømmebasin fyldt med vand.
> I disse måneder er den første forsøgsopstilling til måling af protonens sønderdeling ved at blive monteret i en forladt mineskakt dybt under Jordens overflade.

Vi antager i det følgende, at kvarkmodellen holder, således at protonen er radioaktiv med en halveringstid på 10^{30} år.
Angiv en forskrift for den funktion *f*, der beskriver, hvor mange protoner der er tilbage til tiden *t*, målt i år, når der til tiden 0 er 10^{30} protoner.
Bestem det approximerende førstegradspolynomium til *f* i tallet 0.
Bestem ved hjælp heraf et skøn over, hvor mange af de 10^{30} protoner der sønderdeles i det første år, og sammenhold med artiklens oplysning om dette.

14.2 I et koordinatsystem har en parabel ligningen $y = \frac{1}{4}x^2$. Der er givet et tal t , $t \neq 0$.
Bestem en ligning for parablens tangent i punktet $P_t = (t, \frac{1}{4}t^2)$.
Bestem en ligning for den tangent til parablen, der er vinkelret på tangenten i P_t.
Bevis, at de to tangenter skærer hinanden på linien med ligningen $y = -1$.

14.3 Funktionen *f* er givet ved

$f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

Skitsér grafen for *f* og bestem en ligning for tangenten til grafen i punktet $P = (x_0, f(x_0))$.

Om ethvert punkt $S = (a,b)$ i planen gælder, at der gennem *S* går 0, 1 eller 2 tangenter til grafen for *f*.

Bestem for hvert af følgende tre punkter antallet af tangenter gennem punktet:

1) $S = (1;-3)$ 2) $S = (1;2)$ 3) $S = (0,1)$

For hvilke talpar (a,b) går der henholdsvis 0, 1 eller 2 tangenter gennem $S = (a,b)$?

Beskriv beliggenheden af *S* i hvert af de tre tilfælde.

14.4 Funktionen *f* er bestem ved forskriften

$$f(x) = x + \ln x$$

Bestem definitionsmængden for *f*.

Skitsér grafen for *f*.

Grafen for *f* har en tangent, der går gennem punktet $O = (0,0)$. Bestem en ligning for denne tangent.

Beregn et gradtal for den spidse vinkel mellem tangenten og *y*-aksen.

Funktionen *f* har netop ét nulpunkt x_0. Bestem dette med 3 decimaler.

14.5 Funktionen *f* er bestemt ved

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$$

Tegn grafen for *f*, og bestem definitionsmængden for *f*.

Grafen for *f* indeholder to punkter *P* og *Q* med andenkoordinat 1. Grafens tangenter gennem *P* og *Q* danner sammen med linien genneg *P* og *Q* en trekant. Bestem arealet af denne trekant.

14.6 Funktionen *f* er bestemt ved $f(x) = x + \sqrt{x}$

Bestem vinklerne mellem de to tangenter til grafen med røringspunkterne

$A = (1,2)$ og $B = (4,6)$.

14.7 Dansk Standard 1051.1 giver regler for afprøvning af forskellige bygningsdeles modstandsevne mod brand. Bygningsdelene opvarmes i en speciel ovn, og temperaturen i ovnen skal stige i overensstemmelse med følgende formel:

$$T - T_0 = 150 \cdot \ln(8t + 1)$$

hvor

t er tiden i minutter

T er ovntemperaturen i °C til tiden *t*, og

T_0 er ovntemperaturen i °C ved prøvens begyndelse ($t = 0$).

Grafen for temperaturstigningen $T - T_0$ som funktion af tiden t kaldes "standardbrandkurven".
Skitsér denne kurve for de første 360 minutter efter prøvens begyndelse.
Beregn, hvor lang tid der går, før temperaturen er steget med $1000°\,C$.
Beregn det tidspunkt, hvor temperaturen stiger med en hastighed $\frac{dT}{dt}(= T')$ på $2°\,C$ i minuttet.

14.8 En klassisk måde til at beregne tilnærmede værdier for kvadratrødder på, er nedenstående:
For at beregne $\sqrt{a}$ sætter man $x_0 = 1$ (eller en anden værdi) og beregner $x_1, x_2, x_3, \ldots$, hvor

$$x_{i+1} = \tfrac{1}{2}(x_1 + \frac{a}{x_1})$$

Bevis denne formel ved at opskrive iterationsformlen for funktionen $f(x) = x^2 - a$.
Anvend metoden til at finde tilnærmede værdier for $\sqrt{2}$ og $\sqrt{3}$.

14.9 Bestem en løsning til ligningen

$$x^5 + 7x^3 - 20 = 0$$

som ligger i intervallet $[1;2]$. Bestem løsningen med 5 decimaler.

14.10 Bevis, at ligningen

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 1 = 0$$

har en løsning i $[-1;0]$

14.11 En population af vilde kaniner kan beskrives ved formlen

$$f(p) = 6p - \frac{1}{12}p^2$$

hvor

p er antallet af kaniner i et givet år, og
$f(p)$ er antallet af kaniner næste år.

Et år er der $p = 45$ kaniner. Hvor mange kaniner er der det næste år? Og det næste år igen?
Hvor stor er populationsstilvæksten, når $p = 45$?.
Hvor stor skal p være, for at populationen er konstant fra år til år?

14.12 Betragt funktionen f med forskriften

$$f(x) = x^5$$

Opskriv det approximerende førstegradspolynomium for f i $x = 2$.
Bestem en tilnærmet værdi for $2{,}07^5$
Sammenlign med lommeregnerens værdi. Hvor stor er den procentvise afvigelse?

14.13 Bestem de tangenter til grafen for funktionen

$$f(x) = x^2 - 1$$

som går gennem punktet $(1;-3)$.
(Vink: Kald røringspunktet for $(t, t^2 - 1)$ og opskriv tangentligningen).

14.14 Bestem den stamfunktion F til $f(x) = 2x + 1$, som opfylder, at $F(3) = 0$.

14.15 Bestem den stamfunktion F til $f(x) = 2x - 4$, som har linien med ligningen $y = -2x + 5$ som tangent.

14.16 Betragt funktionen

$$f(x) = x + \sqrt{x}$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f med røringspunktet $(4, f(4))$.
Bestem en ligning for den linie, som står vinkelret på ovennævnte tangent, og som går gennem røringspunktet $(4, f(4))$.
(Denne linie kaldes *normalen* til grafen i punktet $(4, f(4))$.

14.17 Førstegradspolynomiet p opfylder, at $p'(x) = 5x - 2p(x)$
Bestem en forskrift for p.

14.18 Betragt funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto \sqrt[3]{x}$.
Opskriv den differentierede funktion f'. Er denne defineret i $x = 0$.
Tegn grafen for f og argumenter for, at grafen for f alligevel har en tangent med røringspunktet $(0, f(0))$.
Hvad er ligningen for denne tangent?
Hvorfor kunne man ikke finde denne tangent vha. differentialregning?

14.19 Bestem tallet *k*, således at funktionen *f* med forskriften

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, x < 1 \\ \quad k \quad , x = 1 \\ 2x - 5, x > 1 \end{cases}$$

bliver kontinuert i $x = 1$.
Er *f* differentiabel i $x = 1$? Bestem i så fald $f'(1)$.

14.20 Betragt funktionen

$$f :]0;\infty[\to]0;\infty[: x \mapsto \sqrt{x}$$

Opskriv tangenten til grafen for *f* i røringspunktet $(t, f(t))$.
Bevis, at denne tangent går gennem punktet $(0, \frac{1}{2}\sqrt{t})$

14.21 Funktionen *f* er givet ved

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 12$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for *f* med røringspunktet $(2, f(2))$.
Bestem en ligning for den tangent, som har hældningskoefficienten 12.
Bestem en ligning for tangenten, der er parallel men linien med ligningen $3y + 27 = 9x$
Bestem en ligning for tangenten, som står vinkelret på linien med ligningen $2y + x - 4 = 0$.

Facitliste

1.1. c) Skemaet bør se ud som følger (men afvigelser kan forekomme):

x_0	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x_0)$	9	4	1	0	1	4	9
$f'(x_0)$	-6	-4	-2	0	2	4	6

1.3

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-	0	+	+	+	0	-	0	+
$f'(x)$	+	+	+	-	-	-	0	+	+

1.4

x	a	b	c	d	e
$g(x)$	+	-	0	-	+
$g'(x)$	-	0	0	0	+

1.6 a) $y=\frac{1}{2}(x-1)+1$ b) $y=\frac{1}{6}(x-9)+3$
c) $y=\frac{1}{4}(x-4)+2$ d) $y=\frac{1}{2\sqrt{5}}(x-5)+\sqrt{5}$

1.7 a) $y=3(x-1)+1$ og $y=12(x-2)+8$
b) $13{,}67°$ c) $(0;0)$

2.1 Kun *f*, *g* og *i* er funktioner.

2.2 $\mathrm{Dm}(f)=\mathbf{R}$ $\mathrm{Dm}(g)=\left]0;\infty\right[$ $\mathrm{Dm}(h)=\left[-2;\infty\right[$
$\mathrm{Dm}(i)=\mathbf{R}$ $\mathrm{Dm}(j)=\left[0;\infty\right[$
Alle sekundærmængderne er $\mathbf{R}$

2.3 $g\circ f:\left]0;\infty\right[\to\mathbf{R}:x\mapsto \ln x+2$ $h\circ f:\left]0;\infty\right[\to\mathbf{R}:x\mapsto x$
$f\circ h:\mathbf{R}\to\mathbf{R}:x\mapsto x$ $g\circ i:\left]-4;\infty\right[\to\mathbf{R}:x\mapsto\sqrt{x-4}+2$
$f\circ g$ kan kun defineres, hvis man ændrer definitionsmængden:
$f\circ g:\left]-2;\infty\right[\to\mathbf{R}:x\mapsto\ln(x-2)$

3.1 Sætning 9: $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}\setminus\{0\}$ $f':\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}\setminus\{0\}$
Sætning 10: $g:\left[0;\infty\right[\to\mathbf{R}$ $g':\left]0;\infty\right[\to\mathbf{R}$

3.2 $h'(x)=3x^2$

3.3 Ja - se sætning 27

4.1 a) 0, -2, 2, -2 b) 0, -2, 2, -2 c) ja, ja, ja, ja

4.3 Ja

5.1 a) *f*, *h*, og *i* b) Kun *i* c) $i'(2)=4$

6.1 a) $4x^3$ b) $21x^6$ c) $-2x^{-3}$ d) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e) $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ f) $2e^x$ g) $\ln 2\cdot 2^x$ h) $1/x$
i) $\frac{1}{3}x^{-2/3}$ j) $\frac{1}{4}x^{-3/4}$ k) $\ln 4\cdot 4^x$ l) $-\ln 2\cdot(\frac{1}{2})^x$

6.2 a) $2x-3$ b) $8x$ c) 3

d) $24x^2-14x$ e) $14x^6+8x$ f) $12x^5+\frac{3}{x}$

g) $x+3$ h) $45x^2-24x^5+\frac{3}{2\sqrt{x}}$ i) $2e^x+\ln 3\cdot 3^x$

j) $24x^2-3$ k) $\frac{1}{2\sqrt{x}}-\ln 4\cdot 4^x+3e^x$ l) $\frac{3}{x}+5$

6.3 a) $3x^2+2x-2$ b) $6x+2$ c) $(3x+5)e^x$

d) $10x^2-12-\frac{4}{x}+3x^2\ln x$ e) $12x+10$

f) $72x^5+40x^4+36x^3+2x^2-12$ g) $6x-x^{-2}+3x^{-4}$

h) $6x2^x+6xe^x-\dfrac{2^x}{x}-\dfrac{e^x}{x}+3\ln 2\cdot x^2 2^x+3x^2e^x-\ln 2\cdot 2^x\ln x-\ln x\cdot e^x$

6.4 a) $\dfrac{4x^2-8x+3}{(x-1)^2}$ b) $\dfrac{-3x-4}{3x^3}$ c) $\dfrac{1}{(2x+3)^2}$

d) $\dfrac{-6-\frac{1}{x}-2\ln x}{(2x-1)^2}$ e) $\dfrac{-x^2+14x}{(x^2-3x+6)^2}$ f) $\dfrac{2x^3-3x^2+1}{(x-1)^2}$

g) $\dfrac{xe^x-e^x}{x^2}$ h) $\dfrac{e^x-xe^x}{e^{2x}}=\dfrac{1-x}{e^x}$ i) $\dfrac{2+\frac{3}{x}-2\ln x}{(2x+3)^2}$

j) $\dfrac{-3x^4-3}{(x^4-3)^2}$

6.5 a) $3x^2-7$ b) $4x^3-3x^2-12x$

c) $-\dfrac{2}{(x-1)^2}\cdot(\dfrac{1}{2x}-\dfrac{x^2}{x-2})+\dfrac{x+1}{x-1}\cdot(-\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2})$

d) $\dfrac{4x^3+22x^2-16x-48}{(x+4)^2}$ e) $\dfrac{e^x(-\frac{3}{2}\sqrt{x}-2+x+x\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}})}{(x-1)^2}$

f) $8x^3-6x^2-2x-18+12x^{-1}$

6.6 a) $1/2\sqrt{x+1}$ b) $1/(x-2)$ c) $7(x+4)^6$

d) $x/\sqrt{x^2+1}$ e) $-3(x+\ln x)^{-4}(x+\frac{1}{x})$

f) e^{x+2} g) $(2x+2)e^{x^2+2x-1}$ h) $\frac{1}{2}\sqrt{e^x}$

i) $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{2\sqrt{x+\ln x}}$ j) $12(2x^2+2x-1)^{11}\cdot(6x^2+3)$

k) $\dfrac{1}{x\ln x}$ l) $\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ m) $\dfrac{1}{2x}$

n) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$

6.7 a) $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}-4}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$ b)

$$\frac{2(x^3-2)3x^2\sqrt{2x-1}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}(x^3-2)^2}{2x+1}$$

c) $2e^x(e^x+6)-\dfrac{2+e^x}{2\sqrt{2x+e^x}}$ d) e^x-ex^{e-1}

e) $$\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\ln(8x-1)-\frac{8\sqrt{x^2+4}}{8x-1}}{(\ln(8x-1))^2}$$

8.1 For $x \neq 0$

10.2 a) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + k$ b) $2x^4 + k$

c) $2x^2 + \frac{3}{2}x\sqrt{x} + k$ d) $e^x - 8x + k$

f) $-\frac{1}{2}x^{-3} + \frac{7}{2}x^{-1} + 3\ln x + k$ g) $3x + k$

h) $\frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + k$ i) $\frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + k$

10.3 $F(x) = x^3 + 2x - 3$

12.1 a) 5,74903 b) −0,70346

Kapiteloversigt

Tretrinsraketten

Trin 1: Beregn $\Delta f = f(x+h) - f(x)$

Trin 2: Beregn $\dfrac{\Delta f}{h}$

Trin 3: Beregn $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\Delta f}{h}$

Regneregler

Sumreglen:	$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
Differensreglen:	$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$
Konstantreglen:	$(kf)'(x) = k \cdot f'(x)$
Produktreglen:	$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
Kvotientreglen:	$(\dfrac{f}{g})'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
Kædereglen:	$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Nogle differentialkvotienter:

$\dfrac{d}{dx}x^2 = 2x$ $\qquad$ $\dfrac{d}{dx}\sqrt{x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\dfrac{d}{dx}(\dfrac{1}{x}) = -\dfrac{1}{x^2}$

$\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ $\dfrac{d}{dx}\log_a x = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln a}$

$\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$ $\qquad$ $\dfrac{d}{dx}a^x = \ln a \cdot a^x$

$\dfrac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$

Newton-Raphsons iterationsmetode

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$