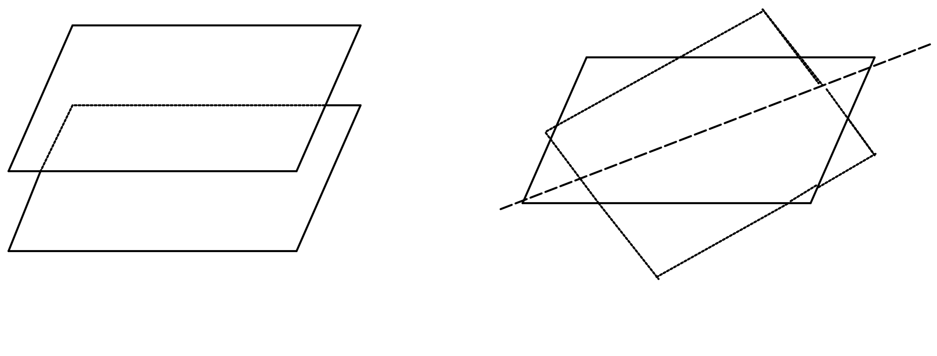
Matematikkens mysterier
- på et højt niveau

af

Kenneth Hansen

4. Rumgeometri



Hvordan kan to forskellige planer ligge i forhold til hinanden?

4. Rumgeometri

Indhold

Anvendte symboler

Sætninger, definitioner og formler er mærket med

FS: sætningen findes i formelsamlingen

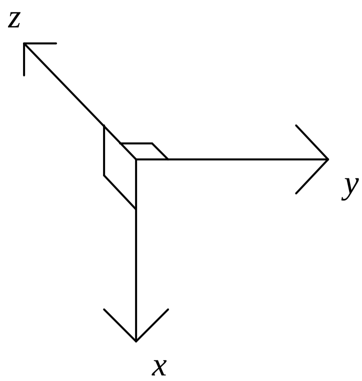
LS: lær selv formlen udenad - den findes (underligt nok) **ikke** i formelsamlingen, og du får sikkert brug for den til eksamen

4.1 Vektorer i rummet

Vi vil nu generalisere plangeometriens vektorer til rumgeometrien (eller *stereometrien*). De fleste af definitionerne og sætningerne i dette afsnit ligner plangeometriens resultater til forveksling, og der udelades derfor mange detaljer.

For det første har vi brug for et koordinatsystem i rummet. Dette er ganske simpelt at lave: Man tager et sædvanligt koordinatsystem i planen og sætter en tredie akse - z-aksen - på. Denne skal stå vinkelret på de to andre akser, og dette gøres i praksis ved, at z-aksen står vinkelret på den plan, x- og y-akserne danner.
Vi skal vælge z-aksens retning. Man plejer at vælge denne retning, således at man får et højreskruet system:

> Holdes højre hånd således, at omløbsretningen, dvs. retningen fra x- til y-aksen, følger med de fire fingre, så skal z-aksen pege i tommelfingerens retning.



En rumvektor er en pil i rummet. Alle de sædvanlige operation, addition, subtraktion og skalarmultiplikation, er defineret på samme måde som i plangeometrien. Nedenstående regler bevises ganske som i det plane tilfælde:

Sætning 1

Lad $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ være vektorer i rummet, og lad s og t være skalarer. Da gælder, at

a)	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$	b)	$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$
c)	$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$	d)	$t(\vec{a}+\vec{b})=t\vec{a}+t\vec{b}$
e)	$(s+t)\vec{a}=s\vec{a}+t\vec{a}$	f)	$(st)\vec{a}=s(t\vec{a})=t(s\vec{a})$
g)	$0\vec{a}=\vec{0}$	h)	$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$
i)	$\lvert\vec{a}+\vec{b}\rvert\le\lvert\vec{a}\rvert+\lvert\vec{b}\rvert$	j)	$\lvert\vec{a}-\vec{b}\rvert\le\lvert\vec{a}\rvert+\lvert\vec{b}\rvert$

En vektor i rummet skal beskrives ved tre koordinater. Vi har nemlig tre enhedsvektorer, $\vec{i}$, $\vec{j}$ og $\vec{k}$, som peger i samme retning som henholdsvis *x*-, *y*- og *z*-aksen. Koordinatfremstillingen af vektoren $\vec{a}$ er

(2) $$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Regning med koordinater foregår ganske som i det plane tilfælde:

Sætning 3 (FS)

Vektoren $\overrightarrow{AB}$ mellem punkterne $A = (a_1, a_2, a_3)$ og $B = (b_1, b_2, b_3)$ har koordinaterne $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$.

Stedvektoren $\overrightarrow{OA}$ til punktet $A = (a_1, a_2, a_3)$ har koordinaterne $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$.

Husk, at det, ligesom ved plangeometrien, er ekstremt vigtigt at skelne mellem et punkt og dets stedvektor.

Sætning 4

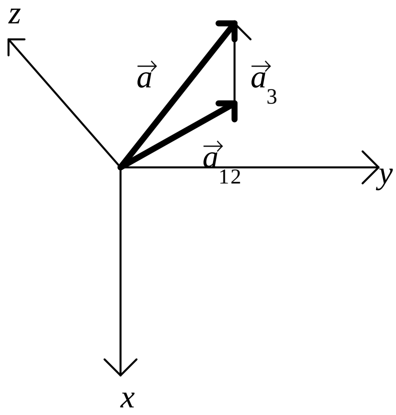
Hvis $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, så gælder

a) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$

c) $s\vec{a} = \begin{pmatrix} sa_1 \\ sa_2 \\ sa_3 \end{pmatrix}$ d) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Bevis:

Kun punkt d) kræver noget særskilt bevis:



Vi opsplitter $\vec{a}$ i komponenterne $\vec{a}_{12}$ og $\vec{a}_3$, hvor $\vec{a}_{12}$ befinder sig i xy-planen, og $\vec{a}_3$ er parallel med z-aksen: Vi har $\vec{a} = \vec{a}_{12} + \vec{a}_3$, og idet $\vec{a}_{12}$ kan opfattes som den plane vektor $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, og $\vec{a}_3 = a_3\vec{k}$, gælder at

$$|\vec{a}_{12}|^2 = a_1^{\,2} + a_2^{\,2} \quad \text{og} \quad |\vec{a}_3|^2 = a_3^{\,2}.$$

Nu er vektorerne $\vec{a}_{12}$ og $\vec{a}_3$ de to kateter i en retvinklet trekant med hypotenusen $\vec{a}$. Pythagoras giver derfor

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{a}_{12}|^2 + |\vec{a}_3|^2 = a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + a_3^{\,2}$$

og ved at tage kvadratroden bevises sætningen

Definition 5 (FS)

Skalarproduktet mellem vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos v$$

hvor v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Skalarproduktet kan udregnes ud fra de to indgående vektorers koordinater:

(6) $$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Sætning 7

Lad $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ være vektorer, t en skalar. Da gælder:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ b) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

c) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ d) $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (t\vec{b}) = t(\vec{a} \cdot \vec{b})$

e) $|\vec{a} \pm \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

Sætning 8 (FS)

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være egentlige vektorer. Så gælder, at

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Projektioner er defineret som i det plane tilfælde, og der gælder da også formlen:

(9) $$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

Opgaver

Formålet med nedenstående opgaver er ganske simpelt at overbevise dig om, at det ikke er spor svært at regne med vektorer i rummet - man gør stort set som med vektorer i planen...

1.1 Lad vektorerne $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ og $\vec{d}$ være givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestem nedenstående tal og vektorer:

a) $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$ b) $3\vec{d} - (\vec{b} - \vec{c}) - \vec{c}$ c) $\vec{d} - \vec{a} - \vec{b} + 4\vec{c}$

d) $|\vec{a}|$ e) $|\vec{b}|$ f) $\vec{a} \cdot \vec{b}$

g) $|\vec{a} + \vec{b}|$ h) $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ i) $\vec{a}_{\vec{b}}$

j) $\angle(\vec{c}, \vec{d} + \vec{b})$ k) $(\vec{a} \cdot b)(\vec{c} \cdot \vec{d})\vec{a}$ l) $\vec{c}_{\vec{d}} - \vec{d}_{\vec{c}}$

1.2 Vektorerne i rummet $\vec{a}$ og $\vec{b}$ opfylder

$$|\vec{a}| = 3 \qquad |\vec{a} + \vec{b}| = 9 \qquad \text{og} \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 18.$$

a) Bestem længden af vektoren $\vec{b}$.

b) Bestem vinklen mellem vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

c) Bestem vinklen mellem vektorerne $\vec{a} + \vec{b}$ og $\vec{a} - 2\vec{b}$.

1.3 For ethvert reelt tal t er vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} t-1 \\ t^2-1 \\ t^2-1 \end{pmatrix}$$

Bestem de værdier af t, for hvilke

a) $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale,

b) $|\vec{a}| = 6$.

1.4 I rummet er givet tre punkter $A = (1,3,-2)$, $B = (1,1,2)$ og $C = (4,0,0)$.

a) Overbevis dig om, at tre tilfældige (og forskellige) punkter i rummet enten ligger på samme linie eller i samme plan.

Det oplyses, at de tre punkter A, B og C ikke ligger på samme linie.

b) Bestem siderne og vinklerne i trekant ABC.

Et fjerde punkt D er bestemt ved, at firkant $ABCD$ er et parallelogram.

c) Bestem koordinaterne til punktet D.

d) Bestem koordinatsættet til diagonalernes skæringspunkt i firkanten $ABCD$, og til medianernes skæringspunkt i trekant ABC.

1.5 I rummet er vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ og punkterne A, B og C bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad A = (2,4,-1).$$

Endvidere oplyses det, at

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b} \qquad \text{og} \qquad \overrightarrow{AC} = \vec{b}\,.$$

a) Bestem koordinaterne til punkterne B og C.

b) Bestem sidelængderne og vinklerne i trekant ABC.

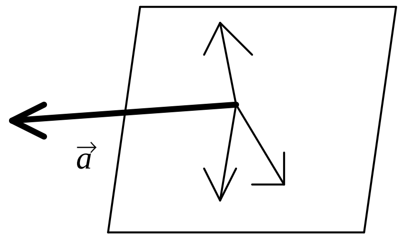
Punktet D opfylder, at firkant $ABCD$ er et parallelogram.

c) Bestem koordinaterne til D.

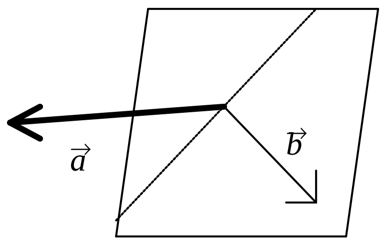
4.2 Krydsproduktet

En af de ting, som ikke kan generaliseres fra plangeometrien til rumgeometrien, er *tværvektoren*.

Grunden til dette er, at der ikke på nogen entydig måde kan konstrueres en vektor, som står vinkelret på en given vektor $\vec{a}$; som figuren viser, er der en hel række vektorer, som alle sammen er vinkelrette på $\vec{a}$ - disse vektorer vil i øvrigt ligge i den samme plan.



Men vælger man derimod *to* vektorer, $\vec{a}$ og $\vec{b}$, og undersøger, hvilke vektorer der står vinkelret på *begge* disse vektorer, så er situationen anderledes - kravet om, at den ønskede vektor skal stå vinkelret på $\vec{a}$ tvinger vektoren til at ligge i planen. Men vektoren skal også stå vinkelret på $\vec{b}$, så er den nødt til at ligge på den stiplede linie på figuren.



Dette viser, at man alligevel kan generalisere tværvektor-begrebet til rumgeometrien, dog med den forskel, at man skal have angivet to vektorer, før man kan finde deres fælles 'tværvektor'. Denne tilordning kaldes normalt *vektorproduktet* eller *krydsproduktet* - og man skriver $\vec{a} \times \vec{b}$. Bemærk, at skalarproduktet $\vec{a} \cdot \vec{b}$ er et tal, mens krydsproduktet $\vec{a} \times \vec{b}$ er en vektor. Man skal derfor passe på med sine gangetegn!

Vi giver den formelle definition af krydsproduktet:

Definition 10 (FS)

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være to vektorer i rummet. *Krydsproduktet* $\vec{a} \times \vec{b}$ defineres da som nedenstående vektor:

1) *længden* af $\vec{a} \times \vec{b}$ defineres som

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \sin v$$

hvor v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$;

2) *retningen* af $\vec{a} \times \vec{b}$ er givet ved den såkaldte *højrehåndsregel*:

Hold højre hånd i en knytnæve, således at fingrene peger i retningen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$; $\vec{a} \times \vec{b}$ vil da pege i tommeltottens retning.

Bemærk, at denne definition også giver mening i følgende specialtilfælde:

1) Hvis $\vec{a}$ eller $\vec{b}$ er nulvektoren, så kan vi egentlig ikke tale om en vinkel v mellem $\vec{a}$ eller $\vec{b}$. Men her er der ikke noget problem, idet længden af $\vec{a} \times \vec{b}$ bliver nul ifølge regel I) - $\vec{a} \times \vec{b}$ er da nulvektoren, og v (og retningen) er ligegyldig.

2) Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle, så er højrehåndsreglen svær at anvende - retningen af $\vec{a} \times \vec{b}$ er ikke veldefineret. Men dette er ligegyldigt, idet v enten er $0°$ eller $180°$, og i begge tilfælde vil faktoren $\sin v$ gøre, at længden af $\vec{a} \times \vec{b}$ bliver 0.

Historisk set opfandt man krydsproduktet i forbindelse med teorien for *elektromagnetisme*. Her optræder højrehåndsreglen i forskellige varianter, f.eks. i loven om *magnetfeltet fra en spole*:

Hold højre hånd om spolen således at fingrene peger i strømmens retning.
Da vil magnetfeltet fra spolen pege i tommeltottens retning.

Som det ses, så har vi umiddelbart følgende sætning:

Sætning 11 (FS)

Hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er egentlige vektorer, så gælder, at

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \parallel \vec{b}$$

Bevis:

Vi har, at $\vec{a}\times\vec{b}$ kun kan være $\vec{0}$, når længden af $\vec{a}\times\vec{b}$ er 0. Denne længde er givet ved

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin v$$

og idet $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er egentlige vektorer, så kan denne længde kun være nul, når faktoren $\sin v$ er 0. Det er den netop når vinklen v mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er enten 0° eller 180°, dvs. når $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle.

Vi vil nu prøve at udregne krydsproduktet af standardvektorerne $\vec{i}$, $\vec{j}$ og $\vec{k}$. Idet vi får brug for dette resultat, når vi skal finde et koordinatudtryk for krydsproduktet, formulerer vi resultatet som en sætning:

Sætning 12

Vi har følgende krydsprodukter:

1) $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = \vec{0}$

2) $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$ $\quad\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$ $\quad\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$

3) $\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}$ $\quad\vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}$ $\quad\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$

Bevis:

De tre krydsprodukter i 1) giver alle $\vec{0}$, idet en vektor jo altid er parallel med sig selv. I 2) og 3) ser man først, at alle krydsprodukterne har længden 1 - faktorerne i krydsproduktet er alle enhedsvektorer, og vinklen mellem to af vektorerne er altid 90° . Retningen kan så bestemmes af højrehåndsreglen (Prøv!).

Her er nogle regneregler for krydsproduktet:

Sætning 13 (LS)

1) $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$ $\qquad$ 2) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

3) $(k\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(k\vec{b}) = k(\vec{a}\times\vec{b})$

4) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ $\qquad$ 5) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

Bevis:

Regel 1) følger umiddelbart af sætning 11, idet en vektor altid er parallel med sig selv.

Regel 2) følger af højrehåndsreglen; bytter man om på rækkefølgen af $\vec{a}$ og $\vec{b}$, så skal højre hånd også vendes om, hvilket betyder, at tommelfingeren kommer til at pege i den modsatte retning.

Ved beviset for regel 3) starter man med at observere, længderne af de indgående vektorer er ens. Man skal da blot undersøge retningerne, og her skal man dele op i tre tilfælde: $k > 0$, $k = 0$, $k < 0$.

Når k er positiv, så bliver den ene af vektorerne k gange længere, hvilket gør længden af krydsproduktet k gange længere; men alle retninger forbliver uændrede.
Når k er nul, så bliver en af faktorerne i krydsproduktet nulvektoren, og dette gør naturligvis resultatet til nulvektoren.
Når k er negativ, så ændres retningen af en af vektorerne til den modsatte, hvilket ændrer omløbsretningen af faktorerne. Højre hånd skal da vendes på hovedet, hvilket igen ændrer retningen af krydsproduktet.

Reglerne 4) og 5) er temmeligt komplicerede at bevise, så vi nøjes med at give et over*bevis*ende eksempel nedenunder.

Eksempel

Vi vil vise, at $\vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k}) = \vec{i} \times \vec{j} + \vec{i} \times \vec{k}$.

Højresiden er en smal sag at udregne, idet vi har sætning 12:

$$\vec{i} \times \vec{j} + \vec{i} \times \vec{k} = \vec{k} + (-\vec{j}) = -\vec{j} + \vec{k}$$

Længden af denne vektor er

$$\left|-\vec{j} + \vec{k}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} .$$

Venstresiden er værre; vi har

$$\vec{j} + \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hvilket giver

$$\left|\vec{j} + \vec{k}\right| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Vi betegner vinklen mellem $\vec{i}$ og $\vec{j} + \vec{k}$ med v. Idet

$$\vec{i} \cdot (\vec{j} + k) = \vec{i} \cdot \vec{j} + \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 + 0 = 0$$

er $v = 90°$, og faktorerne i krydsproduktet på venstresiden er orthogonale. Derfor fås

$$\left|\vec{i} \times (\vec{j} + k)\right| = \left|\vec{i}\right| \left|\vec{j} + \vec{k}\right| \sin 90° = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2} .$$

$\vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k})$ skal stå vinkelret på $\vec{i}$, så $\vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k})$ må være parallel med *yz*-planen. Men $\vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k})$ skal også stå vinkelret på $\vec{j} + \vec{k}$, hvilket betyder, at $\vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k})$ bliver parallel med $-\vec{j} + \vec{k}$. Højrehåndsreglen viser, at $\vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k})$ faktisk er ensrettet med $-\vec{j} + \vec{k}$.

Alt i alt ser vi, at længden og retningen af venstre- og højresiden er ens, hvilket betyder, at de to vektorer er ens.

Vi er nu i stand til at lave en koordinatformel for krydsproduktet:

Sætning 14 (FS)

Lad $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Så er $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

Bevis:

Beviset for denne formel er lige ud af landevejen - vi opskriver faktorernes koordinatfremstillinger og bruger sætning 12 og 13:

$$
\begin{aligned}
&\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = \\
&a_1b_1\vec{i} \times \vec{i} \quad + \quad a_2b_1\vec{j} \times \vec{i} \quad + \quad a_3b_1\vec{k} \times \vec{i} \quad + \\
&a_1b_2\vec{i} \times \vec{j} \quad + \quad a_2b_2\vec{j} \times \vec{j} \quad + \quad a_3b_2\vec{k} \times \vec{j} \quad + \\
&a_1b_3\vec{i} \times \vec{k} \quad + \quad a_2b_3\vec{j} \times \vec{k} \quad + \quad a_3b_3\vec{k} \times \vec{k} \quad = \\
&\vec{0} \quad + \quad -a_2b_1\vec{k} \quad + \quad a_3b_1\vec{j} \quad + \\
&a_1b_2\vec{k} \quad + \quad \vec{0} \quad + \quad -a_3b_2\vec{i} \quad + \\
&-a_1b_3\vec{j} \quad + \quad a_2b_3\vec{i} \quad + \quad \vec{0} \quad = \\
&(a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}
\end{aligned}
$$

Denne formel er ikke lige let at huske, så derfor anvender man i praksis følgende metode til udregning af krydsproduktet: Opskriv koordinaterne for $\vec{a}$ og $\vec{b}$ to gange hver på følgende måde:

$$
\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{matrix}
$$

Koordinaterne for $\vec{a} \times \vec{b}$ kan da findes som *determinanter* i ovenstående skema:

1. koordinaten er hér:

$$\begin{array}{c|cc|ccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \qquad (= a_2 b_3 - a_3 b_2)$$

2. koordinaten er hér:

$$\begin{array}{cc|cc|cc} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \qquad (= a_3 b_1 - a_1 b_3)$$

og 3. koordinaten er hér:

$$\begin{array}{ccc|cc|c} a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \qquad (= a_1 b_2 - a_2 b_1)\,.$$

Eksempel

Vi har, at $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -13 \\ 11 \end{pmatrix}$. Dette kan ses ved at betragte skemaerne:

$$x: \quad \begin{array}{c|cc|ccc} 1 & 4 & 6 & 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array} \qquad \cong \quad \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 6 = -12$$

$$y: \quad \begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 4 & 6 & 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array} \qquad \cong \quad \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = -13$$

$$z: \quad \begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 4 & 6 & 1 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 1 & -2 & 3 & 1 \end{array} \qquad \cong \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - (-2) \cdot 4 = 11$$

Eksempel

Punkterne $A = (1,2,3)$, $B = (4,5,6)$ og $C = (0,1,2)$ ligger på samme rette linie - dette kan f.eks. ses ved at vise, at $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ er parallelle:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 5-2 \\ 6-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

og det ses, at

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \overline{0}\,.$$

Advarsel

Krydsproduktet er *ikke* associativt, dvs. ligningen

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

normalt *ikke* gælder. Et eksempel herpå er

$$\vec{i}\times(\vec{i}\times\vec{j})=\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}\neq\vec{0}=\vec{0}\times\vec{j}=(\vec{i}\times\vec{i})\times\vec{j}$$

Derimod har vi

> **Sætning 15**
>
> Lad $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ være vektorer. Så gælder
>
> a) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$
>
> b) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$

Bevis:

Beviserne for a) og for b) er som snydt ud af næsen på hverandre, så vi nøjes med at bevise a). Dette foregår ved koordinatopskrivning:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\quad,\quad\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\quad,\quad\vec{c}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$$

Efter at have indført notationen, så er det bare at smøge ærmerne op:

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\left(\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_2c_3-b_3c_2\\b_3c_1-b_1c_3\\b_1c_2-b_2c_1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_3c_1-b_1c_3)\\a_3(b_2c_3-b_3c_2)-a_1(b_1c_2-b_2c_1)\\a_1(b_3c_1-b_1c_3)-a_2(b_2c_3-b_3c_2)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}b_1a_2c_2+b_1a_3c_3-c_1a_2b_2-c_1a_3b_3\\b_2a_1c_1+b_2a_3c_3-c_2a_1b_1-c_2a_3b_3\\b_3a_1c_1+b_3a_2c_2-c_3a_1b_1-c_3a_2b_2\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}b_1a_1c_1+b_1a_2c_2+b_1a_3c_3-c_1a_1b_1-c_1a_2b_2-c_1a_3b_3\\b_2a_1c_1+b_2a_2c_2+b_2a_3c_3-c_2a_1b_1-c_2a_2b_2-c_2a_3b_3\\b_3a_1c_1+b_3a_2c_2+b_3a_3c_3-c_3a_1b_1-c_3a_2b_2-c_3a_3b_3\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}b_1(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)-c_1(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\\b_2(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)-c_2(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\\b_3(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)-c_3(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\end{pmatrix}=$$

$$(\vec{a}\cdot\vec{c})\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

Vi afslutter med følgende sætning:

Sætning 16 (FS)

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være egentlige vektorer.

1) Parallelogrammet udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ har arealet $|\vec{a}\times\vec{b}|$.

2) Trekanten udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ har arealet $\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$.

Bevis:

Ligesom i det plangeometriske tilfælde er arealet af parallelogrammet og af trekanten givet ved henholdsvis $|\vec{a}||\vec{b}|\sin v$ og $\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin v$, hvor v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Sætningen følger nu af definition 10, idet $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin v$.

Regnet opgave

Opgave: Parallelogrammet *ABCD* er givet ved $A=(1{,}1{,}1)$, $B=(2{,}3{,}-4)$ og $C=(-2{,}3{,}1)$. Bestem koordinaterne for punktet *D*, og beregn arealet af parallelogrammet *ABCD*.

Løsning: Vi har umiddelbart, at

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-1 \\ -4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \text{og}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 3-1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Kaldes koordinatsystemets begyndelsespunkt for *O*, og benyttes at $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (*ABCD* er jo et parallelogram), så fås

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vi kender da *D*'s stedvektor, hvoraf kan aflæses, at $D = (-3, 1, 6)$.

For at finde arealet af *ABCD*, så finder vi $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \ldots = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}$, og arealet af *ABCD* er da lig

$$\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \sqrt{10^2 + 15^2 + 8^2} = \sqrt{389}$$

Opgaver

2.1 Lad vektorerne $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ og $\vec{d}$ være givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Bestem

a) $\vec{a} \times \vec{b}$ b) $\vec{a} \times \vec{c}$ c) $\vec{b} \times \vec{c}$

d) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ e) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ f) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$

g) arealet af parallelogrammet udspændt af $\vec{b}$ og $\vec{d}$

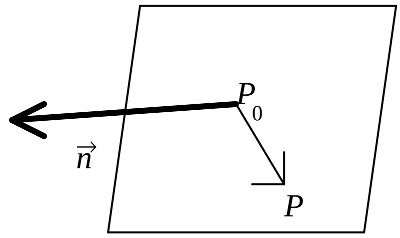
h) arealet af trekanten udspændt af $\vec{c}$ og $\vec{d}$

i) vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$

j) Er vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{d}$ mon parallelle?

4.3 Planer og linier

Vi vil nu se, hvorledes man kan beskrive planer og linier i rummet. Beskrivelserne vil på mange måder minde om beskrivelsen af linier indenfor plangeometrien.



En måde at karakterisere en plan på er ved hjælp af en *normalvektor*. Betragt figuren ovenfor. Her er normalvektoren $\vec{n}$ en egentlig vektor, som står vinkelret på planen, og P_0 er et fast punkt i planen. Det ses, at punktet P ligger i planen, netop når

$$\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}$$

Dette kan vi bruge til at finde en ligning for planen:

Lader vi normalvektoren $\vec{n}$ have koordinaterne $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ og punkterne P_0 og P have koordinaterne $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ og $P = (x, y, z)$, så er $\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix}$. Betingelsen $\vec{n} \perp \overrightarrow{P_0P}$ kan da omformuleres til $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$, og indsættes ovenstående koordinater fås *ligningen for en plan*:

> **Sætning 17 (FS)**
>
> Planen med normalvektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $(\vec{n} \neq \vec{0})$, og som indeholder punktet (x_0, y_0, z_0), har ligningen
>
> $$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Erstatter vi tallet $-ax_0 - by_0 - cz_0$ med tallet d i denne ligning, så fås en alternativ form for planens ligning:

(18) $$ax + by + cz + d = 0 .$$

Eksempel

yz-planen i koordinatsystemet er den plan, der indeholder både *y*- og *z*-aksen. Vi vil finde en ligning for denne plan:
Først bemærker vi, at $\vec{i}$ er en normalvektor for denne plan. Dernæst observeres, at denne plan indeholder punktet $O = (0,0,0)$. Dette giver ligningen

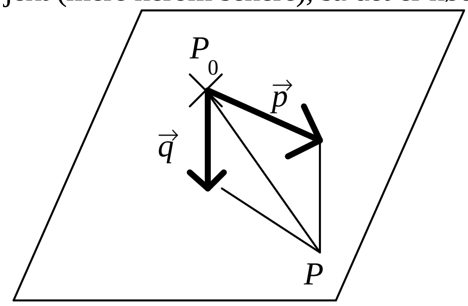
$$1(x-0)+0(y-0)+0(z-0)=0$$

eller, simplere skrevet

$$x=0$$

Tilsvarende ses *xz*-planen at have ligningen $y=0$, og *xy*-planen har ligningen $z=0$.

En anden måde at beskrive en plan på er ved hjælp af en *parameterfremstilling*. Nu er planen et todimensionalt objekt (mere herom senere), så det er nødvendigt med *to* parametre:



Vi vælger et punkt P_0 i planen, samt to *ikke-parallelle* vektorer (*retningsvektorer*) $\vec{p}$ og $\vec{q}$, som er parallelle med planen. På figuren ses, at punktet P ligger i planen, hvis og kun hvis der findes reelle tal *s* og *t*, så at $\overrightarrow{P_0P} = s\vec{p}+t\vec{q}$. (*s* og *t* kaldes *parametrene* i parameterfremstillingen.)

Lader vi $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x, y, z)$, $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ og $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$, så kan ovenstående ligning omskrives til den endelige udgave af *parameterfremstillingen for en plan:*

(19) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

Eksempel

yz-planen fra før har følgende parameterfremstilling:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

- denne plan indeholder nemlig punktet (0,0,0) og har retningsvektorerne $\vec{j}$ og $\vec{k}$

Vi vil nu se, hvorledes man kan gå fra den ene beskrivelse af en plan til den anden.

Regnede opgaver

Opgave: Find en ligning for planen med parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Løsning: Vi ser umiddelbart af parameterfremstillingen, at planen indeholder punktet (1,2,3). Endvidere er vektorerne

$$r_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ikke-parallelle retningsvektorer for planen, idet deres krydsprodukt ikke er nulvektoren. Vi finder en normalvektor $\vec{n}$ for planen som $\vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -13 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Heraf ses, at en ligning for planen er

$$-13(x-1) - 4(y-2) + 8(z-3) = 0$$

eller, skrevet pænere,

$$-13x - 4y + 8z - 3 = 0$$

Opgave: Find en parameterfremstilling for planen med ligningen $2x - 2y + z + 3 = 0$.

Løsning: Strategien er at finde tre punkter A, B og C i planen. Disse skal ikke ligge på sammen linie. $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ er da to ikke-parellelle retningsvektorer for planen.
Sættes $x = y = 0$, så ses, at punktet $A = (0,0,-3)$ ligger i planen.
Tilsvarende kan man sætte $x = z = 0$, hvilket giver, at $B = (0, \frac{3}{2}, 0)$ ligger i planen. Endelig ligger $C = (-\frac{3}{2}, 0, 0)$ i planen.
Vi finder retningsvektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ \frac{3}{2}-0 \\ 0-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}-0 \\ 0-0 \\ 0-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Idet

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ \frac{9}{2} \\ -\frac{9}{4} \end{pmatrix} \neq \vec{0},$$

er $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ ikke parallelle. Parameterfremstillingen bliver nu

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Opgave: Find en ligning for planen indeholdende punkterne $A = (1,2,3)$, $B = (1,0,0)$ og $C = (-2,3,1)$.

Løsning: Vi har brug for en normalvektor $\vec{n}$ til planen. Denne vektor kunne f.eks. være $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ (forudsat, at denne ikke er nulvektoren):

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-2 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 3-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Idet planen jo går gennem (1,2,3), så får vi følgende ligning:

$$7(x-1) + 9(y-2) - 6(x-3) = 0$$

En linie i rummet kan desværre ikke beskrives ved en ligning - som vi skal se nedenfor, så er det nødvendigt med **to** ligninger. Men vi kan stadigvæk finde en parameterfremstilling, ganske som i plangeometrien:

Sætning 20 (FS)

Linien med retningsvektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ gennem punktet (x_0, y_0, z_0)

har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

Regnet opgave

Opgave: Find en parameterfremstilling for linien gennem punkterne $A = (1,4,8)$ og $B = (-3,5,0)$.

Løsning: En retningsvektor for linien må være

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3-1 \\ 5-4 \\ 0-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

En parameterfremstilling for denne linie er da

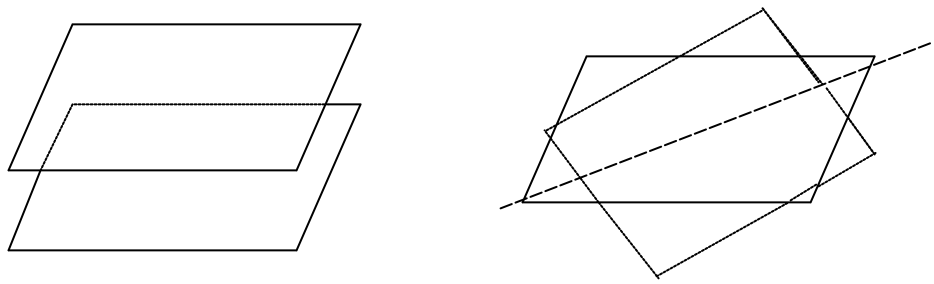
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Vi skal nu se på, hvorledes planer og linier kan skære hinanden. Vi starter med at betragte fællesmængden mellem to planer:

Sætning 21 (LS)

To planer α og β er enten

a) sammenfaldende
b) parallelle, og uden fælles punkter, eller
c) skærende - fællesmængden er da en linie.



(Figuren illustrerer tilfældene b) og c).)

Bevis:

Vi lader ligningerne for de to planer være

$$\alpha: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \quad \text{og}$$

$$\beta: a_2x + b_2y + c_2x + d_2 = 0$$

De to normalvektorer betegnes $\vec{n}_\alpha$ og $\vec{n}_\beta$ - vi har altså

$$\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Hvis begge disse normalvektorer er parallelle, så er planerne ligeledes parallelle, og vi er i tilfælde a) eller b).

Hvis disse to tværvektorer *ikke* er parallelle, så ved vi, at krydsproduktet $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta \neq \vec{0}$. Dette betyder, at mindst en af koordinaterne i dette krydsprodukt ikke er nul.

Lad os i første omgang antage, at det er x-koordinaten, som ikke er nul. Denne x-koordinat er lig

$$D = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Vi kan nu parametrisere de fælles punkter på α og β ved at parametrisere løsningerne til ligningssystemet

$$\begin{Bmatrix} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{Bmatrix}.$$

Dette gøres ved at kalde parameteren t, og lade $x = t$. Ligningssystemet kan da omskrives til

$$\begin{Bmatrix} b_1y + c_1z = -a_1t - d_1 \\ b_2y + c_2z = -a_2t - d_2 \end{Bmatrix}$$

Dette ligningssystems determinant er netop

$$D = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

som jo er forskellig fra nul! Ligningssystemet kan derfor løses; løsningen bliver

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -a_1 t - d_1 & c_1 \\ -a_2 t - d_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}} = \frac{-a_1 c_2 t - d_1 c_2 + a_2 c_1 t + c_1 d_2}{b_1 c_2 - b_2 c_1} =$$

$$\frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{b_1 c_2 - b_2 c_1} t + \frac{c_1 d_2 - c_2 d_1}{b_1 c_2 - b_2 c_1}$$

og et tilsvarende kompliceret udtryk for z. Det vigtige her er at bemærke, at begge udtryk er *lineære*, dvs. af formen $y = f_2 t + g_2$ og $z = f_3 t + g_3$, hvor f_2, f_3, g_2 og g_3 er reelle tal. Et punkt i løsningsmængden til det oprindelige ligningssystem kan da udtrykkes ved

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}.$$

og dette er jo parameterfremstillingen for en linie!

Endelig skal man betragte det tilfælde, hvor x-koordinaten for normalvektorernes vektorprodukt $\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta$ er nul. Men idet vi har antaget, at dette vektorprodukt ikke er nulvektoren, så må enten *y*- eller *z*-koordinaten være forskellig fra nul. Vi bruger da denne koordinat i stedet for x som parameter i ovenstående beregninger.

Eksempel

Vi vil bestemme fællesmængden og vinklen mellem planerne α og β med ligningerne

$$\alpha: -x + 2y + 3z = 1 \quad \text{og} \qquad \beta: 2x + 2y + 3z = 0$$

Vi starter med at bemærke, at planernes normalvektorer er

$$\vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \qquad \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

og at

$$\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

hvilket betyder, at planerne ikke er parallelle. Fællesmængden er en linie.
Desværre er x-koordinaten for krydsproduktet ovenfor lig 0, så metoden i beviset for sætning 21 kan ikke umiddelbart bruges. Men vi kan bare lade parameteren være y i stedet for x.
Erstatter vi således y med t, så fås ligningssystemet

$$\begin{Bmatrix} -x+3z=1+2t \\ 2x+3z=-2t \end{Bmatrix}$$

som løses ved determinantmetoden

$$D=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-1\cdot 3-2\cdot 3=-9$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 1+2t & 3 \\ -2t & 3 \end{vmatrix}=(1+2t)3-(-2t)3=3+12t$$

$$D_z=\begin{vmatrix} -1 & 1+2t \\ 2 & -2t \end{vmatrix}=(-1)(-2t)-2(1+2t)=-2-2t$$

eller

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{3+12t}{-9}=-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}t$$

$$z=\frac{D_z}{D}=\frac{-2-2t}{-9}=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}t\,.$$

Skæringslinien har altså parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ 1 \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

Vinklen v mellem α og β ses straks at være lig vinklen mellem normalvektorerne $\vec{n}_\alpha$ og $\vec{n}_\beta$. Denne vinkel findes vha. standardmetoderne:

$$\cos v=\frac{\vec{n}_\alpha\cdot\vec{n}_\beta}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|}=\frac{(-1)\cdot 2+2\cdot 2+3\cdot 3}{\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2}\sqrt{2^2+2^2+3^2}}=\frac{11}{\sqrt{14}\sqrt{17}}$$

$$v=\arccos\left(\frac{11}{\sqrt{14}\sqrt{17}}\right)\approx 44.5185°$$

Eksempel

Vi vil finde fællesmængden mellem planerne α og β givet ved

$$\alpha: 2x-y-z=9 \qquad \text{og} \qquad \beta: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Det letteste er her at indsætte udtrykkene for x, y og z fra β's parameterfremstilling i α's ligning. Herved opnås en sammenhæng mellem parametrene s og t, og den ene parameter kan elimineres:

$$2(1+2s+t)-(1+2t)-(1+s-3t)=9$$

$$\Updownarrow$$

$$3s+3t=9$$

$$\Updownarrow$$

$$s=3-t$$

Dette udtryk indsættes i β's parameterfremstilling, hvorved skæringsliniens parameterfremstilling opnås:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (3-t)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6-2t+t \\ 1+2t \\ 1+3-t-3t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Den bitre erfaring viser, at hvis begge planer er beskrevet ved en parameterfremstilling, så der det nemmest at omskrive den ene parameterfremstilling til en ligning, før man finder skæringslinien.

For linier i rummet gælder følgende sætning:

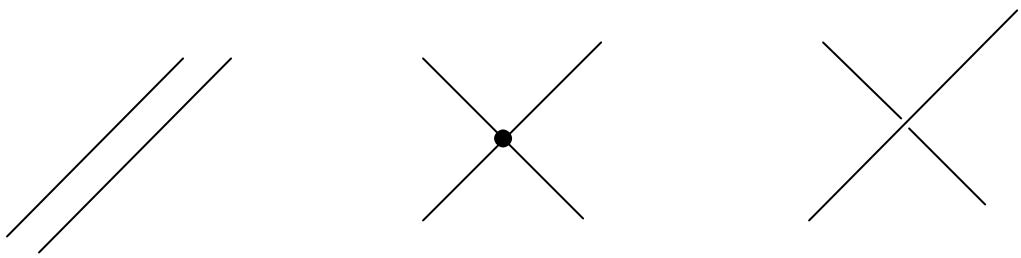
Sætning 22 (LS)

To linier l og m i rummet er enten

a) sammenfaldende,
b) parallelle og ikke sammenfaldende,
c) skærende, eller
d) vindskæve.

Bevis:

At to linier er *vindskæve* betyder simpelthen, at de hverken er parallelle eller skærende - se figuren illustrerende tilfældene b), c) og d). Beviset for sætningen bliver med denne definition trivielt, idet tilfælde d) opfanger det, som ikke hører ind under a), b) eller c).



b) parallelle linier   c) skærende linier   d) vindskæve linier

Sætningen fortæller desværre ikke, hvorledes man undersøger to liniers beliggenhed i forhold til hinanden. Metoden er som følger:

Man starter med at undersøge, om linierne er parallelle. Dette gøres ved at undersøge, om retningsvektorerne er parallelle.

Er retningsvektorerne parallelle så er linierne enten sammenfaldende eller parallelle og forskellige. Man undersøger da, om linierne har et fælles punkt - har de det, så der de nødvendigvis sammenfaldende.

Er retningsvektorerne ikke parallelle, så sætter man de to liniers parameterfremstillinger lig hinanden og opnår 3 ligninger med de to ubekendte s og t. To af ligningerne opfattes som et sædvanligt ligningssystem og løses, f.eks. ved hjælp af determinantmetoden, og løsningen (en værdi for s og en værdi for t) indsættes i den tredie ligning. Passer den, så skærer linierne hinanden, og passer den ikke, så er linierne vindskæve.

Nu kan man være uheldig, således at determinanten for de to udvalgte ligninger giver 0. Men denne determinant er en af koordinaterne i de to retningsvektorers krydsprodukt, og er retningsvektorerne ikke parallelle, så er dette krydsprodukt ikke nulvektoren. Én af koordinaterne må da være forskellig fra nul, og man vælger derfor sine to ligninger ud fra dette.

Eksempel

Linierne givet ved

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -8 \end{pmatrix}$$

er parallelle, idet krydsproduktet af retningsvektorerne er nulvektoren (Prøv!)
Punktet (1,2,3) ligger på den ene linie, og for at se, om det også ligger på den anden, så finder man en eventuel værdi for parameteren t:

$$\begin{Bmatrix} 1 = 3 + 2t \\ 2 = 7 - 4t \\ 3 = 1 - 8t \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} t = -1 \\ t = \frac{5}{4} \\ t = -\frac{1}{4} \end{Bmatrix}$$

Det er lidt svært for t at opfylde alle tre betingelser samtidigt, så punktet (1,2,3) ligger ikke på den anden linie, og de to linier er derfor ikke sammenfaldende.

Eksempel

Linierne givet ved

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

er vindskæve:
Vi starter med at udregne krydsproduktet af retningsvektorerne:

$$\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 4-2\cdot 6\\6\cdot 0-4\cdot 4\\4\cdot 2-0\cdot 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-16\\8\end{pmatrix}\neq\vec{0}$$

Linierne er altså ikke parallelle. Vi bruger metoden ovenfra, efter at vi har omdøbt den ene parameter til *s*:

$$\begin{Bmatrix}1+4t=-1\\2+5t=2+2s\\3+6t=-3+4s\end{Bmatrix}$$

Idet alle tre koordinater i krydsproduktet er forskellige fra 0, så vælger vi at løse de to første ligninger og anvende den tredie som kontrol:

$$\begin{Bmatrix}1+4t=-1\\2+5t=2+2s\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}4t=-2\\-2s+5t=0\end{Bmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix}0&4\\-2&5\end{vmatrix}=8\qquad D_s=\begin{vmatrix}-2&4\\0&5\end{vmatrix}=-10$$

$$D_t=\begin{vmatrix}0&-2\\-2&0\end{vmatrix}=-4$$

$$s=\frac{D_s}{D}=\frac{-10}{8}=-\frac{4}{5}\qquad t=\frac{D_t}{D}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2}$$

Dette indsættes i den tredie ligning:

$$2+6t=-5+4s\ \Rightarrow\ 2+6\cdot(-\tfrac{1}{2})=-5+4\cdot(-\tfrac{4}{5})\ \Leftrightarrow\ -1=-\tfrac{41}{5}$$

Dette er tydeligvis ukorrekt, så de to linier har intet skæringspunkt, og er derfor vindskæve.

Eksempel

Linierne med parameterfremstillingerne

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\6\\-4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\quad\text{og}\quad\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\8\\-10\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-6\\-4\\5\end{pmatrix}$$

skærer hinanden i punktet $(2;4;-5)$:

For det første er linierne ikke parallelle, idet krydsproduktet af retningsvektorerne ikke er nulvektoren:

$$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-6\\-4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 5-(-4)\cdot 1\\1\cdot(-6)-5\cdot 3\\3\cdot(-4)-(-2)\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\-21\\0\end{pmatrix}\neq\vec{0}$$

Vi har derfor ligningssystemet

$$\begin{Bmatrix}5+3t=8-6s\\6+2t=8-4s\\-4+t=-10+5s\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}6s+3t=3\\4s+2t=2\\-5s+t=-6\end{Bmatrix}$$

Vi løser de to første ligninger og bruger den tredie som kontrol:

$$\begin{Bmatrix}6s+3t=3\\4s+2t=2\end{Bmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix}6&3\\4&2\end{vmatrix}=6\cdot 2-4\cdot 3=12-12=0$$

UPS - determinanten blev jo nul!
Tjah - det kunne man jo have sagt sig selv - denne determinant er jo krydsproduktets z-koordinat, og denne er jo nul. Så i stedet for at vælge de to første ligninger vælger vi f.eks. første og tredie ligning - deres determinant er krydsproduktets y-koordinat (pånær fortegn), og denne y-koordinat er jo ikke nul:

$$\begin{Bmatrix}6s+3t=3\\-5s+t=-6\end{Bmatrix}$$

$$D=\begin{vmatrix}6&3\\-5&1\end{vmatrix}=21\qquad D_s=\begin{vmatrix}3&3\\-6&1\end{vmatrix}=21$$

$$D_t=\begin{vmatrix}6&3\\-5&-6\end{vmatrix}=-21$$

$$s=\frac{D_s}{D}=\frac{21}{21}=1\qquad t=\frac{D_t}{D}=\frac{-21}{21}=-1$$

Indsættes dette i den sidste ligning fås

$$4s+2t=2\quad\Rightarrow\quad 4\cdot 1+2\cdot(-1)=2\quad\Leftrightarrow\quad 2=2$$

og dette er jo et sandt udsagn. Linierne skærer altså hinanden.
For at finde skæringspunktet indsættes enten $s=1$ eller $t=-1$ i en af parameterfremstillingerne. Vi vælger at indsætte $s=1$:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\8\\-10\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}-6\\-4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\-5\end{pmatrix}$$

Dette er altså stedvektoren til skæringspunktet, som derfor har koordinaterne $(2,4,-5)$

Endelig gælder der følgende sætning om skæringen mellem en linie og en plan:

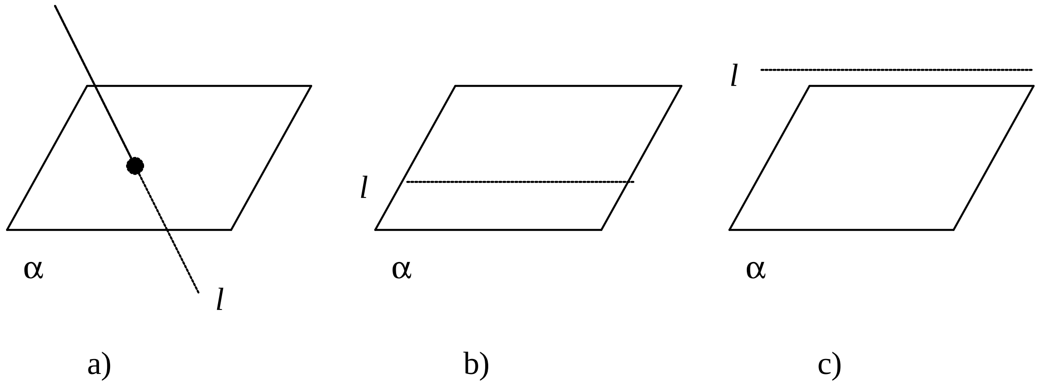
Sætning 23 (LS)

Lad α være en plan og *l* være en linie i rummet. Da gælder enten

a) α og *l* skærer hinanden i et punkt, eller

b) *l* er indeholdt i α, eller

c) α og *l* er parallelle og har ingen punkter tilfælles.



Bevis:

Lad α have ligningen $ax + by + cz + d = 0$ og lad *l* have parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}.$$

Ved indsættelse af parameterudtrykkene for *x*, *y* og *z* i ligningen for α fås følgende udtryk:

$$a(x_0 + tr_1) + b(y_0 + tr_2) + c(z_0 + tr_3) + d = 0,$$

som kan omskrives til

$$t(ar_1 + br_2 + cr_3) = -(ax_0 + by_0 + cz_0 + d).$$

Idet vi kalder α's normalvektor for $\vec{n}$ og *l*'s retningsvektor for $\vec{r}$, kan vi skrive dette som

$$t(\vec{n} \cdot \vec{r}) = -(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)$$

Hvis $\vec{n}\cdot\vec{r}\neq 0$, dvs. hvis linien ikke står vinkelret på planens normalvektor (eller, hvad der er det samme, linien og planen ikke er parallelle), så har denne ligning netop en løsning for *t*, og dette giver netop et skæringspunkt.

Hvis $\vec{n}\cdot\vec{r} = 0$, så er linien og planen parallelle, og antallet af løsninger afhænger af højresiden.

Hvis højresiden er 0, så er alle mulige værdier for *t* løsninger, og linien *l* er indeholdt i planen α.

Hvis højresiden ikke er 0, så findes der ingen løsninger, og linien og planen har ingen fælles punkter.
(Bemærk, at denne højreside er lig -(punktet (x_0, y_0, z_0)'s koordinater indsat i planens ligning)).

Eksempel

Linien α givet ved ligningen $x+y+z+2=0$ og linien *l* givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

skærer hinanden i punktet (-5, 4, -1):
Indsættelse af parameterfremstillingen i planens ligning giver nemlig ligningen

$$(1+3t)+(2-t)+(3+2t)+2=0$$

som reducerer til

$$4t=-8\,.$$

Indsættes løsningen $t=-2$ i *l*'s parameterfremstilling, så fås skæringspunktet $(-5,4,-1)$.

Opgaver

3.1 a) Find en parameterfremstilling for planen med ligningen

$$2x-3y-z+9=0$$

b) Find en ligning for planen med parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Find en ligning for planen gennem punkterne *ABC*, hvor

$$A=(1,3,4)\quad B=(-2,0,6)\quad \text{og}\quad C=(0,4,-2)$$

d) Bestem vinklen mellem planerne i a) og b)

e) Ligger punktet $D=(3,-1,6)$ i nogle af de tre planer fra a), b) eller c).

3.2 a) Bestem en parameterfremstilling for linien gennem punkterne
(8,3,1) og (-7,4,9)

b) Kan man opskrive en ligning for denne linie?

3.3 Planerne α, β, γ og δ er givet ved:

$$\alpha: 3x+7y-4z=9 \qquad \beta: 2x-4z+6=0$$

$$\gamma: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\delta: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Bestem fællesmængden mellem α og β.

b) Bestem fællesmængden mellem β og γ.

c) Vis, at α og δ skærer hinanden, find deres fællesmængde og find vinklen mellem de to planer.

d) Bestem fællesmængden mellem γ og δ.

e) Bestem vinklen mellem γ og δ.

f) Bestem ligningen for den plan, som står vinkelret på både γ og δ, og som går gennem punktet (0,0,0).

3.4 Linierne k, l, m og n er bestemt ved parameterfremstillingerne:

$$k: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad n: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Bestem fællesmængderne og beliggenhedsforholdet mellem

a) k og l

b) k og m

c) k og n

d) m og n.

e) Bestem endvidere vinklen mellem linierne k og n.

3.5 Planerne α, β, γ og δ er som i opgave 3.3, og linierne k, l, m og n er som i opgave 3.4.

Bestem fællesmængden og beliggenhedsforholdet mellem

a) α og k

b) β og l

c) δ og m

d) Bestem vinklen mellem planen γ og linien l.

3.6 Samme planer og linier som i opgave 3.3 og 3.4.

a) Bestem en parameterfremstilling for den linie, som indeholder punktet (8,-1,4) og som står vinkelret på planen γ.

b) Bestem en ligning for den plan, som står vinkelret på linien n og som indeholder punktet (0,0,3).

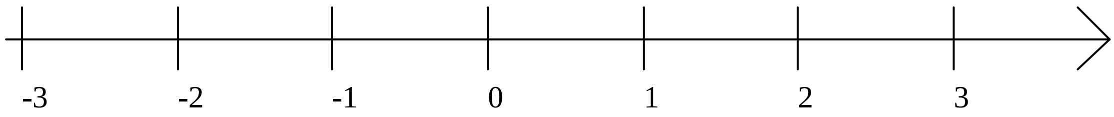
c) Bestem en ligning for den plan, som er parallel med linien l og som indeholder linien m.

4.4 Dimensionsbegrebet

I dette afsnit vil vi kort studere dimensionsbegrebet.

Groft sagt er *dimension* lig med *antal frihedsgrader*. En frihedsgrad kan betragtes som en retning, et punkt kan bevæge sig i.

Mere præcist kan vi sige, at tallinien



er 1-dimensional - et punkt på denne tallinie kan kun bevæge sig i én retning, nemlig frem/tilbage. En anden måde at sige dette på er at konstatere, at et punkt på tallinien kan beskrives ved én *koordinat* - til enhver position svarer der netop ét tal, og omvendt.

Planen er to-dimensional: Ethvert punkt i planen har to bevægelsesmuligheder: frem/tilbage og op/ned. Alternativt kan ethvert punkt position i planen beskrives med to koordinater.

Rummet er tre-
dimensionalt, idet vi skal bruge tre koordinater til at beskrive et punkts position.

Indenfor relativitetsteorien arbejder man med den såkaldte *rum-tid*. Et 'punkt' i denne mængde er en *begivenhed*, som beskrives ved fire koordinater: Tiden, til hvilken begivenheden fandt sted, og de tre rum-koordinater. Rum-tiden er således fire-dimensional.

Rum eller mængder af højere dimension optræder hyppigere end man tror. F.eks. kan man beskrive produktionen hos en ostefabrik, der producerer 8 slags oste, ved 8 tal - et tal for hver slags ost. Vi siger, at osteproduktionen er et punkt i et 8-dimensionalt rum, hvor den første dimension beskriver den producerede mængde af ost nr.1, den anden dimension mængden af ost nr. 2, etc.
Problemet med disse højere-dimensionale rum er desværre, at det er rimeligt svært at forestille sig dem, endsige at tegne dem.

For at vende tilbage til rumgeometrien kan vi betragte de forskellige objekter, som optræder her, og deres dimensionalitet. Vi kan lave følgende lille tabel:

Objekt	Dimension
punkt	0
linie	1
plan	2
rummet	3

Vi kan se, at en plan er 2-dimensional, idet den kan beskrives ved en parameterfremstilling med to parametre. En anden måde at finde denne dimension på er at sige, at et punkt i en plan har to frihedsgrader: Som punkt i rummet har det tre frihedsgrader, men ligningen for planen indskrænker dets bevægelsesfrihed med en frihedsgrad. Der er så to frihedsgrader tilbage.

Tilsvarende er en linie 1-dimensional, idet en linie kan beskrives ved en parameterfremstilling med én parameter.
Her ser vi også grunden til, at det er umuligt at beskrive en linie i rummet med en ligning. Var dette nemlig muligt, så ville linien jo blive 2-dimensional.
Men vi kan beskrive en linie med 2 ligninger - disse to bindinger på koordinaterne efterlader lige præcis en frihedsgrad. Men ved at beskrive en linie med to ligninger, så beskriver vi faktisk en linie som skæringen mellem to planer.

Endelig ser vi, at et punkt er 0-dimensionalt. F.eks. kan vi beskrive punktet (1,2,3) på to måder: Enten som den lidt kedelige parameterfremstilling

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

som indeholder 0 parametre, eller ved de tre ligninger

$$x = 1 \ , \ y = 2 \ , \ z = 3 .$$

Idet hver ligning æder en frihedsgrad, ser vi, at punktet er 0-dimensionalt.

Ovenstående skal dog tages med et gran salt; man kan dog godt komme ud for, at en punktmængde i rummet, som beskrives med én ligning, er 0-dimensional og ikke 1-dimensional. F.eks. fremstiller ligningen

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

den 0-dimensionale punktmængde $\{(0,0,0)\}$.

4.5 Afstandsbestemmelse i rummet

Vi vil i dette kapitel give formler for, hvorledes man kan bestemme afstanden mellem de forskellige objekter i rummet, nemlig punkter, linier og planer.
Vi starter med en af de nemme formler:

Sætning 24 (FS)

Afstanden mellem punkterne $P=(x_1,y_1,z_1)$ og $Q=(x_2,y_2,z_2)$ er givet ved

$$|PQ|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Bevis:

Denne sætning er en direkte konsekvens af sætning 3, idet $\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\ y_2-y_1\\ z_2-z_1\end{pmatrix}$

og dermed

$$|PQ|=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Eksempel

Afstanden mellem punkterne $A=(7,3,1)$ og $B=(-1,-2,3)$
findes ganske let:

$$|AB|=\sqrt{(-1-7)^2+(-2-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{8^2+5^2+2^2}=\sqrt{93}$$

Følgende sætning og bevis skal sammenlignes med plangeometriens sætning 37.

Sætning 25 (FS)

Lad $P=(x_1,y_1,z_1)$ være et punkt og $\alpha: ax+by+cz+d=0$ være en plan i rummet. Da er afstanden fra P til α givet ved

$$\mathrm{dist}(P,\alpha)=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

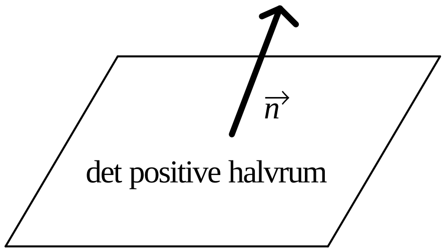
Endvidere gælder, at

a) $ax_1+by_1+cz_1+d>0 \Leftrightarrow P$ ligger i det positive halvrum

b) $ax_1+by_1+cz_1+d<0 \Leftrightarrow P$ ligger i det negative halvrum

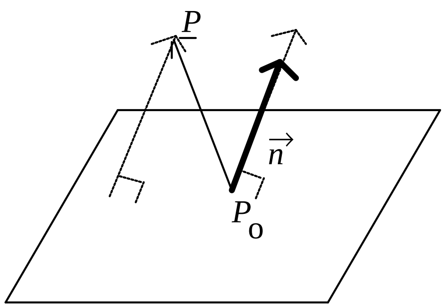
c) $ax_1+by_1+cz_1+d>0 \Leftrightarrow P$ ligger på α.

Bemærk, at det positive halvrum er defineret som det halvrum, hvori normalvektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ peger ind - se tegningen:



Bevis:

Lad $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ være et punkt på α. Vi har da, at $\text{dist}(P,l)$ netop er lig længden af projektionen af $\overrightarrow{P_0P}$ på normalvektoren $\vec{n}$. Endvidere ligger P i det positive halvrum, hvis denne projektion er ensrettet med $\vec{n}$, og i det negative halvrum, hvis projektionen er modsat rettet $\vec{n}$. Se figuren nedenfor, hvor projektionsvektoren $\overrightarrow{P_0P}_{\vec{n}}$ er tegnet som den stiplede pil.



Vi finder projektionen:

$$\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0) =$$

$$ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_0 + by_0 + cz_0) = ax_1 + by_1 + cz_1 + d$$

idet $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$

Projektionen er nu

$$\overrightarrow{P_0P}_{\vec{n}} = \frac{\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$$

og det ses, at projektionen er ensrettet med $\vec{n}$, hvis og kun hvis størrelsen

$$\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n} = ax_1 + by_1 + cz_1 + d$$

er positiv, og at projektionen er modsat rettet $\vec{n}$, hvis den samme størrelse er negativ. Endelig fås for længden af projektionen

$$\operatorname{dist}(P,\alpha) = \left|\overrightarrow{P_0P}_{\vec{n}}\right| = \frac{\left|\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|^2}|\vec{n}| = \frac{\left|\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Eksempel

Lad planen α være givet ved ligningen $2x - y + z - 3 = 0$, og punkterne P, Q og R være $P = (1,2,3)$, $Q = (0,0,1)$ og $R = (2,0,0)$.

Vi har da, at

$$\operatorname{dist}(P,\alpha) = \frac{|2\cdot 1 - 1\cdot 2 + 1\cdot 3 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{0}{\sqrt{6}} = 0,$$

så P ligger i planen α,

$$\operatorname{dist}(Q,\alpha) = \frac{|2\cdot 0 - 1\cdot 0 + 1\cdot 1 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}},$$

og det ses, at Q ligger i planens negative halvrum, og

$$\operatorname{dist}(R,\alpha) = \frac{|2\cdot 2 - 1\cdot 0 + 1\cdot 0 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

så R ligger i planens positive halvrum.

Specielt kan vi konkludere, at Q og R ligger på hver sin side af planen α.

Sætning 25 kan også bruges til at finde afstanden mellem en linie og en plan, og afstanden mellem to planer - nemlig når planen og linien, eller de to planer, er parallelle.

Eksempel

Lad linien l og planen α være givet ved

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \qquad \alpha: x + y + 5z = 0 \,.$$

Vi starter med at bemærke, at l og α er parallelle - vi har nemlig, at

$$\vec{r}_l \cdot \vec{n}_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 + 4 - 5 = 0$$

så liniens retningsvektor og planens normalvektor er orthogonale. Dette er heldigt, for hvis l og α ikke var parallelle, så ville de skære hinanden, og deres indbyrdes afstand ville være 0.

Pga. denne parallelitet kan vi nøjes med at finde et enkelt punkt P på linien l og beregne $\text{dist}(P,\alpha) = \text{dist}(l,\alpha)$. Vi vælger punktet $P = (1,2,3)$, som opnås ved at sætte parameteren t lig 0, og får

$$\text{dist}(l,\alpha) = \text{dist}(P,\alpha) = \frac{|1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 5\cdot 3 + 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 5^2}} = \frac{18}{\sqrt{27}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Eksempel

Planerne α og β, hvis ligninger er

$$\alpha: x + y + z = 0 \qquad \text{og} \qquad \beta: x + y + z + 3 = 0$$

er parallelle, idet de har den samme normalvektor. Dette er heldigt; thi var de ikke parallelle, så skar de hinanden, og deres indbyrdes afstand var 0.

Som ovenfor vælger vi et tilfældigt punkt P beliggende i α, og for nemheds skyld vælger vi $P = (0,0,0)$. Vi får da

$$\text{dist}(\alpha,\beta) = \text{dist}(P,\beta) = \frac{|0\cdot 1 + 0\cdot 1 + 0\cdot 1 + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \,.$$

Vi fortsætter vor Odyssé gennem afstandsformlernes rige:

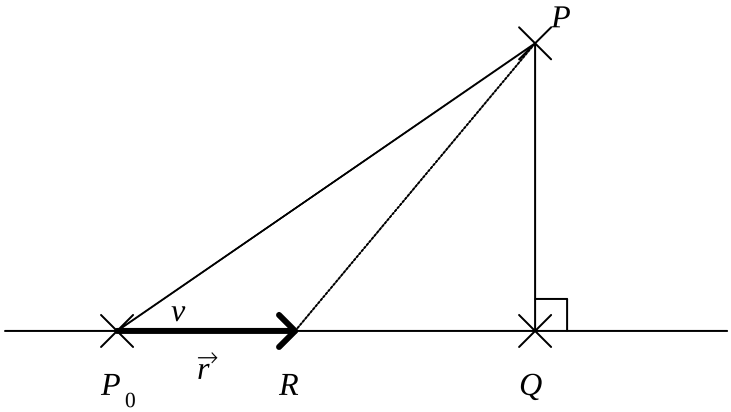
Sætning 26 (FS)

Afstanden mellem punktet P og linien l gennem punktet P_0 og retningsvektoren $\vec{r}$ er givet ved

$$\text{dist}(P,l) = \frac{\left|\vec{r} \times \overrightarrow{P_0P}\right|}{|\vec{r}|}$$

Bevis:

Hvis punktet P ligger på linien l, så er afstanden 0. Det passer meget godt med, at i dette tilfælde er retningsvektoren $\vec{r}$ parallel med $\overrightarrow{P_0P}$. Krydsproduktet mellem disse vektorer er da nulvektoren, og højresiden af afstandsformlen forsvinder.
Hvis P ikke ligger på linien l, så udspænder P og l en plan. Betragter vi denne plan, så ser situationen således ud:



Q er projektionen af P på linien l, og vores afstand er $\text{dist}(P,l) = |PQ|$
Retningsvektoren $\vec{r}$ placeres med halen i punktet P_0, og hovedet kaldes for R.
Vinklen $\angle PP_0R$ kaldes v.
Vi beregner arealet T af trekanten PP_0R på to forskellige måder. For det første ses, at $|PQ|$ er en højde for denne trekant, så den sædvanlige formel giver

$$T = \frac{1}{2} \cdot \text{højde} \cdot \text{grundlinie} = \frac{1}{2}|P_0R| \cdot |PQ| = \frac{1}{2}|\vec{r}| \cdot \text{dist}(P,l)$$

For det andet vides fra sætning 16, at

$$T = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \overrightarrow{P_0P}\right|$$

hvilket tilsammen giver

$$\frac{1}{2}|\vec{r}| \cdot \text{dist}(P,l) = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \times \overrightarrow{P_0P}\right|,$$

eller ved omrokering af leddene

$$\text{dist}(P,l) = \frac{\left|\vec{r} \times \overrightarrow{P_0P}\right|}{|\vec{r}|}$$

Regnet opgave

Opgave: Beregn afstanden mellem punktet $P = (1,3,-2)$ og linien l med parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Løsning: Vi starter lige på og hårdt:

$$P_0 = (4;1;0) \qquad \overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} 1-4 \\ 3-1 \\ -2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} \times \overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ 21 \end{pmatrix} \qquad |\vec{r}| = \sqrt{3^2 + 5^2 + (-1)^2} = \sqrt{35}$$

$$\left|\vec{r} \times \overrightarrow{P_0P}\right| = \sqrt{(-8)^2 + 9^2 + 21^2} = \sqrt{441}$$

$$\text{dist}(P,l) = \frac{\left|\vec{r} \times \overrightarrow{P_0P}\right|}{|\vec{r}|} = \frac{\sqrt{441}}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{63}}{\sqrt{5}}$$

Dette var egentligt slet ikke så slemt...

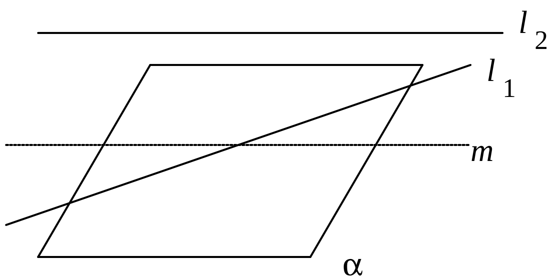
Sætning 27 (FS)

Afstanden mellem de ikke-parallelle linier l_1 og l_2, som har retningsvektorerne $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$, og som går gennem punkterne P_1 og P_2, er givet ved

$$\text{dist}(l_1, l_2) = \frac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}\right|}{|\vec{n}|}, \text{ hvor } \vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 .$$

Bevis:

Bemærk, at hvis linierne er parallelle, så er vektoren $\vec{n} = \vec{0}$, og formlen er ikke så meget værd. Vi behandler dette tilfælde senere.



Vi betragter nu planen α, som indeholder l_1, og som er parallel med l_2. Denne plan kan f.eks. konstrueres ved at parallelforskyde linien l_2, indtil den skærer l_1. Den parallelforskudte linie kan passende kaldes m.
En normalvektor for planen er netop $\vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2$, og endvidere gælder pga. paralleliteten, at

$$\text{dist}(l_1, l_2) = \text{dist}(\alpha, l_2) = \text{dist}(\alpha, P_2)\ .$$

Som i sætning 25 har vi nu, at

$$\text{dist}(\alpha, P_2) = \left| \overrightarrow{P_1 P_2}_{\vec{n}} \right| = \frac{\left| \vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1 P_2} \right|}{|\vec{n}|}$$

hvilket beviser sætningen.

Eksempel

Afstanden mellem linierne l og m givet ved

$$l\!: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \qquad m\!: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

findes:

$$\vec{n} = \vec{r}_l \times \vec{r}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 7^2} = \sqrt{62}$$

$$\left| \overrightarrow{P_1 P_2} \right| = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 3-5 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = (-3)(-3) + 2(-2) + 7 \cdot 0 = 5$$

$$\text{dist}(l, m) = \frac{\left| \vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1 P_2} \right|}{|\vec{n}|} = \frac{5}{\sqrt{62}}$$

Hvis de to linier er parallelle, så dur sætning 27 ikke. Men vi kan anvende sætning 26 og finde afstanden mellem dem som afstanden mellem et vilkårligt punkt på den ene linie og den anden linie.

Eksempel

Afstanden mellem de parallelle linier l og m findes:

$$l:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\qquad\qquad m:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Vi finder et tilfældigt punkt P på m ved at sætte $t=0$: $P=(2,1,4)$.
Tilsvarende findes P_0 på l som $P_0=(5,-2,-1)$. Vi får så:

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\qquad\qquad |\vec{r}|=\sqrt{2^2+4^2+6^2}=\sqrt{56}$$

$$\overrightarrow{P_0P}=\begin{pmatrix}2-5\\1-(-2)\\4-(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\3\\5\end{pmatrix}\qquad\qquad \vec{r}\times\overrightarrow{P_0P}=\begin{pmatrix}2\\-28\\18\end{pmatrix}$$

$$\left|\vec{r}\times\overrightarrow{P_0P}\right|=\sqrt{2^2+(-28)^2+18^2}=\sqrt{1112}$$

og

$$\text{dist}(l,m)=\text{dist}(l,P)=\frac{\sqrt{1112}}{\sqrt{56}}=\sqrt{\frac{139}{7}}$$

Opgaver

I de følgende opgaver betegner α. β, γ og δ planerne defineret i opgave 3.3, *k*, *l*, *m* og *l* linierne defineret i opgave 3.4 og punkterne *A*, *B*, *C* og *D* de fire punkter nedenfor:

$A=(1,3,-2)$ $\quad B=(-1,-2,-3)$ $\quad C=(5,3,-2)$ $\quad$ og $\quad D=(-2,4,1)$

5.1 Bestem afstandene

a) $|AB|$ b) $|AC|$ c) $|CD|$ d) $|BD|$

5.2 Bestem afstanden mellem planen α og hver af punkterne *A*, *B*, *C* og *D*.
Bestem endvidere, hvilke af de 4 punkter, der ligger i α's positive halvrum.

5.3 a) Bestem afstanden mellem planerne β og γ.
b) Bestem afstanden mellem planerne α og β.

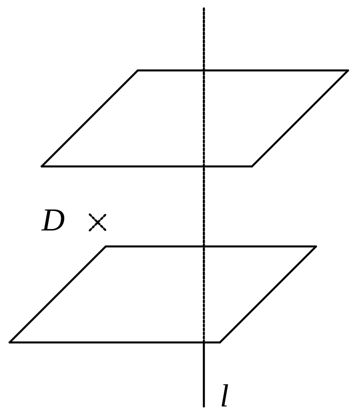
5.4 Bestem nedenstående afstande:

a) $\text{dist}(A,l)$ b) $\text{dist}(A,m)$ c) $\text{dist}(A,n)$
d) $\text{dist}(B,k)$ e) $\text{dist}(D,l)$ f) $\text{dist}(B,n)$

5.5 Bestem nedenstående afstande:

a) $\text{dist}(k,l)$ b) $\text{dist}(k,n)$ c) $\text{dist}(m,n)$
d) $\text{dist}(k,m)$

5.6 Bestem en ligning for hver af de to planer, som står vinkelret på linien *l*, og som ligger i afstanden 4 fra punktet *D*.



5.7 Bestem en ligning for den plan, som ligger midt imellem de to parallelle planer β og γ.

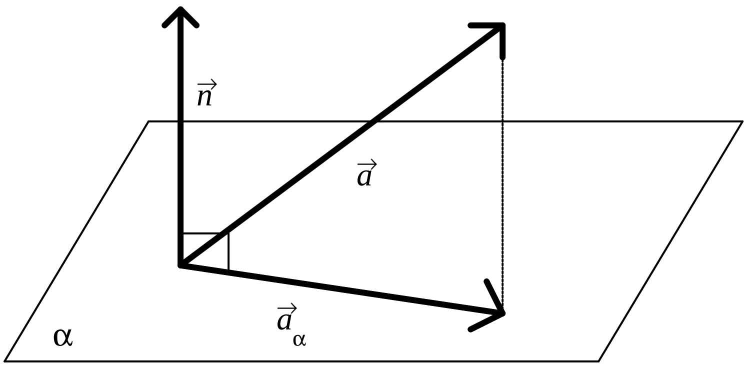
4.6 Projektioner på plan

I dette afsnit vil vi studere hvorledes man projicerer vektorer og punkter ned på en plan.

Definition 28 (FS)

Projektionen af vektoren $\vec{a}$ på planen α med normalvektoren $\vec{n}$ er vektoren

$$\vec{a}_\alpha = \vec{a} - \vec{a}_{\vec{n}}$$



Sætning 29 (FS)

Projektionen $\vec{a}_\alpha$ af vektoren $\vec{a}$ på planen α med normalvektoren $\vec{n}$ er givet ved

$$\vec{a}_\alpha = \vec{a} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = \frac{\vec{n}\times(\vec{a}\times\vec{n})}{|\vec{n}|^2}$$

Bevis:

Ifølge sætning 9 har vi umiddelbart, at

$$\vec{a}_\alpha = \vec{a} - \vec{a}_{\vec{n}} = \vec{a} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$$

Det andet lighedstegn vises ved hjælp af sætning 15, a):

$$\frac{\vec{n}\times(\vec{a}\times\vec{n})}{|\vec{n}|^2} = \frac{(\vec{n}\cdot\vec{n})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{n})\vec{n}}{|\vec{n}|^2} = \frac{|\vec{n}|^2\vec{a}}{|\vec{n}|^2} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = \vec{a} - \vec{a}_{\vec{n}} = \vec{a}_\alpha$$

Eksempel

Projektionen af vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ på planen $\alpha : x + y + z = 0$ er givet ved

$$\vec{a}_\alpha = \vec{a} - \vec{a}_{\vec{n}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 6 \cdot 1}{1^2 + 1^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \frac{11}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

idet planen har normalvektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bemærk, at det **ikke** kan betale sig at bruge formlen med det dobbelte krydsprodukt - der bliver for mange regnerier!

Definition 30 (LS)

Projektionen P_α af punktet P på planen α er defineret som skæringspunktet mellem α og den linie, som står vinkelret på α og som går gennem P.

Denne definition fortæller, hvorledes man i praksis finder projektionen af et punkt på en plan:

Eksempel

For at finde projektionen af $P = (3,1,0)$ på planen $\alpha : x + y - z + 2 = 0$ bemærker vi først, at en normalvektor for α, og dermed en retningsvektor for linien gennem P vinkelret på α er

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Denne linie har da parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

og sættes dette ind i planens ligning, så fås

$$(3 + t) + (1 + t) - (-1) + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -\tfrac{7}{2}$$

Denne parameterværdi giver det punkt, hvor linien skærer planen, altså P_α. Indsættes denne i parameterfremstillingen fås

$$P_\alpha = (3-\tfrac{7}{2}, 1-\tfrac{7}{2}, -(-\tfrac{7}{2})) = (-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{5}{2}, \tfrac{7}{2}).$$

Regnet opgave

Opgave: Find koordinaterne til spejlbilledet af punktet $P = (0,0,0)$ spejlet i planen $\alpha: 2x + y - z + 3 = 0$.

Løsning: Linien gennem P og som står vinkelret på α har parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Indsættes dette i α's ligning, så fås

$$2(2t) + t - (-t) + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t = -\tfrac{1}{2}$$

Linien går altså gennem P for $t = 0$, gennem α for $t = -\frac{1}{2}$ og må da passere gennem P's spejlbillede, når $t = 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = -1$, idet dette punkt har samme afstand til α som P. Sættes $t = -1$ i parameterfremstillingen, så fås spejlbilledets koordinater $(-2,-1,1)$.

Opgaver

6.1 Hvorfor må man *ikke* anvende sætning 29 til at finde projektionen af et punkt på en plan?

6.2 Lad punktet $P = (2,-4,6)$ og planen $\alpha: x - 3y + 2z - 2 = 0$ være givet.

a) Bestem projektionen af punktet P på planen α.

b) Bestem spejlbilledet af punktet P under spejlingen i planen α.

Lad endvidere linien l være givet ved parameterfremstillingen:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c) Bestem en parameterfremstilling for den linie, der opnås ved at projicere l ned på planen α.
(Vink: Det nemmeste er at finde den linie, som går gennem projektionerne af på punkter fra l).

4.7 Kugler

Kuglen er et ganske velkendt geometrisk objekt. Vi giver dog alligevel den formelle definition:

Definition 31 (FS)

Lad $r > 0$ være et positivt reelt tal, og lad C være et punkt i rummet. *Kuglen* med centrum C og radius r er defineret som punktmængden bestående af de punkter P, som opfylder

$$|CP| = r$$

Sætning 32 (FS)

Kuglen med centrum $C = (x_0, y_0, z_0)$ og radius r er givet ved ligningen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 .$$

Bevis:

Dette følger af afstandsformlen i sætning 24 - vi har nemlig, at punktet $P = (x, y, z)$ ligger på kuglen, hvis og kun hvis

$$|CP| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r$$

Idet kuglen kan beskrive med en ligning, så er dimensionen af en kugle lig 3-1=2. Dette stemmer overens med, at der skal to 'koordinater' eller parametre til, for at bestemme en position på en kugle. Et sådant 'koordinatsystem' er velkendt: Jordoverfladens længde- og breddegrader.

Regnede opgaver

Opgave: Find ligningen for kuglen med centrum $(3;-1;9)$ og radius 3.

Løsning: Vi har umiddelbart, at den søgte ligning er

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 9)^2 = 3^2 .$$

Opgave: En kugle har ligningen

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 1 = 0$$

Find centrum og radius.

Løsning: Vi omskriver ligningen til

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 + 6z = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=1+2+4+9=16$$

hvoraf det ses, at kuglens centrum er $(1\,,-2\,,-3)$, og at radius er 4.

Opgave: En kugle er givet ved ligningen

$$x^2+y^2+z^2-4z=0$$

Bestem en ligning for tangentplanen til kuglen med røringspunktet $P=(0,0,0)$.

Løsning: Vi ser hurtigt, at denne kugle har centrum $C=(0,0,2)$ og radius 2.

Tangentplanen, som rører kuglen i C, står vinkelret på 'radiusvektoren' $\overrightarrow{PC}$, som derfor er en normalvektor:

$$\overrightarrow{PC}=\begin{pmatrix}0-0\\0-0\\2-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$$

Idet tangentplanen går gennem $P=(0,0,0)$, så bliver ligningen

$$0(x-0)+0(y-0)+2(z-0)=0$$

som kan omskrives til

$$z=0$$

Det ses, at denne tangentplan faktisk er xy-planen.

Opgaver

7.1 Undersøg, om nedenstående ligninger faktisk beskriver en kugle. Hvis de gør, så angiv centrum og radius.

a) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$

b) $x^2+y^2+z^2-4x+4z+8=0$

c) $x^2+y^2+z^2-3x-6y+5x+38=0$

d) $x^2+y^2+z^2-x+y-3z+\frac{1}{2}=0$

7.2 En kugle har centrum i punktet $C=(1\,,-3\,,-2)$ og indeholder punktet $P=(3\,,-1\,,-1)$

a) Bestem en ligning for kuglen.

b) Bestem en ligning for tangentplanen til kuglen med røringspunkt i P.

4.8 Opgaver

8.1 Ligger punkter $A=(8,2,-1)$, $B=(0,0,7)$, $C=(2,-1,2)$ og $D=(2,1,4)$ i samme plan?

8.2 I rummet er planen α og linien *l* bestemt ved parameterfremstillingerne

$$\alpha: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad l: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

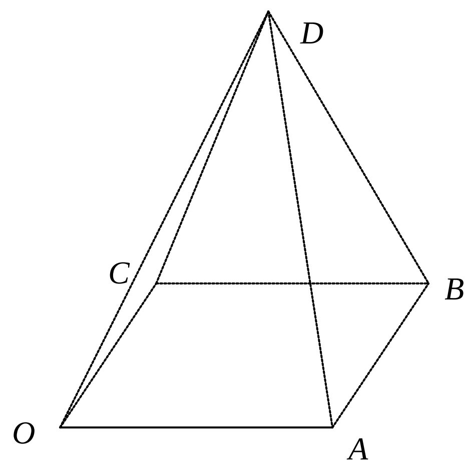
a) Bestem en ligning for planen α.
b) Bestem fællesmængden mellem α og *l*.
c) Bestem en parameterfremstilling for projektionen af *l* på α.

8.3 En plan α er bestemt ved

$$\alpha: x-y-z+3=0$$

a) Bestem koordinatsættet til projektionen af punktet $A=(2\,,2\,,-4)$ på planen α.
b) Bestem spejlbilledet af *A* under spejling i planen α.
c) Bestem afstanden mellem *A* og α.

8.4 Lad en pyramide *OABCD* i rummet være givet - se figuren:



Det oplyses, at $O=(0,0,0)$ $A=(8,0,0)$ $B=(8,8,0)$ $C=(0,8,0)$ samt at højden af pyramiden er 12.

a) Bestem koordinaterne til punktet *D*.
b) Bestem vinklen mellem to af pyramidens sideflader.
c) Bestem vinklen mellem en af pyramidens sideflader og dens grundflade.

8.5 En kugle i rummet har centrum i punktet $C=(2\,,-3\,,1)$. Endvidere oplyses, det, at kuglen har planen α med ligningen

$$\alpha : x + y - 2z + 8 = 0$$

som tangentplan.

a) Bestem en ligning for kuglen.

b) Bestem koordinatsættet til projektionen af C på α.

c) Bestem koordinatsættet til røringspunktet for tangentplanen α.

8.6 En kugle i rummet har centrum i punktet $O = (0,0,0)$ og har radius 3.

a) Bestem en ligning for denne kugle.

b) Bestem en ligning for tangentplanen α med røringspunkt i $A = (2,2,1)$.

c) Bestem en ligning for den tangentplan, som er parallel med α.

d) Det oplyses, at der findes fire tangentplaner, som står vinkelret på α. Bestem de fire tilsvarende røringspunkter.

8.7 Man kan ikke umiddelbart inden for rumgeometrien definere determinanten for to vektorer - men man kan definere determinanten for **tre** vektorer. Det er dette determinantbegreb, vi vil undersøge i denne og de næste par opgaver.

Hvis $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ er tre vektorer i rummet, så defineres deres fælles determinant som

$$\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\,.$$

Indføres koordinater for de tre vektorer, så skrives determinanten ofte i skemaet

$$\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

a) Bestem determinanten $\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$, når

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Bevis formlen

$$\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = -\det(\vec{b},\vec{a},\vec{c})$$

Rækkefølgen af de tre indgående vektorer er altså ikke ligegyldig.

Et koordinatudtryk for determinanten er ret kompliceret, men det skal ikke forhindre os i at prøve:

c) Vis, ved direkte udregning, at

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

(Der er faktisk mening i galskaben - alle led af formen $a_i b_j c_k$ forekommer, forudsat at *i*, *j* og *k* er forskellige indices. Fortegnet er positivt, hvis rækkefælgen af de tre indices er 123, 231 eller 312, og negativt hvis ikke. Ved de positive rækkefølger kommer tallene i den rigtige rækkefølge, evt. blot 'knækket' over).

En vigtig huskeregel er

d) Vis, at

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Igen bemærker man, at f.eks. ved leddet $a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ består den lille determinant af den store determinant, hvor man dog har slettet den søjle og den række, hvori tallet a_1 står.

e) Vis nedenstående formel:

$$\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \det(\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = \det(\vec{c},\vec{a},\vec{b}) =$$
$$-\det(\vec{a},\vec{c},b) = -\det(\vec{c},\vec{b},\vec{a}) = -\det(\vec{b},\vec{a},\vec{c})$$

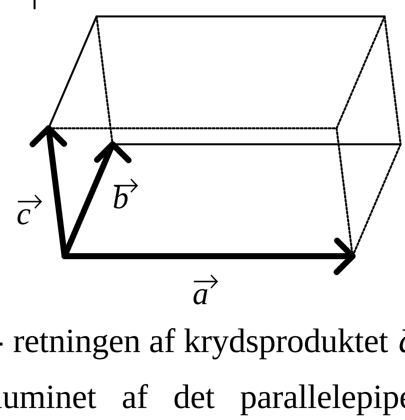
f) Vis, at

$$\det(\vec{a},\vec{a},\vec{b}) = 0$$
$$\det(\vec{a},\vec{b},s\vec{c}+t\vec{d}) = s\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) + t\det(\vec{a},\vec{b},\vec{d}), \text{ for } s,t \in \mathbf{R}.$$

g) Vis, at de tre vektorer $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ ligger i samme plan, hvis og kun hvis $\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$.

(Vink: $\vec{c} = s\vec{a} + t\vec{b}$).

8.8 a) Den geometriske betydning af 3x3-determinanten er:
Voluminet af det parallelepipedum, som udspændes af $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$, er lig $\left|\det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|$ - se figuren



Bevis dette - retningen af krydsproduktet $\vec{a} \times \vec{b}$ spiller en vis rolle.

b) Bestem voluminet af det parallelepipedum, der udspændes af vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

c) Bestem voluminet af parallelipipediet udspændt af koordinatvektorerne $\vec{i}$, $\vec{j}$ og $\vec{k}$. Hvilken speciel type parallelepipedum er der tale om?

8.9 3x3-determinanter benyttes bl.a. til at løse tre ligninger med tre ubekendte, f.eks. ligningssystemet

$$\left\{\begin{matrix} x + 4y + z = 2 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y + 4z = 1 \end{matrix}\right\}$$

a) Gør rede for, at løsningsmængden til et sådant system enten består af punkterne på en plan, punkterne på en linie, et enkelt punkt eller den tomme mængde.
Opfat i alle fire tilfælde de tre ligninger som ligningerne for tre planer, og skitsér beliggenhedsforholdet mellem de tre planer i de fire tilfælde.

b) Vis, at det typiske ligningssystem kan opfattes som vektorligningen

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{d}$$

c) Vis, at løsningsmængden er et punkt, hvis og kun hvis

$$\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0.$$

d) Bevis *Cramer's formel*:

Hvis $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \neq 0$, så er løsningen til ligningssystemet givet ved

$$x = \frac{\det(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})}{\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})} \qquad y = \frac{\det(\vec{a}, \vec{d}, \vec{c})}{\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})} \qquad z = \frac{\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})}{\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$$

e) Løs ligningssystemet i starten af opgaven ved hjælp af Cramer's metode.

Det bør bemærkes, at denne metode langtfra er den mest effektive, når det drejer sig om løsning af sådanne ligningssystemer.

Facitter

1.1 a) $\begin{pmatrix}5\\4\\14\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}5\\-10\\-4\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-10\\-7\\-22\end{pmatrix}$ d) $\sqrt{14}$ e) $\sqrt{21}$ f) 9

g) $\sqrt{53}$ h) $58{,}34°$ i) $\begin{pmatrix}-6/7\\3/7\\12/7\end{pmatrix}$ j) $124{,}57°$ k) $\begin{pmatrix}-27\\-81\\-54\end{pmatrix}$ l) $\begin{pmatrix}-2{,}1\\0{,}9\\-2{,}4\end{pmatrix}$

1.2 a) 6 b) $0°$ c) $180°$

1.3 a) $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$ b) $\pm\sqrt{11}$

1.4 b) $|AB|=\sqrt{20}$ $|AC|=\sqrt{22}$ $|BC|=\sqrt{14}$

$\angle A=48{,}13°$ $\angle B=68{,}99°$ $\angle C=62{,}88°$

c) $(4\,,2\,,-2)$ d) $(\frac{5}{2}\,,\frac{3}{2}\,,-1)$ og $(2\,,\frac{4}{3}\,,0)$

1.5 a) $B=(6\,,1\,,3)$ $C=(3\,,3\,,3)$

b) $|AB|=\sqrt{41}$ $|AC|=\sqrt{18}$ $|BC|=\sqrt{13}$

$\angle A=32{,}15°$ $\angle B=38{,}77°$ $\angle C=109{,}08°$

c) $(-1\,,6\,,-1)$

2.1 a) $\begin{pmatrix}4\\1\\-6\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-4\\-1\\6\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}11\\16\\10\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}11\\16\\10\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}4\\1\\-6\end{pmatrix}$

g) $\sqrt{289}$ h) $\frac{1}{2}\sqrt{441}$ i) $137{,}70°$ j) nej

3.1 a) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\9\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-9/2\\0\\-9\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\3\\-9\end{pmatrix}$ b) $12x+18y-11z-107=0$

c) $16x-18y-3z+50=0$ d) $102{,}08°$ e) nej

3.2 a) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\3\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}15\\-1\\-8\end{pmatrix}$ b) nej

3.3 a) linien $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3/7\\-3/2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-1/7\\-1/2\end{pmatrix}$ b) tom - planerne er parallelle

c) linien $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\-11\\-30{,}5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}120\\60\\195\end{pmatrix}$ $55{,}12°$

d) linien $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e) 78,46° f) $2x + y + z = 0$

3.4 a) vindskæve b) parallelle c) skærer i punktet (8,8,6)
e) vindskæve f) 143,26°

3.5 a) skærer i $(-\frac{125}{2}, \frac{63}{2}, 6)$ b) skærer i $(-\frac{8}{9}, -\frac{7}{9}, -\frac{2}{9})$
c) skærer i (0,18,2) d) 25,10°

3.6 a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $-4x + 5y - 2x + 6 = 0$ c) $x + 3y - z - 14 = 0$

5.1 a) $\sqrt{30}$ b) 4 c) $\sqrt{59}$ d) $\sqrt{53}$

5.2 $\text{dist}(A,\alpha) = \dfrac{23}{\sqrt{74}}$ $\text{dist}(B,\alpha) = \dfrac{14}{\sqrt{74}}$ $\text{dist}(C,\alpha) = \dfrac{35}{\sqrt{74}}$ $\text{dist}(D,\alpha) = \dfrac{9}{\sqrt{74}}$
Punkterne *A*, *C* og *D* ligger i det positive halvrum.

5.3 a) $6/\sqrt{56}$ b) 0

5.4 a) $\sqrt{51}$ b) $\sqrt{23/2}$ c) $\sqrt{4049/45}$ d) $\sqrt{322/5}$
e) $\sqrt{22}$ f) $\sqrt{11774/45}$

5.5 a) $29/\sqrt{11}$ b) 0 c) $178/\sqrt{644}$ d) $\sqrt{539/10}$

5.6 $4x - y + z + c = 0$ hvor $c = 11 \pm 4\sqrt{18}$

5.7 $2x - 4z + 3 = 0$

6.2 a) (1,-1,4) b) (0,2,2) c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24/13 \\ -7/13 \\ -17/13 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 21/13 \\ 54/13 \\ 81/13 \end{pmatrix}$

7.1 a) $C = (1,-2,3)$ $r = 5$ b) punktet (2,0,-2)
c) ingen kugle d) $C = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ $r = \frac{3}{2}$

7.2 a) $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+2)^2 = 9$ b) $2x + 2y + z - 3 = 0$

Sammenligning mellem plan- og rumgeometri

Her følger en kort liste over lighederne og forskellene mellem plan- og rumgeometrien:

Plangeometri	**Rumgeometri**
vektoraddition	vektoraddition
vektorsubtraktion	vektorsubtraktion
skalarmultiplikation	skalarmultiplikation
skalarprodukt	skalarprodukt
tværvektor	*vektorprodukt*
determinant	*vektorprodukt*
ligning for en linie	ligning for en plan
parameterfremstilling for en linie	parameterfremstilling for en linie
	parameterfremstilling for en plan
cirkel	kugle

De begreber, som er meget forskellige fra plan- til rumgeometrien, er *kursiverede*.

Kapiteloversigt

Regneregler for vektorer

Hvis $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, så

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} \qquad s\vec{a} = \begin{pmatrix} sa_1 \\ sa_2 \\ sa_3 \end{pmatrix}$$

Skalarproduktet

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos v$,hvor v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$. $\qquad \vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \qquad \vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

Vektorproduktet

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin v$, hvor v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$

Lad $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Så er $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$

Parallelogrammet udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ har arealet $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

Trekanten udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ har arealet $\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$.

Planer og linier

Linien med retningsvektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ gennem punktet (x_0, y_0, z_0) har parameterfremstillingen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$

Planen med normalvektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ og retningsvektorerne $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ og $\vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$, og som indeholder punktet (x_0, y_0, z_0), har ligningen

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

og parameterfremstillingen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$

Lad $P = (x_1, y_1, z_1)$ være et punkt og $\alpha: ax + by + cz + d = 0$ være en plan i rummet. Da er afstanden fra P til α givet ved

$$\operatorname{dist}(P,\alpha) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Afstanden mellem punktet P og linien l gennem punktet P_0 og retningsvektoren $\vec{r}$ er givet ved

$$\operatorname{dist}(P,l) = \frac{\left|\vec{r} \times \overrightarrow{P_0P}\right|}{|\vec{r}|}$$

Afstanden mellem de ikke-parallelle linier l_1 og l_2, som har retningsvektorerne $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$, og som går gennem punkterne P_1 og P_2, er givet ved

$$\operatorname{dist}(l_1, l_2) = \frac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}\right|}{|\vec{n}|}, \text{ hvor } \vec{n} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 .$$

Projektionen af vektoren $\vec{a}$ på planen α med normalvektoren $\vec{n}$ er vektoren

$$\vec{a}_\alpha = \vec{a} - \vec{a}_{\vec{n}} = \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n} = \frac{\vec{n} \times (\vec{a} \times \vec{n})}{|\vec{n}|^2}$$

Kugler

Kuglen med centrum $C = (x_0, y_0, z_0)$ og radius r er givet ved ligningen

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 .$$