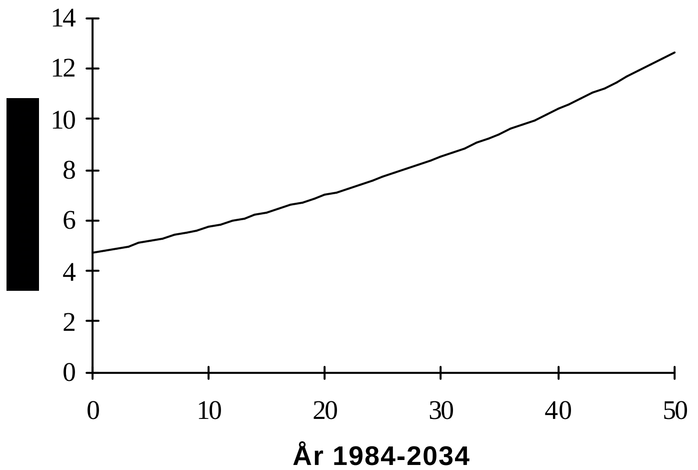
Matematikkens mysterier
- på et obligatorisk niveau

af

Kenneth Hansen

4. Exp, pot & log

Verdens befolkning



I 1984 var verdensbefolkningen 4,7 mia.
og voksede med 1,8% om året

Hvornår vil der være 10 mia. på jorden?

Indholdsfortegnelse

4.0 Indledning

Tegningen på forsiden viser, hvorledes man mener, at Jordens befolkningstal vil udvikle sig. Som man kan se, så vokser befolkningstallet hurtigere og hurtigere - en matematiker kalder denne form for vækst for en *eksponentiel udvikling*. Faktisk viser det sig, at eksponentielle udviklinger forekommer mange steder i den virkelige verden.

Et nødvendigt redskab for at kunne regne med eksponentielle udviklinger og kunne forstå, hvad der foregår, er regnereglerne for potenser og baggrunden for indførelsen af potenser. Hvorfor det? Jo, som det fremgår af nedenstående eventyr er de praktiske til håndtering af store tal.

Der var engang en Konge, som havde en Vismand, der gjorde Kongen en stor Tjeneste. Kongen ville da, som Konger har det for Vane, belønne Vismanden med det halve Kongerige og en skjøn Prinsesse. Nej, sagde Vismanden! Istedet foreslog han beskedent, at om Kongen blot ville give ham nogle Kornfrø på nedenstående Måde - ja, så ville Vismanden være overordentlig tilfreds! Nå, Vismanden, der var ivrig Skakspiller, foreslog da:

1	for Felt	1	på et Skakbræt.
2	-	2	-
4	-	3	-
8	-	4	-
16	-	5	-
32	-	6	-
64	-	7	-
128	-	8	-
256	-	9	-

Kongen, der inderst inde var lettet over ikke at skulle af med det Halve af sit Kongerige, gik straks med på Tanken!

Opgaver

1.L Hvor mange kornfrø skulle kongen af med på de første 16 felter?

2.L Man kan regne ud, at kongen i alt skulle af med $2^{64}-1$ kornfrø. Et kornfrø vejer ca. 1g. Hvor mange kg korn skulle kongen af med?

4.1 Rødder og potenser

Vi starter med at fortælle, hvad der egentligt menes med potenser og rødder. Endvidere vil vi udlede nogle regneregler for disse.

> **Definition 1 (FS)**
>
> Lad a være et positivt tal, og n et helt, positivt tal. *Potensen* a^n defineres som
>
> $$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a \qquad (n \text{ faktorer})$$
>
> Tallet a kaldes *grundtallet*, mens n kaldes *eksponenten*.

Eksempel

Nogle potenser er

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$4^5 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$

$10^1 = 10 = 10$

$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100000$

$\pi^3 = \pi \cdot \pi \cdot \pi \approx 31{,}0063$

På lommeregneren kan man regne med potenser på følgende måde:

TI-30x og TI-68

2^3: 2 $\boxed{y^x}$ 3 $\boxed{=}$

10^5: 10 $\boxed{y^x}$ 5 $\boxed{=}$

Indtil nu har alle eksponenter været positive; men hvad nu, hvis eksponenten er 0 eller negativ? Kan man i så fald tillægge potensen en fornuftig værdi?

Lad os udfylde nedenstående skema:

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2^n								

Det er nemt at udregne potenserne $2^1 = 2$, $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ og $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$. Vi sætter dem ind i skemaet:

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2^n					2	4	8	16

Der er et mønster i skemaet:

- hver gang, vi går et felt til højre, så **ganges** potensen med 2,
- hver gang, vi går et felt til venstre, så **divideres** potensen med 2.

Hvad er 2^0?

Potensen 2^0 står et felt til venstre for $2^1 = 2$, så 2^0 må være 2^1 divideret med 2, altså

$$2^0 = \frac{2^1}{2} = \frac{2}{2} = 1.$$

Vi skynder os at indsætte dette i skemaet.

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2^n				1	2	4	8	16

Hvad er 2^{-1}?

Denne potens står et felt til venstre for $2^0 = 1$ og må derfor være halvdelen heraf, dvs.

$$2^{-1} = \frac{2^0}{2} = \tfrac{1}{2}$$

Hvad er 2^{-2}?

Denne potens står et felt til venstre for $2^{-1} = \tfrac{1}{2}$ og er derfor lig

$$2^{-2} = \frac{2^{-1}}{2} = \tfrac{1}{4}$$

Og endelig ser vi, at

$$2^{-3} = \frac{2^{-2}}{2} = \tfrac{1}{8}.$$

Skemaet ender altså med udseendet:

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2^n	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16

Nu er der ikke noget specielt ved tallet 2, så vi kan ligeså godt skrive *a* i stedet. Skemaet starter da som

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
a^n					a	a^2	a^3	a^4

og igen ser vi mønsteret:

- går vi et felt til højre, så skal vi **gange** med *a*
- går vi et felt til venstre, så skal vi **dividere** med *a*

Udfyldes skemaet efter disse regler, så fås

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
a^n	$\frac{1}{a^3}$	$\frac{1}{a^2}$	$\frac{1}{a}$	1	a	a^2	a^3	a^4

Alt dette fører til nedenstående generelle definition:

Definition 2 (FS)

$$a^0 = 1 \qquad \text{og} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Eksempel

Udregn: 10^{-7}

Svar: $10^{-7} = \frac{1}{10^7} = \frac{1}{10000000} = 0{,}0000001$

På lommeregneren skal man taste

TI-30x:

10 $\boxed{y^x}$ 5 $\boxed{+/-}$ $\boxed{=}$

TI-68:

10 $\boxed{y^x}$ $\boxed{(-)}$ 5 $\boxed{=}$

Vi bemærker, at uanset eksponentens størrelse, så er **potenser altid positive**. Dette virker også umiddelbart klart, da man tager et positivt tal og multiplicerer det med sig selv et vist antal gange - og eventuelt dividerer man resultatet op i 1. Men resultatet er stadigvæk positivt.

Sætning 3 (FS)

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Bevis:

$$a^m \cdot a^n = (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot \ldots \cdot a) = a^{m+n}$$

- uanset værdien af m og n så har vi i alt $m+n$ faktorer.

Dette bevis er faktisk lidt snyd, idet det forudsætter at tallene m og n er positive. Man kan dog let bevise sætningen også når m og n (eller blot én af dem) er negative.

Sætning 4 (FS)

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Bevis:

$$(a^m)^n = a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m = a^{m+m+\ldots+m} = a^{m \cdot n}$$

- vi har i alt n faktorer af formen a^m.

Sætning 5 (FS)

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Bevis:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \cdot \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$$

Sætning 6 (FS)

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n$$

Bevis:

$$a^n \cdot b^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot b \cdot b \cdot \ldots \cdot b = a \cdot b \cdot a \cdot b \cdot \ldots \cdot a \cdot b =$$
$$(ab) \cdot (ab) \cdot \ldots \cdot (ab) = (ab)^n$$

Sætning 7 (FS)

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Bevis:

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Vi har nu bevist *potensregnereglerne* for heltallige eksponenter. Som vi senere skal se, så gælder disse regler også, hvis eksponenten f.eks. er en brøk. Potensregnereglerne kan bruges til at reducere forskellige udtryk:

Eksempel

$$2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^{-6} \cdot 2 = 2^{3+5-6+1} = 2^3 = 8$$

$$\frac{5^3 \cdot 5^{-4} \cdot 5^7}{5^6 \cdot 5^{-2}} = \frac{5^{3-4+7}}{5^{6-2}} = \frac{5^6}{5^4} = 5^{6-4} = 5^2 = 25$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^6 \cdot a^3 \cdot \left(\frac{b}{a^2}\right)^2 = \frac{a^6}{b^6} \cdot a^3 \cdot \frac{b^2}{(a^2)^2} = a^6 \cdot b^{-6} \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot a^{-4} =$$
$$a^{6+3-4} \cdot b^{-6+2} = a^5 b^{-4} = \frac{a^5}{b^4}$$

To naturlige spørgsmål melder sig i forbindelse med potenser:

1) Givet $x^a = b$, hvor man kender a og b. Hvad er x?

2) Givet $a^x = b$, hvor man kender a og b. Hvad er x?

Spørgsmål 1 besvarer vi nu, mens spørgsmål 2 må vente til senere.

For at løse ligninger af samme type som i spørgsmål 1 indfører vi *rødder*:

Definition 8 (LS)

$\sqrt[n]{a}$ kaldes den n'te rod af a, og er
1) det **positive** tal, som
2) multipliceret med sig selv n gange giver a.

Altså, $(\sqrt[n]{a})^n = a$

Eksempel

$\sqrt[3]{8} = 2$, idet $2^3 = 8$

$\sqrt[4]{16} = 2$, idet $2^4 = 16$

$\sqrt[2]{9} = 3$, idet $3^2 = 9$

$\sqrt[3]{2} \approx 1{,}25992105$, idet $(1{,}25992105)^3 = 2$

Bemærk, at man normalt betegner $\sqrt[2]{a}$ som $\sqrt{a}$ - *kvadratroden* af a

Eksempel

Udregn $\sqrt[3]{1000}$ på lommeregneren.

TI-30x:

1000 $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ 3 $\boxed{=}$

TI-68:

3 $\boxed{\sqrt[x]{}}$ 1000 $\boxed{=}$

En måde, hvorpå man kan definere potenser med rationale eksponenter, dvs. med brøker, er som rødder.

Sætning/definition 9 (FS)

1) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

2) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a}^{\,m}$

Bevis:

1) $\sqrt[n]{a}$ er per definition det tal, som

1) er positivt, og
2) multipliceret med sig selv n gange giver a.

Vi viser, at $a^{\frac{1}{n}}$ opfylder punkterne 1) og 2) i definition 8.

For det første er $a^{\frac{1}{n}}$ et positivt tal, idet det er et positivt tal a i en potens.

For det andet gælder, at

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

2) $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a}^{\,m}$

Heraf fås, at alle potensregnereglerne også gælder for rødder, blot omskrevet til det barske rodsprog. Vi har derfor følgende sætning:

Sætning 10 (LS)

1) $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$

2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Vi har kun vist alle regneregler indtil nu for heltallige eksponenter, og det til trods for, at vi har defineret en potens til at kunne have alle former for eksponenter, **også** de rationale tal (alle tal, der kan skrives som en brøk)!

F.eks. $2^{2,5}$ - husk at 2,5 kan skrives som brøken $\frac{25}{10}$

Men faktisk har vi næsten vist regnereglerne også for de rationale eksponenter - de følger nemlig af regnereglerne for heltallige eksponenter ved en omskrivning.

Faktisk kan man vise, at regnereglerne også gælder for irrationale tal som f.eks. π i eksponenten. Med andre ord gælder regnereglerne for alle reelle tal i eksponenten. Det vil dog føre for vidt i første omgang at begrunde, hvordan man viser dette.

Vi husker på, at vi indførte rødder, fordi vi ville kunne løse ligninger af formen

$$x^a=b.$$

Vi er nu i stand til at gøre dette.

Eksempel

Givet: $x^3=64$

Find: x

Svar: $x=\sqrt[3]{64}=4$

Givet: $6x^5=120$

Find: x

Svar: $6x^5=120$

$\Updownarrow$

$x^5=20$

$$x = \sqrt[5]{20} \approx 1{,}8206$$

Givet: $x^{\pi} = 2$

Find: x

Svar: $x = \sqrt[\pi]{2} \approx 1{,}2469$

Man kan nu også komme ud for, at den løsning, man søger, er negativ. Vi har imidlertid kun defineret potenser for positive grundtal.

Det er ikke noget problem at udregne potenser af negative tal med **heltallig** eksponent:

$$(-2)^2 = (-2)\cdot(-2) = 4$$
$$(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8$$
$$(-2)^4 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = 16$$
$$(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$$

men hvis eksponenten ikke er et helt tal, så er der alvorlige problemer:

$$(-2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2} = ??$$

Af eksemplet fremgår, at hvis potensen har **negativt grundtal** og **eksponenten er heltallig**, så er der ingen problemer, kun lidt bøvl.
Men hvis eksponenten ikke er heltallig, så er potensen **slet ikke defineret**.

Sætning 11

For et helt tal n og et negativt tal x gælder

$$x^n = \begin{cases} |x|^n & , n \text{ lige} \\ -|x|^n & , n \text{ ulige} \end{cases}$$

Bevis:

Beviset er ganske simpelt - regnereglerne for numerisk-værdi giver

$$x^n = (-|x|)^n = ((-1)\cdot|x|)^n = (-1)^n \cdot |x|^n$$

Faktoren $(-1)^n$ er nu enten 1 eller -1 alt efter om eksponenten n er lige eller ulige.

Visse ligninger kan derfor have to løsninger - en positiv og en negativ. Dette sker dog kun ved **heltallige, lige eksponenter**.

Eksempel

Givet: $x^2 = 9$
Find: x
Svar: $x = \sqrt{9} = 3$

Men det viser sig, at $x = -3$ også er en løsning, fordi

$$(-3)^2 = 9$$

Vi skriver derfor

$$x^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

Eksempel

$$10x^6 = 2730$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x^6 = 273$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x = \pm\sqrt[6]{273} \approx \pm 2{,}5470$$

Opgaver

1.L Beregn nedenstående tal på lommeregneren. Angiv resultatet med 4 decimaler.

a) 6^8 2^9 0^9 19^7 24^{12}

b) 10^{-3} 4^{-2} 5^{-3} 6^{-0} 11^{-1}

c) $\sqrt[4]{1000}$ $\sqrt{500}$ $\sqrt[2]{500}$ $\sqrt[4]{6}$ $\sqrt[10]{1024}$

d) $0{,}6^{1{,}2}$ $4{,}4^{1{,}2}$ $9^{0{,}9}$ $0{,}09^{-7}$ $0{,}005^{0{,}005}$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ 2^{-3} $\sqrt[2]{64}$ $\sqrt[-2]{\frac{1}{64}}$ $4^{1{,}5}$

2.M Bevis følgende regneregler:

a) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a^{m-n}}$

b) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}$

c) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

(Vink: Omskriv i alle tre tilfælde venstresidens rødder til potenser med brøker som eksponenter)

3.L Reducér følgende udtryk uden brug af lommeregner - du får brug for anvende alle potensregnereglerne.

a) $3^5 \cdot 3^{-11} \cdot 3^4 \cdot 9$

b) $5^4 : 5^2 \cdot 5^{-3} : 5^{-2}$

c) $(5^3)^2 \cdot (5^2)^{-2} : 5^{-4} \cdot 5^{-5}$

d) $\dfrac{(5^{-3})^{-3} \cdot 5^6}{(5^2)^5 \cdot 5^{-7}}$

e) $\dfrac{16^2 \cdot 2^{-3} \cdot 8^5}{4^4 \cdot 2^{16} \cdot \frac{1}{32}}$

f) $3^3 \cdot 5^3 : 15^3$

g) $2^{-4} \cdot 3^{-4} \cdot 6^4$

h) $\dfrac{15^3 \cdot 6^4 \cdot 5^{-2}}{10^2 \cdot 3^7 \cdot 2}$

i) $\dfrac{36^3 \cdot 100^2}{225 \cdot 144}$

j) $\dfrac{30^3 \cdot 12^{-2} \cdot 25}{2^{-5} \cdot 5^5 \cdot (\frac{1}{3})^{-3}}$

k) $\dfrac{(\frac{1}{5})^3 \cdot 2^3 \cdot 3^{-5} \cdot 125}{3^{-6} \cdot (\frac{1}{3})^7 \cdot (\frac{1}{2})^{-2}}$

l) $\dfrac{4^{-6} \cdot 5^0 \cdot (\frac{1}{6})^{-2}}{3^4 \cdot 2^{-2} \cdot (\frac{1}{3})^{-3}}$

m) $\dfrac{(((7)^3)^3)^{-2}}{7^4 \cdot 7^3 \cdot ((7)^2)^{-4}}$

n) $\dfrac{((12)^3)^{-4}}{2^4 \cdot 6^3}$

4.M Man kan godt definere rødder af negative tal, når ellers visse betingelser er opfyldt:

$\sqrt[n]{x}$ er defineret, når x er negativ og n er et **ulige**, helt tal.

Begrund dette.

Man må dog ikke skrive f.eks. $\sqrt[3]{-8} = (-8)^{1/3}$ idet potenser med negativt grundtal og ikke-heltallig eksponent er defineret.

Find og forklar fejlen i nedenstående **forkerte** udregning:

$$-4 = \sqrt[3]{-64} = (-64)^{1/3} = (-64)^{2/6} = ((-64)^2)^{1/6} =$$
$$\sqrt[6]{(-64)^2} = \sqrt[6]{4096} = 4$$

5.L Hvilke af nedenstående rødder er definerede? Beregn værdien af de definerede rødder (det kan gøres uden brug af lommeregner!).

a)	$\sqrt{4}$	b)	$\sqrt{-4}$	c)	$\sqrt{\frac{16}{4}}$	d)	$\sqrt{\frac{-16}{4}}$
e)	$\sqrt{\frac{-16}{-4}}$	f)	$\frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-4}}$	g)	$\sqrt[4]{16}$	h)	$\sqrt[4]{\lvert -16\rvert}$
i)	$\sqrt[3]{-27}$	j)	$\sqrt[4]{-81}$	k)	$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-9}$	m)	$\sqrt[3]{\frac{-27}{-1}}$
n)	$\sqrt{0}$	o)	$\sqrt[3]{0}$	p)	$\sqrt{\frac{-9}{-4}}$	q)	$\frac{\sqrt{-9}}{\sqrt{-4}}$

6.L Omskriv nedenstående velkendte regneregler til potensregneregler:

a) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ b) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

c) $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$ d) $\sqrt[n]{a^n} = a \qquad (a>0)$

7.L Beregn nedenstående potenser **uden** brug af lommeregner:

a)	$8^{2/3}$	b)	$8^{4/3}$	c)	$27^{2/3}$	d)	$27^{-2/3}$
e)	$27^{4/3}$	f)	$16^{1/4}$	g)	$16^{-1/4}$	h)	$16^{2/4}$
i)	$16^{1/2}$	j)	$16^{3/4}$	k)	$16^{5/4}$	l)	$32^{1/5}$
m)	$32^{0,2}$	n)	$32^{2,4}$	o)	$(2^{2/3})^3$	p)	$(2^4)^{1/2}$

8.L Reducér følgende uden brug af lommeregner:

a)	$\frac{3\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{3/4}}$	b)	$\frac{3\sqrt[3]{4}\cdot 8\sqrt{6}}{\sqrt[3]{32}/3}$	c)	$\frac{\pi^2\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}}{\pi^3}$	d)	$\frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[6]{32}}$

9.L Reducér nedenstående:

a) $\frac{x^5(xy)^{-2}(y/x)^3}{(x^2/y^3)^{-1}y^3(1/x^2)^{-4}}$ b) $a^{1/2}\cdot a^3 : a^{3/2}\cdot(a^3)^{-2}$

c) $\frac{a^{-1/2}\cdot a\cdot(a^3)^{1/2}}{(a^6)^{1/3}}$ d) $\frac{b^{3/2}\cdot(ab)^{-1}\cdot a^4}{\left(\frac{b^2}{a^5}\right)^{1/4}}$

e) $\frac{(a^{1/3})^2\cdot(a^{-2})^{-3}\cdot(a^3)^{-1/2}\cdot(a^3)^2\cdot((a^2)^2\cdot a^{-2})^3}{a^4}$

f) $\frac{\sqrt{a^5}}{a^2\sqrt[3]{a}}$ g) $\frac{a^3\sqrt[4]{a^2b}}{\sqrt[3]{\frac{a^{27}}{\sqrt{b^9}}}}$

10.L Et lille rim fra en gammel matematikbog siger:

Den, som tager
Roden af en Sum,
Han er dum!

og dette er ganske rigtigt. Generelt gælder der **ikke**, at

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

- prøv selv med nogle tal.

Med dette *in mente* skal du reducere nedenstående mest muligt, uden brug af lommeregner:

a) $\sqrt{50}+\sqrt{98}-\sqrt{72}+\sqrt{18}-\sqrt{128}$ b) $\dfrac{7+\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

c) $\sqrt{48}-\sqrt{75}+\sqrt{12}-\sqrt{125}+\sqrt{80}$ d) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

e) $\sqrt{125}-\sqrt{8}-\sqrt{180}+\sqrt{18}$ f) $\dfrac{5}{\sqrt{5}}-\sqrt{5}$

11.L Skriv nedenstående udtryk som én potens:

a) $3^8\cdot 3^4\cdot 3^{16}\cdot 3$ b) $(-2)^{-2}\cdot(-2)^{-3}\cdot(-2)^{-5}$

c) $(-5)^4\cdot(-5)^{-3}\cdot(-5)$ d) $a^{-1}\cdot a^{-2}\cdot a^{-3}$

e) $x^2\cdot x^8\cdot x^2$ f) $x^7\cdot x^{-3}\cdot x^0$

g) $a^{19}\cdot a\cdot a^{25}$ h) $b^8\cdot b^{-7}\cdot b^4\cdot b^{-1}$

i) $p^{3q}\cdot p^{5q}\cdot p^{18q}$ j) $q^3\cdot q^{-5}\cdot q^2\cdot q^6$

k) $13^8\cdot 13\cdot 13\cdot 13^2$ l) $4^n\cdot 4^{-n}\cdot 4^{3n}$

m) $(-1)^3\cdot(-1)^7\cdot(-1)^5$ n) $2^{8p}\cdot 2^{3q}\cdot 2^p$

o) $b^{8n}\cdot b^{2n}\cdot b^{13n}\cdot b^{7n}$ p) $7^8:7^5$

q) $b^{2x}:b^x$ r) $3^3:3^4$

s) $e^{2x}:e^{-7x}$ t) $a^8:a^{-2}$

u) $7^{-7}:7^5$ v) $2^{5x}:2^{4x}$

w) $(-2)^7:(-2)^9$ x) $x^{3n}:x^{-2n}\cdot x^{3n}$

y) $10^x:10^{-4x}$ z) $p^{18}\cdot p^{-3}:p^{-7}\cdot p^{-25}$

12.L Reducér nedenstående:

a) $5^2\cdot 5^2$ b) $(-3)^5\cdot 2^5$

c) $7^3\cdot 49$ d) $(-2)^6\cdot(-4)^6$

e) $6^2\cdot 2^4\cdot 12$ f) $t^{-8}\cdot u^{-8}$

g)	$a^2 \cdot (a \cdot b)^3 \cdot b^6$	h)	$3^{-7} \cdot 5^{-7} \cdot 2^{-7}$
i)	$x^3 \cdot (xy)^2 \cdot 3x$	j)	$\left(\frac{1}{9}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$
k)	$\left(\frac{1}{5}\right)^n \cdot 5^n \cdot 7^n$	l)	$7^x \cdot 7^y \cdot 7^{3x} \cdot 7^{3y}$
m)	$\left(\frac{1}{8}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{-2} \cdot 8^2$	n)	$(5a)^{-2} \cdot (2a)^{-2} \cdot (-3a)^{-2}$
o)	$8^3 : 4^3$	p)	$28^2 : 7^2$
q)	$55^3 : 11^3$	r)	$a^5 : b^5$
s)	$\left(\frac{1}{2}\right)^5 : 2^5$	t)	$\left(\frac{3}{2}\right)^6 : \left(\frac{8}{9}\right)^6$
u)	$\left(\frac{a}{b}\right)^8 : \left(\frac{b}{a}\right)^8$	v)	$3^{-7} : 2^{-7}$
w)	$(-5)^9 : 15^9 \cdot 3^9$	x)	$\left(\frac{1}{5}\right)^n : \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^n$
y)	$x^{2n} : y^{2n} : z^{2n}$	z)	$y^4 \cdot (3y)^3$

13.L Reducér nedenstående:

a)	$(2^3)^2$	b)	$(5^2)^3$	c)	$((ab)^5)^2$
d)	$(8^3)^3$	e)	$(\left(\frac{2}{5}\right)^3)^2$	f)	$(p^6)^8 : (p^8)^6$
g)	$((2 \cdot 15)^2)^3$	h)	$(5^7)^{-2}$	i)	$(2^{-4})^{-2}$
j)	$(e^7)^{-1}$	k)	$(10^2)^3$	l)	$((-6)^4)^{-2}$

14.L Reducér nedenstånde:

a)	$\frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{2}}$	b)	$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$	c)	$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$
d)	$\sqrt[3]{8a^3 : a^3}$	e)	$\sqrt{x^{-4} \cdot b^8}$	f)	$\frac{\sqrt[4]{b^{-8}}}{\sqrt[4]{a^{-4}}}$
g)	$\frac{\sqrt[n]{a^{2n+4}}}{\sqrt[n]{a^{n+4}}}$	h)	$\frac{\sqrt{63a^2 x}}{\sqrt{28x}}$	i)	$\frac{\sqrt{280a^2}}{\sqrt{245a}}$
j)	$\frac{\sqrt{180a^2 x}}{\sqrt{x/3}}$	k)	$\sqrt[3]{a^9 \cdot b^{-6}}$	l)	$\frac{\sqrt[n]{b^{3n-6}}}{\sqrt[n]{b^{-3n-6}}}$

15.L Reducér:

a) $(3^{2x-3})^2 \cdot 9^x \cdot 3^{-2x+7} : 3^{1+4x}$

b) $\left(\frac{5^{2x-3}}{2^{x+4}}\right)^2 \cdot \left(\frac{5^{-5-2x}}{2^{3x}}\right)^{-2} : \left(\frac{5^{x-2}}{2^{3x-1}}\right)^{-2}$

c) $d^{3x-3} \cdot d^{x-1} : d \cdot (d^{2x-2})^{-2}$

d) $\left(\frac{(ab)^2}{a^{-1}}\right)^3 \cdot \frac{((ab)^2)^{p+2} \cdot (a^2)^2 \cdot (b^{-1})^5}{(a^{-1})^{-1} \cdot (b^{2p+3})^2}$

e) $\dfrac{x^3y^2}{2z^2} \cdot \dfrac{3x^2 \cdot z}{4y^4}$

4.2 Eksponentialfunktioner

En meget vigtig type funktioner er de såkaldte *eksponentialfunktioner*, som vi her beskriver kort.

Definition 11 (FS)

Lad funktionen f have forskriften

$$f(x) = a^x.$$

f kaldes en *eksponentialfunktion*, og $a > 0$ kaldes funktionens *grundtal*.

(Man kræver normalt, at $a \neq 1$).

Man skriver ofte $\exp_a(x)$ i stedet for a^x - dette er mest af typografiske årsager.

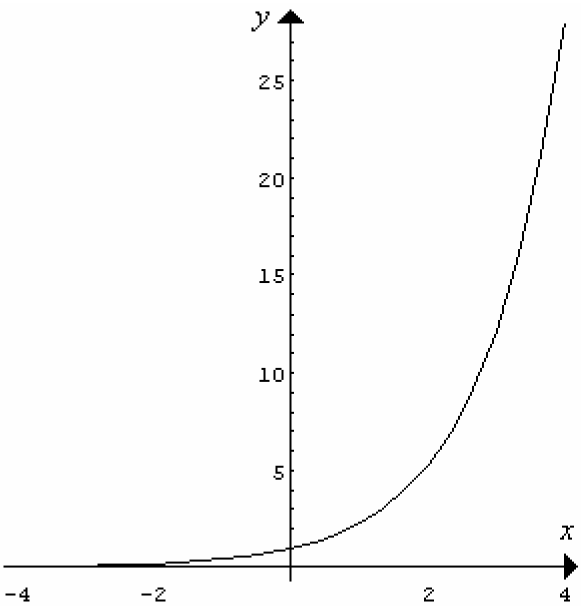
Eksempel

Givet: $f(x) = 2,3^x$

Tegn: Grafen for f

Svar: Et støttepunktsskema laves

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0,0821	0,1890	0,4348	1	2,3	5,29	12,17	27,98



Eksponentialfunktionerne opfylder følgende, vigtige sætning:

Sætning 12 (LS)

Lad $f(x) = a^x$ være en eksponentialfunktion. Så gælder:

1) $f(0) = 1$

2) $f(1) = a$

3) Hvis $a > 1$, så er f voksende

4) Hvis $0 < a < 1$, så er f aftagende

5) $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$

Bevis:

1) $f(0) = a^0 = 1$.

2) $f(1) = a^1 = a$

3) Vi skal vise, at jo større x bliver, desto større bliver $f(x)$. Altså

$$x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Men idet $x_1 < x_2$, så er $k = x_2 - x_1 > 0$ og $a^k > 1$. Derfor

$$a^{x_1} < a^{x_1} \cdot a^k = a^{x_1 + k} = a^{x_2}$$

4) Vises som punkt 3.
(Vink: Anvend, at $a^k < 0$ når $k > 0$ og $0 < a < 1$).

5) $f(x+y) = a^{x+y} = a^x \cdot a^y = f(x) \cdot f(y)$

Ligningen i punkt 5 kaldes for en *funktionalligning*.

En meget vigtig eksponentialfunktion er funktionen med grundtallet

$$e = 2,7182818\ldots$$

Eksponentialfunktionen med grundtallet e kaldes *den naturlige eksponentialfunktion* og betegnes med 'exp', dvs.

$$\exp(x) = e^x$$

Opgaver

1.L Tegn graferne for følgende eksponentialfunktioner:

$f_1(x) = 2^x$ $\quad f_2(x) = 3^x$ $\quad f_3(x) = 4^x$

$g_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $\quad g_2(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $\quad g_3(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

Sammenlign med sætning 14, c) og d)

2.L Hvilke af nedenstående funktioner opfylder *funktionalligningen*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

a) $f(x) = 3x$ b) $f(x) = 4x - 2$

c) $f(x) = \sqrt{x}$ d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

e) $f(x) = 2^x$ f) $f(x) = 3^x + 6$

3.L Hvilke af funktionerne i opgave 2 opfylder funktionalligningen

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \qquad ?$$

4.L Hvilke af funktionerne i opgave 2 opfylder funktionalligningen

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \qquad ?$$

5.L Omskriv potensregnereglerne i sætning 3-7 til $\exp_a$-notation.

6.L Reducér nedenstående uden brug af lommeregner:

a) $\exp(3) \cdot \exp(5) \cdot e^{-2} \cdot \exp(-3) \cdot e^{-3}$

b) $\exp_3(8) \cdot \exp_3(-4) \cdot 3 \cdot \exp_3(-1) : 3^4$

c) $\dfrac{\exp_5(7) \cdot \exp_5(-2)}{125 \cdot \exp_5(3)}$

d) $\exp_a(3n) \cdot \exp_a(-2n) - a^n$

e) $\exp_4(8) \cdot (\exp_4(-2))^4$

f) $\dfrac{\exp_6(2n)}{\exp_2(n) \cdot \exp_3(n)}$

4.3 Eksponentiel udvikling

En mere generel type funktioner end eksponentialfunktionerne er de såkaldte *eksponentielle udviklinger*. Disse optræder overalt - f.eks. kan verdens befolkningstal beskrives ved en eksponentiel udvikling.

Definition 13 (FS)

Lad funktionen f have forskriften

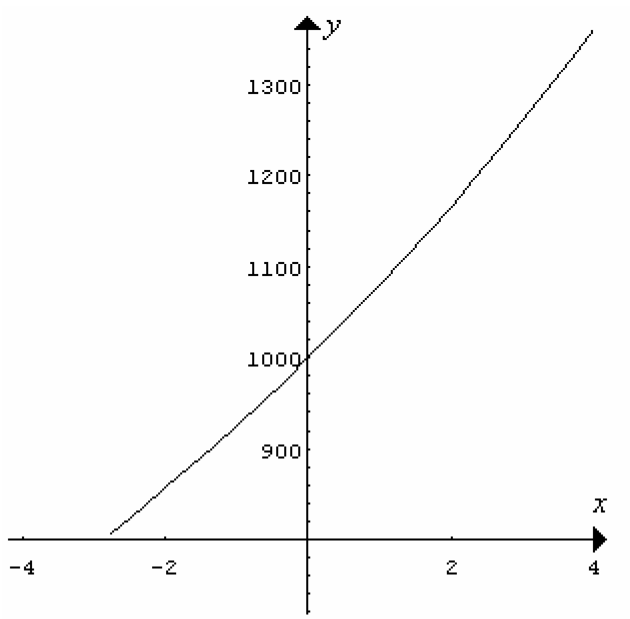
$$f(x) = b \cdot a^x \qquad a > 0\,, a \neq 1\,, b > 0$$

f kaldes en eksponentiel udvikling med grundtallet a og *begyndelsesværdi* b

Eksempel

Givet: $f(x) = 1000 \cdot 1{,}08^x$
Tegn: Grafen for f
Svar: Et støttepunktsskema laves

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	5
$f(x)$	793,8	857,3	925,9	1000	1080	1166	1260	1469



Eksempel

Busser sætter 100 kr. i banken til en rente $r = 6\%$ pr. år. Kan vi mon lave en funktion, der beskriver, hvad der står på bankbogen?

Altså:	0 år	Busser har kr.	100,00
	1 år	"	106,00
	2 år	"	112,40
	3 år	"	119,10
	4 år	"	126,20
	5 år	"	133,80

Okay: Lad os så se på den eksponentielle udvikling givet ved $f(x) = 100 \cdot 1,06^x$

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	100,00	106,00	112,40	119,10	126,20	133,80

Hov, er det ikke det samme som hos Busser, når blot

x tæller år , og
$f(x)$ tæller Bussers pengebeholdning i banken efter x år?

Altså: 1. Busser **starter** med 100 kr.
Altså **begyndelsesværdi** $b = 100$

2. Af skemaet ses, at hans pengebeholdning vokser fra år til år svarende til at multiplicere med $a = 1,06$.

a kaldes den årlige **fremskrivningsfaktor**.
a^2 kaldes den **to-**årlige fremskrivningsfaktor.
a^h kaldes den **h-**årlige fremskrivningsfaktor.

3. $r = 0,06$ og $a = 1,06$ bør vække mistanke om en sammenhæng:

$$r = a - 1$$

Da man kun kan snakke om *renter*, når man har med penge at gøre, kalder man også r for *vækstraten* eller *den procentvise tilvækst.*

Hvad er mon den **to-årlige** vækstrate?
Jo, det er den **to-årlige** fremskivningsfaktor minus 1, altså

$$a^2 - 1$$

Tilsvarende er den ***h*-årlige** fremskrivningsfaktor

$$a^h - 1$$

Vi samler vores observationer i nedenstående sætning:

Sætning 14 (LS)

Lad $f(x) = b \cdot a^x$ være en eksponentiel udvikling.

1) $f(0) = b$

2) a^h er fremskrivningsfaktoren for en x-tilvækst på h

3) $a^h - 1$ er vækstraten for en x-tilvækst på h.

Bevis:

1) $f(0) = b \cdot a^0 = b \cdot 1 = b$

2) $f(x+h) = b \cdot a^{x+h} = b \cdot a^x \cdot a^h = f(x) \cdot a^h = a^h \cdot f(x)$

3) Vækstraten for en x-tilvækst på h er lig

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)} = \frac{a^h \cdot f(x) - f(x)}{f(x)} =$$

$$\frac{(a^h - 1) f(x)}{f(x)} = a^h - 1$$

Eksempel

Befolkningstallet i en lille by kunne i årene 1980-1990 beskrives ved en eksponentiel udvikling.

Givet: $f(x) = 751 \cdot 1{,}13^x$ hvor x tæller år fra 1980
$f(x)$ tæller antal indbyggere

Find: Befolkningstallene i 1980, 1982 og 1987

1980: $x = 0$: $f(0) = 751 \cdot 1.13^0 = 751$

1982: $x = 2$: $f(2) = 751 \cdot 1.13^2 = 959$

1987: $x = 7$: $f(7) = 751 \cdot 1.13^7 = 1767$

Find: Forskellige vækstrater og fremskrivningsfaktorer

den årlige fremskrivningsfaktor: $a^1 = 1{,}13^1 = 1{,}13$

den årlige vækstrate: $a^1 - 1 = 0{,}13$

$= 13\%$

den 3-årlige fremskrivningsfaktor:	a^3	$=1{,}13^3$	$=1{,}443$
den 3-årlige vækstrate:	a^3-1	$=0{,}443$	$=44{,}3\%$
den 7-årlige fremskrivningsfaktor:	a^7	$=1{,}13^7$	$=2{,}353$
den 7-årlige vækstrate:	a^7-1	$=1{,}353$	$=135{,}3\%$

Man er ofte i den situation, at man kender nogle punkter for grafen for en eksponentiel udvikling og gerne vil finde konstanterne a og b. Dette problem løses af følgende sætning:

Sætning 15 (FS)

Lad f være en eksponentiel udvikling: $f(x)=b\cdot a^x$
Lad $f(x_1)=y_1$ og $f(x_2)=y_2$.

Så findes konstanterne a og b ved:

1) $a=\sqrt[x_2-x_1]{\dfrac{y_2}{y_1}}$

2) $b=\dfrac{y_1}{a^{x_1}}$

Bevis:

1) $y_1=f(x_1)$ og $y_2=f(x_2)$

$\Updownarrow$

$y_1=b\cdot a^{x_1}$ og $y_2=b\cdot a^{x_2}$

$\Downarrow$

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{b\cdot a^{x_2}}{b\cdot a^{x_1}}$$

$\Updownarrow$

$$\frac{y_2}{y_1}=\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}=a^{x_2-x_1}$$

$\Updownarrow$

$$\sqrt[x_2-x_1]{\frac{y_2}{y_1}}=\sqrt[x_2-x_1]{a^{x_2-x_1}}$$

$\Updownarrow$

$$\sqrt[x_2-x_1]{\frac{y_2}{y_1}}=a$$

2) $y_1=f(x_1)=b\cdot a^{x_1}$

$\Downarrow$

$$b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

Eksempel

Givet: f er en eksponentiel udvikling, med $f(2) = 3$ og $f(5) = 7$.

Find: Regneforskriften for f

Svar: $f(x) = b \cdot a^x$, da f er en eksponentiel udvikling

$(x_1, y_1) = (2,3)$ og $(x_2, y_2) = (5,7)$

a: $a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$

$\Updownarrow$

$a = \sqrt[5-2]{\frac{7}{3}} = 1{,}326352403 \approx 1{,}326$

b: $b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$

$\Updownarrow$

$b = \frac{3}{a^2}$

$\Downarrow$

$b = 1{,}705310232 \approx 1{,}705$

Altså $f(x) = 1{,}705 \cdot 1{,}326^x$

Find: $f(11)$

Svar: $f(11) = 1{,}705 \cdot 1{,}326^{11} \approx 37{,}993$

En mere præcis værdi kan bruges ved at anvende værdierne for a og b, men med alle decimalerne:

$$f(11) = 1{,}705310232 \cdot 1{,}326352403^{11} \approx 38{,}111$$

På lommeregneren er det en god idé at gemme værdierne for a og b i en hukommelse med alle decimalerne. Dette kan gøres sådan:

TI-30x:

a: $\boxed{(}$ 7 $\boxed{\div}$ 3 $\boxed{)}$ $\boxed{\sqrt[x]{y}}$ $\boxed{(}$ 5 $\boxed{-}$
2 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$ **STO** 1

Værdien for a er nu gemt i hukommelsen 1 - displayet viser et lille M1 oppe i venstre hjørne.

b: 3 $\boxed{\div}$ **RCL** 1 $\boxed{y^x}$ $\boxed{=}$ **STO** 2

b er nu gemt i hukommelse 2, og displayet viser et lille M2

$f\,(11)$: **RCL** 2 $\boxed{\mathbf{x}}$ **RCL** 1 $\boxed{y^x}$
11 $\boxed{=}$

TI-68:

a: $\boxed{(}$ 5 $\boxed{-}$ 2 $\boxed{)}$ $\boxed{\sqrt[x]{\ }}$ $\boxed{(}$ 7 $\boxed{\div}$ 3 $\boxed{)}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{=}$

Værdien for *a* er nu gemt i hukommelsen mærket A.

b: 3 $\div$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{y^x}$ 2 $\boxed{=}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{=}$

b er nu gemt i hukommelsen B.

$f(11)$: $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\boxed{\text{x}}$ $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{y^x}$ 11 $\boxed{=}$

Eksempel

Givet: $f(x) = b \cdot a^x$ med $b = 3{,}2$ og $f(4) = 9$

Find: Regneforskriften for *f*

Svar: $f(x) = 3{,}2 \cdot a^x$

a beregnes:

$$f(x_1) = b \cdot a^{x_1}$$

$\Leftrightarrow$

$$a = \sqrt[x_1]{\frac{f(x_1)}{b}}$$

$\Rightarrow$

$$a = \sqrt[4]{\frac{9}{3{,}2}} \approx 1{,}295$$

Vi har nu $f(x) = 3{,}2 \cdot 1{,}295^x$

Opgaver

1.L Tegn graferne for følgende eksponentielle udviklinger:

$f_1(x) = 2 \cdot 1{,}5^x \qquad f_2(x) = 3 \cdot 1{,}5^x \qquad f_3(x) = 4 \cdot 1{,}5^x$

$g_1(x) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}7^x \qquad g_2(x) = 2 \cdot 0{,}7^x \qquad g_3(x) = 8 \cdot 0{,}7^x$

2.L Se forsiden

Givet: Verdensbefolkningen var i 1984 på 4,7 mia. personer og voksede med ca. 1,8% om året.

a) Tegn en graf, der viser udviklingen i verdensbefolkningen, hvis denne vækst fortsatte fra 1984 til 2034.

b) Hvor mange personer vil der være i 2022? (Aflæs på grafen).

c) Hvornår vil der være 10 mia. mennesker på Jorden?

d) Med hvor mange procent vokser Jordens befolkning på et årti?

3.L I hver af nedenstående opgaver er f en ekponentiel udvikling. Bestem forskriften for f ud fra de givne oplysninger.

a) $f(8) = 6{,}3$ og $f(7{,}3) = 2$

b) $f(1{,}1) = 803$ og $f(2{,}4) = 921$

c) $f(-2) = 6$ og $f(2) = 3$

d) $f(0) = 6$ og $a = 4$

e) $b = 6$ og $f(3) = 12$

f) $a = 21{,}32$ og $f(2{,}41) = 11{,}24$

g) $f(7) = 7$ og $f(9) = 9$

4.L Ægyptens befolkning vokser eksponentielt og var i 1965 på 29,4 millioner og i 1970 på 33,3 millioner.

a) Opstil en forskrift for Ægryptens befolkning som funktion af tiden.
b) Hvor mange mennesaker vil der være i Ægypten i år 2000.
c) Hvor stor er den årlige befolkningstilvækst i procent?
d) Hvor stor er den 10-årlige vækst-rate?

5.L Svend indsætter 100 kr. på en bankkonto til en rente på 12% p.a. (p.a.=*pro anno* (årlig rente)).

a) Angiv en forskrift for indestående på Svends konto efter x år.
b) Hvor mange penge står der på kontoen efter 1 måned?
c) Hvad er den månedlige rente?

Det er altså **forkert** at sige, at den månedlige rente er på 1%.

d) På en anden konto er den månedlige rente faktisk på 1%. Hvor stor er den årlige rente?

6.L I TV-Avisen den 8. september 1977 fremsatte en journalist følgende udtalelse om huslejen for en bestemt type lejlighed:

> *Den månedlige husleje er i øjeblikket på 1600 kroner. Hvis der ikke gribes ind fra politisk hold, vil huslejen stige med 15 % årligt. Det betyder, at huslejen i 1985 vil være på 5000 kroner.*

Har journalisten ret?

7.L Antallet af landbrug i Danmark var i 1972 på 143093 og i 1976 på 130753. Det kan antages af antallet af landbrug følger en eksponentiel udvikling.

a) Bestem en forskrift for antallet af landbrug i Danmark.
b) Med hvor mange procent falder antallet af landbrug i Danmark pr. år?
c) Hvor mange landbrug er der tilbage i Danmark i år 2000?

4.4 Logaritmer

Som omtalt tidligere side vil vi gerne kunne løse ligninger af typen $3^x = 9$ eller mere generelt $a^x = b$.

Vi vil også gerne kunne afgøre om en given funktion er en eksponentiel udvikling.

Disse ønsker (og mange flere) inspirerer os til at indføre logaritmer, som er et redskab, der kan håndtere sådanne problemer.

Ideen bag logaritmer er, at logaritmen med grundtallet a skal gøre det modsatte af eksponentialfunktionen med grundtal a. Logartimefunktionen skal altså pille eksponenten ud af en potens - svarende til nedenstående mønster:

$\log_{10}(100) = 2$	fordi $10^2 = 100$
$\log_{10}(1000) = 3$	fordi $10^3 = 1000$
$\log_{10}(10000) = 4$	fordi $10^4 = 10000$
$\log_3(9) = 2$	fordi $3^2 = 9$
$\log_3(27) = 3$	fordi $3^3 = 27$
$\log_3(81) = 4$	fordi $3^4 = 81$
$\log_2(4) = 2$	fordi $2^2 = 4$
$\log_2(8) = 3$	fordi $2^3 = 8$

Øvelse: Bestem $\log_{10}(100000)$, $\log_3(243)$, $\log_2(16)$, $\log_5(25)$

Lad os betragte $\log_{10}$ nok engang:

$$2 \xrightarrow{\exp_{10}} 100 \xrightarrow{\log_{10}} 2$$

Vi tager **2** som eksponent til **10**, får **100,** og tager derefter logaritmen til **100** og får **2** igen!
Lad os lige prøve et par gange mere:

$$3 \xrightarrow{\exp_{10}} 1000 \xrightarrow{\log_{10}} 3$$

$$4 \xrightarrow{\exp_{10}} 10000 \xrightarrow{\log_{10}} 4$$

$$x \xrightarrow{\exp_{10}} 10^x \xrightarrow{\log_{10}} x$$

Tager man på et tal x først $\exp_{10}$ og derefter $\log_{10}$, så får man tallet selv. Man siger, at $\log_{10}$ er en omvendt funktion til $\exp_{10}$

Dette udtrykkes i nedenstående definition:

Definition 16 (FS)

$\log_a$ er den omvendte funktion til $\exp_a$, dvs.

$$y = \exp_a(x) \Leftrightarrow x = \log_a(y)$$

En anden måde at udtrykke dette på er følgende:

Sætning 17 (FS)

$\log_a(a^x) = x$ og $a^{\log_a(x)} = x$

På din lommeregner har du to logaritmetaster, log og ln.

log: log er den almindelige betegnelse for $\log_{10}$.
Da man som oftest bruger titalslogaritmen, plejer man at skrive log i stedet for $\log_{10}$.

ln: ln er betegnelsen for den **n**aturlige **l**ogaritme.
Det er logaritmen med grundtallet $e \approx 2.7182818$. Altså

$$\ln x = \log_e x.$$

Eksempel

Beregn på lommeregneren tallene $\log 1000$ og $\ln 1000$.

TI-30x:

$\log 1000$:	1000	$\boxed{\log}$
$\ln 1000$:	1000	$\boxed{\ln}$

TI-68:

$\log 1000$:	$\boxed{\log}$	1000	$\boxed{=}$
$\ln 1000$:	$\boxed{\ln}$	1000	$\boxed{=}$

Svarene er naturligvis:

$$\log 1000 = 3 \qquad \text{og} \qquad \ln 1000 \approx 6{,}90776$$

Øvelse: Tegn i samme koordinatsystem kurverne:

$$y = \log x \qquad \text{og} \qquad y = \ln x$$

Hvor skar dine grafer x-aksen og y-aksen?

Du observerer forhåbentlig, at begge logaritmefunktioner skærer x-aksen i punktet $(1,0)$, samt at ingen af graferne skærer y-aksen - man kan nemlig ikke tage logaritmen til 0!
Man kan også se, at punktet $(e,1)$ ligger på grafen for den naturlige logaritme, og at punktet $(10,1)$ ligger på grafen for titalslogaritmen. Det er nemlig, hvad nedenstående sætning udtaler sig om.

Sætning 18 (FS)

$$\log_a(1) = 0 \quad \text{og} \quad \log_a(a) = 1$$

Bevis:

$$\log_a(1) = \log_a(a^0) = 0$$

og

$$\log_a(a) = \log_a(a^1) = 1$$

Øvelse:

Lad os checke nogle egenskaber ved logaritmefunktionen.

Udfyld alle kolonner i hvert af nedenstående skemaer. Det kræver en lommeregner. Husk at på lommeregneren giver tasten log 10-talslogaritmen.

A:

x	y	$x \cdot y$	$\log(x \cdot y)$	$\log(x)$	$\log(y)$	$\log(x)+\log(y)$
2	50	100	2	0,3010	1,6990	2
15	30					
75	13					
5	40					

B:

x	y	x/y	log(x/y)	log(x)	log(y)	log(x)-log(y)
50	2	25	2	1,6990	0,3010	2
30	10					
75	5					
92	23					

Hvilke observationer kan du drage af disse to skemaer?

Du skulle meget gerne have draget observationer svarende til nedenstående sætning:

Sætning 19 (FS)

a) $\log_a(x\cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

b) $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$

Bevis:

a) $\log_a(x\cdot y) = \log_a(a^{\log_a(x)}\cdot a^{\log_a(y)}) = \log_a(a^{\log_a(x)+\log_a(y)}) =$
$\log_a(x) + \log_a(y)$

b) $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(\frac{a^{\log_a(x)}}{a^{\log_a(y)}}) = \log_a(a^{\log_a(x)-\log_a(y)}) = \log_a(x) - \log_a(y)$

Her brugte vi sætning 17 hele to gange i hvert bevis.

Der findes flere logaritmeregler, som alle i virkeligheden svarer til en potensregneregel.

Sætning 20 (FS)

a) $\log_a(x^y) = y\cdot\log_a(x)$

b) $\log_a(\sqrt[y]{x}) = \frac{1}{y}\cdot\log_a(x)$

Bevis:

a) $\log_a(x^y) = \log_a((a^{\log_a(x)})^y) = \log_a(a^{\log_a(x)\cdot y}) = y\cdot\log_a(x)$

b) $\log_a(\sqrt[y]{x}) = \log_a(x^{1/y}) = \frac{1}{y}\cdot\log_a(x)$

Umiddelbart kan man synes, at det er et problem, at lommeregneren kun kan regne med to slags logaritmer, 10-tals-logaritmen og den naturlige logaritme. Hvad nu, hvis man skal beregne $\log_4(62)$?

Af nedenstående sætning får vi, at det er nok at kunne udregne titalslogaritmen, for så kan man udregne alle andre logaritmer.

Sætning 21 (FS)

a) $\log_a(x) = \dfrac{\log(x)}{\log(a)}$

b) $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

Bevis:

a) $\log(x) = \log(a^{\log_a(x)}) = \log_a(x) \cdot \log(a)$ ifølge sætning 20.
Divideres med $\log(a)$ på begge sider af ligningen, så fås sætningen.

b) bevises på samme måde.

Eksempel

Udregn: $\log_2(128)$

Svar: $\log_2(128) = \dfrac{\log(128)}{\log(2)} \approx \dfrac{2{,}10720997}{0{,}301029996} = 7$

Vi kan nu endelig løse ligninger af typen $a^x = b$:

Eksempel

Givet: $2^x = 98$

Find: x

Svar:

$$2^x = 98$$
$$\Updownarrow$$
$$\log(2^x) = 98$$
$$\Updownarrow$$
$$x \cdot \log(2) = \log(98)$$
$$\Updownarrow$$
$$x = \frac{\log(98)}{\log(2)} \approx 6{,}615$$

Eksempel

Hvornår er der 10 milliarder mennesker på Jorden?

Vi kan nu endelig **beregne**, hvornår dette sker. Ifølge forsiden er Jordens befolkningstal y givet ved den eksponentielle udvikling

$$y = 4{,}7 \cdot 1{,}018^x$$

hvor x er antal år efter 1984.

Vi sætter y lig 10 og løser den herved fremkomne ligning

$$4{,}7 \cdot 1{,}018^x = 10$$
$$\Updownarrow$$
$$1{,}018^x = \frac{10}{4{,}7}$$
$$\Updownarrow$$
$$x \log(1{,}018) = \log(10/4{,}7)$$
$$\Updownarrow$$

$$x = \frac{\log(10/4,7)}{\log(1,018)} \approx 42,32$$

Dvs. engang i år $1984+42=2026$ vil Jordens befolkning være på 10 milliarder.

Opgaver

1.L Reducér nedenstående uden brug af lommeregner:

a) $\log(a^3)+\log(a^2)-3\log(a)$

b) $\log(x^4)+\log(x^3)-\log(x^{-2})+\log(x)$

c) $\ln(p^q)-\ln(p^{2q})+q\ln p+\ln p$

d) $\log(\frac{3^2\cdot 2^4}{8})-\log 9+\log 32$

e) $\log 26-\log 3+\log 2-\log 39+\log 25$

f) $\ln(e^2)-2\ln e+3\ln 10-\ln 100$

g) $\log(125)-\log(25)$

2.L Reducér

a) $\log\sqrt{8}-\log\sqrt{2}$

b) $\log\sqrt[3]{16}-\frac{1}{3}\log 2$

c) $\log\sqrt{1}-\log\sqrt{25}$

d) $\log\sqrt{4a^2}-\log a+\log 2$

e) $\log 2+\log\sqrt{2}-\log\frac{1}{\sqrt{2}}$

f) $\ln 6-\ln\sqrt{6}+\ln\sqrt[4]{6}+\ln\sqrt[3]{36}$

g) $\log 16+\log 9-\log(16+9)$

h) $\log(x^n)-\log(x^{-n})$

i) $\ln 100-\ln 25+\ln 16-\ln 36+\ln(8^3)$

j) $(\ln e)^4-\ln(e^4)$

3.L Latinamerikas befolkning var i 1950 på 162 millioner og i 1970 på 246 millioner. Dette befolkningstal vokser eksponentielt.

a) Opskriv en forskrift, som angiver Latinamerikas befolkning som funktion af antal år efter 1950.

b) Hvornår vil der være 1000 millioner mennesker i Latinamerika?

4.L Sammenhængen mellem intensiteten I (målt i $\mathrm{W/m^2}$) og lydstyrken L (målt i dB) for en lydbølge er givet ved

$$L = 10\cdot\log I + 120$$

a) Hvilken lydstyrke svarer til en intensitet på 0,001 W/m^2?
b) Hvilken intensitet svarer en lydstyrke på 120 dB til?
c) Med hvor meget vokser lydstyrken, hvis intensiteten fordobles?

5.L Løs nedenstående ligninger:

a) $(\ln x)^2 = 4$ b) $\log\sqrt{x} = \log x + \frac{1}{2}$

c) $\log x^2 - \log x = 1$ d) $(\log x)^2 - \log x = 1$

4.5 Fordoblings og halveringskonstant

Indenfor de eksponentielle udviklinger er det meget vigtigt at vide, hvor lang tid det tager, før funktionsværdien er halveret eller fordoblet.

Eksempel

Hr. H.Ansen opdrætter fisk. Han har dags dato 15000, og undersøgelser viser, at antallet vokser med 2 % om dagen. De yngler jo godt - de små pus.

Efter 1 dag har han	$15000 \cdot 1,02^1 = 15300$ fisk
Efter 2 dage har han	$15000 \cdot 1,02^2 = 15606$ fisk
Efter x dage har han	$f(x) = 15000 \cdot 1,02^x$ fisk

Hvornår mon han har **dobbelt** så mange fisk - altså omkring 30000 fisk?
Lad os prøve med 35 dage:

Efter 35 dage har han $15000 \cdot 1,02^{35} = 29998$ fisk

Den tid der går indtil han får **dobbelt** så mange fisk kalder vi *fordoblingskonstanten*, T_2. I dette tilfælde er $T_2 = 35$. Da det selvfølgelig er utilfredsstillende at prøve sig frem, så vil vi finde en formel, der kan udregne T_2.

Men først en mere generel definition.

Definition 22 (FS)

Fordoblingskonstanten T_2 for en eksponentielt voksende udvikling er den x-tilvækst, der giver en fordobling af funktionsværdien : $f(x+T_2) = 2f(x)$
Halveringskonstanten $T_{1/2}$ for en eksponentielt aftagende udvikling er den x-tilvækst, der giver en halvering af funktionsværdien : $g(x+T_{1/2}) = \frac{1}{2}g(x)$

Vi husker på, at den eksponentielle udvikling $f(x) = b \cdot a^x$ er

voksende netop hvis $a > 1$
aftagende netop hvis $0 < a < 1$

Sætning 23 (FS)

Lad den eksponentielle udvikling *f* være givet ved

$$f(x) = b \cdot a^x$$

a) Hvis *f* er voksende, så er fordoblingskonstanten givet ved

$$T_2 = \frac{\log 2}{\log a}$$

b) Hvis *f* er aftagende, så er halveringskonstanten givet ved

$$T_{1/2} = \frac{\log(0,5)}{\log a}$$

Bevis:

a) Ifølge definitionen af T_2 gælder, at hvis $f(x) = y$, så $f(x + T_2) = 2y$.

Vi dividerer de to ligninger med hinanden og får

$$\frac{f(x+T_2)}{f(x)} = \frac{2y}{y}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{b \cdot a^{x+T_2}}{b \cdot a^x} = 2$$

$$\Updownarrow$$

$$a^{x+T_2-x} = 2$$

$$\Updownarrow$$

$$a^{T_2} = 2$$

$$\Updownarrow$$

$$T_2 \cdot \log(a) = \log(2)$$

$$\Updownarrow$$

$$T_2 = \frac{\log 2}{\log a}$$

b) bevises på samme måde.

Eksempel

Fra forrige eksempel havde vi fiskeforskriften:

$$f(x) = 15000 \cdot 1,02^x$$

Dette er en eksponentiel udvikling med grundtal $a = 1,02$.
Vi finder fordoblingskonstanten ved ovenstående sætning.

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(1,02)} \approx 35,00$$

Bemærk, at vi skulle kun vide, hvad grundtallet a var for at kunne finde fordoblingskonstanten. Og grundtallet a kan vi jo finde, bare vi kender vækstraten r.

Eksempel

Doggerbanken giver 6% i rente om året. Hvis Hr. H. Ansen sætter penge ind på en konto, hvornår er kontosummen fordoblet?

Det fås let af sætning 23 efter en udregning af grundtallet:

$$a = 1 + r = 1 + 6\% = 1 + 0,06 = 1,06$$
$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(1,06)} \approx 11,90$$

Der går altså næsten 12 år før kontosummen er fordoblet.

Eksempel

I Lakskøbing amt **falder** arbejdsløsheden med 3% årligt. Hvornår er arbejdsløsheden halveret?

Det følger igen let ved brug af sætning 23, men først skal grundtallet udregnes

$$a = 1 + r = 1 + (-0,03) = 0,97$$
$$T_{1/2} = \frac{\log(0,5)}{\log(0,97)} \approx 22,76$$

Så efter kun 23 år vil arbejdsløsheden i Lakskøbing amt være halveret.

Opgaver

1.L Find for nedenstående eksponentielle udviklinger fordoblingskonstanten, hvis der er tale om en voksende funktion, og halveringskonstanten, hvis der er tale om en aftagende funktion:

a) $f(x) = 3 \cdot 1,3^x$ b) $f(x) = 0,97 \cdot 25,9^x$

c) $f(x) = 1,12 \cdot 0,9^x$ d) $f(x) = 0,9 \cdot 1,12^x$

e) $f(x) = 3,26 \cdot 1,001^x$ f) $f(x) = 3,26 \cdot 0,998^x$

2.M Radioaktive stoffer henfalder eksponentielt - hermed menes, at hvis $f(t)$ angiver mængden af et radioaktivt stof til tiden t, så er f en eksponentiel udvikling.
Denne funktion f kan skrive på flere måder:

$$f(t) = b \cdot a^t \qquad \text{eller} \qquad f(t) = N_0 \cdot e^{-kt}$$

- den første skrivemåde foretrækkes at matematikere, mens fysikerne hælder mere til den anden.

a) Vis, at de to skrivemåder faktisk er den samme, hvis blot

$$b = N_0 \qquad \text{og} \qquad k = -\ln a$$

b) Vis, at halveringstiden er givet ved

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$$

3.L En eksponentiel udvikling f har halveringskonstanten 2,31 og opfylder, at $f(1{,}4) = 2{,}6$. Bestem en forskrift for f.

4.L En eksponentiel udvikling g har fordoblingskonstanten 1,1 og opfylder $g(4) = 4$. Bestem en forskrift for g.

5.L En eksponentiel udvikling h opfylder, at $h(8) = 10$ og $h(12) = 40$. Bestem, kun ved hovedregning, fordoblingskonstanten for h.

6.L Den eksponentielle udvkling k opfylder, at

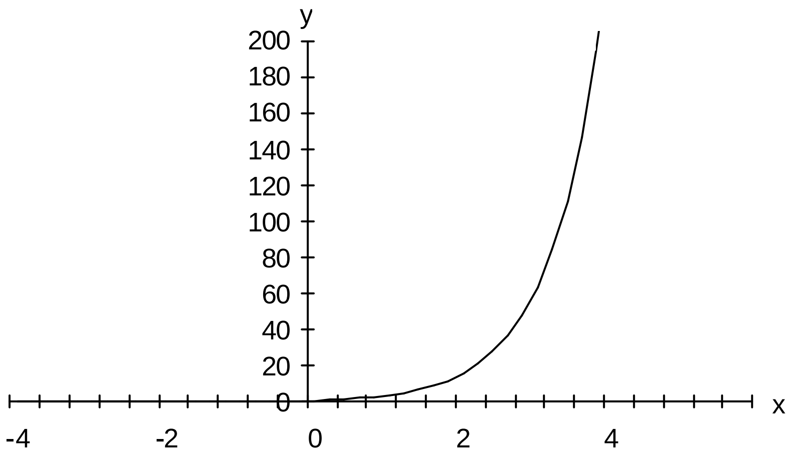
$$k(x+6) = 8 \cdot k(x)$$

uanset x's værdi. Bestem fordoblingskonstanten for k ved hovedregning.

4.6 Enkeltlogaritmisk koordinatsystem

Betragt grafen for den eksponentielle udvikling f givet ved $f(x) = 1{,}5 \cdot 4^x$

x	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2	3	3,5
y	0,094	0,375	1,5	3	6	12	24	96	192



Grafen vokser ret hurtigt, så den er svær at tegne. Endvidere det er svært at se, om det rent faktisk er en graf for en eksponentiel udvikling. Her kan logaritmer være behjælpelige til at lave grafen om til en ret linie:

$$y = 1{,}5 \cdot 4^x$$

$$\Updownarrow$$

$$\log(y) = \log(1{,}5 \cdot 4^x)$$

$$\Updownarrow$$

$$\log(y) = \log(1{,}5) + \log(4^x)$$

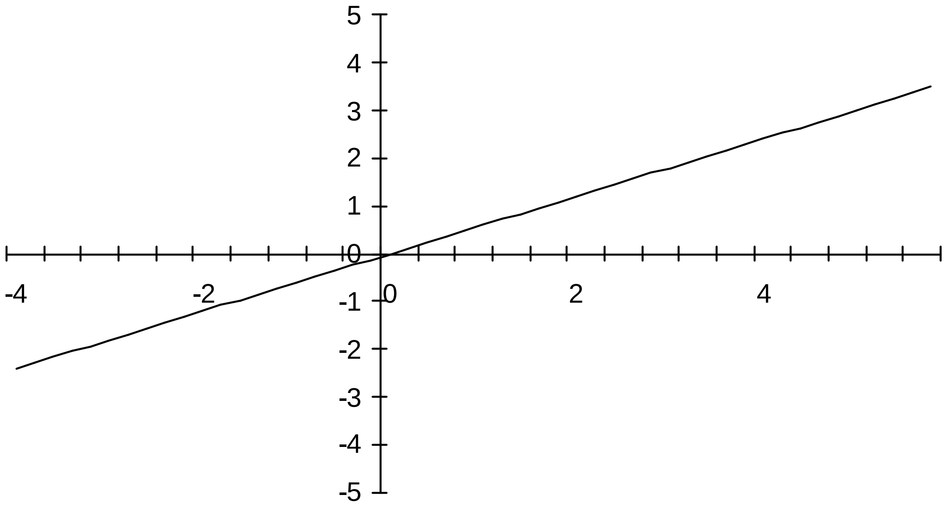
$$\Updownarrow$$

$$\log(y) = \log(4) \cdot x + \log(1{,}5)$$

Det lader til, at $\log(y)$ er en lineær funktion af x, med hældningen log(4) og konstantleddet log(1,5).

Lad os undersøge dette nærmere ved at checke om det nu også er en ret linie i et koordinatsystem. Først laver vi som altid et støttepunktsskema, men hvor vi i stedet for y beregner $\log(y)$

x	-2	-1	0	0,5	1	1,5	2	3	3,5
$\log(y)$	-1,03	-0,43	0,17	0,48	0,78	1,08	1,38	1,98	2,28



Det var en ret linie!

Faktisk gælder der følgende sætning

Sætning 24 (LS)

a) Lad f være en eksponentiel udvikling; $f(x) = b \cdot a^x$. Så ligger punkterne $(x, \log(f(x))$ på en ret linie.

b) Lad f være en funktion, således at punkterne $(x, \log(f(x))$ ligger på en ret linie. Så er f en eksponentiel udviking.

Bemærk, at udsagnet b) er det omvendte udsagn til a)

Bevis:

a)
$$f(x) = b \cdot a^x$$
$$\Updownarrow$$
$$\log(f(x)) = \log(a^x) + \log(b)$$
$$\Updownarrow$$
$$\log(f(x)) = \log(a) \cdot x + \log(b)$$

Dette er jo ligningen for en ret linie, hvor hældningen er $\log(a)$ og skæringen med x-aksen er $\log(b)$.

b) Hvis alle punkterne $(x, \log(f(x))$ ligger på en ret linie, så findes der tal α og β, således at
$$\log(f(x)) = \alpha \cdot x + \beta$$
$$\Updownarrow$$
$$f(x) = 10^{\alpha \cdot x + b}$$

$$f(x) = (10^{\alpha})^{x} \cdot 10^{\beta}$$

Sætter vi

$$a = 10^{\alpha} \qquad \text{og} \qquad b = 10^{\beta}$$

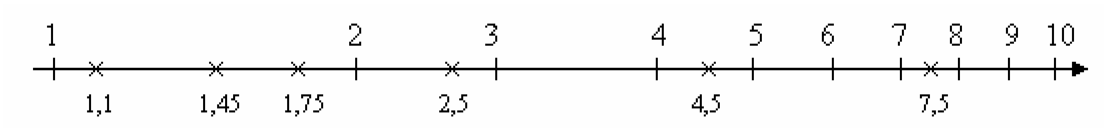
så fås

$$f(x) = b \cdot a^{x}$$

og dette er jo forskriften for en eksponentiel udvikling.

Sætningen kan altså bruges til at finde ud af om en række af punkter (observationer) kommer fra en eksponentiel udvikling.

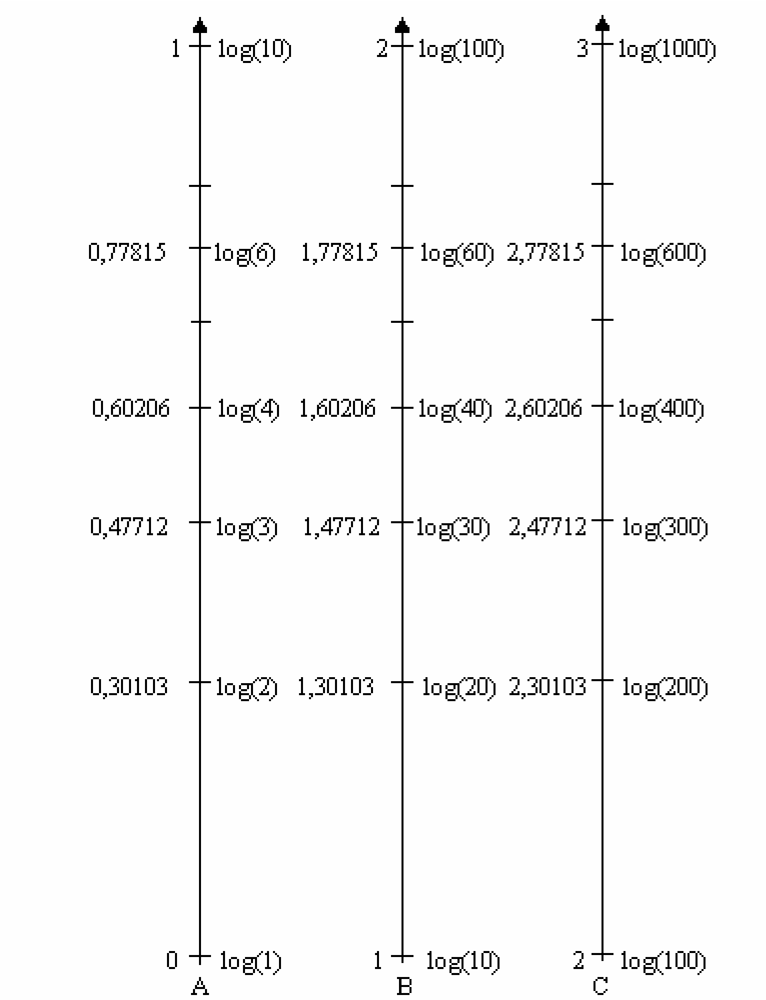
Nu er det ret bøvlet at skulle udregne log(y) til en række punkter. Det afhjælper vi ved at lave y-aksen om til en log(y)-akse. Gør man det, får man et **e**nkelt**l**ogaritmisk **k**oordinatsystem (**elk**). Enkeltlogaritmisk, da det kun er den ene akse, som er logaritmisk.



En dekade af en sådan logaritmisk akse er vist ovenfor. (En *dekade* er et interval, som strækker sig fra f.eks. 1 til 10, 10 til 100, 100 til 1000, eller måske fra 0,001 til 0,01).

Det specielle ved sådanne koordinatsystemer ligger i, at man nu kan afsætte sammenhørende værdier af x og y **direkte** som et punkt, uden først at skulle tage en masse logaritmer. Desuden findes de fortrykt med tre dekader på enkeltlogaritmisk papir, som alle skoler har.

Nu kan man jo undre sig lidt over y-aksen. Hvorfor ser en logaritmisk skala så underlig ud? Betragt nedenstående 3 par af koordinatakser.



Lidt forklaring er vist påkrævet. Se først på par A:

Ud for **0** på venstre akse står **log(1)** på højre akse
Ud for **0.30103** på venstre akse står **log(2)** på højre akse
Ud for **0.47712** på venstre akse står **log(3)** på højre akse
Ud for **0.60206** på venstre akse står **log(4)** på højre akse
Ud for **0.77815** på venstre akse står **log(6)** på højre akse
Ud for **1** på venstre akse står **log(10)** på højre akse

Det betyder, at på højre akse er det **ikke** tallene selv, men logaritmerne til tallene der er indtegnet! Det kan du checke ved at udregne log(1)...log(10). Læg mærke til de specielle mellemrum som opstår på højre akse!

Betragt nu par B:

Ud for **1** på venstre akse står **log(10)** på højre akse
Ud for **1.30103** på venstre akse står **log(20)** på højre akse

Ud for **1.47712**	på venstre akse står	**log(30)**	på højre akse
Ud for **1.60206**	på venstre akse står	**log(40)**	på højre akse
Ud for **1.77815**	på venstre akse står	**log(60)**	på højre akse
Ud for **2**	på venstre akse står	**log(100)**	på højre akse

Bemærk, at nu betragter vi intervallet fra 10 til 100. På højre akse er logaritmerne indtegnet, og på venstre akse de rigtige tal. Sammenligner vi med forrige par, opdager vi, at der er præcis de **samme mellemrum**, og at de rigtige tal **kun** adskiller sig ved, at der er lagt 1 til alle tal!

Betragtes par C kan en tilsvarende observation bruges, sådan at man faktisk er i stand til at afsætte tallene fra **100 til 1000 på samme akse.**

Efter at have lavet tilstrækkeligt med den slags akser vil den dovne, men intelligente matematiker drage den konklusion, at **alle logarimeakse**r faktisk er **ens bortset fra en forskydning på 1**, hver gang tallene man afsætter stiger med en 10-potens. Han gider derfor ikke lave dette arbejde hver gang, men ringer til lærernes indkøbscentral og bestiller 500 stykker logaritmepapir!

For en ordens skyld vil han selvfølgelig eftervise denne observation, før han tager den for gode varer. Altså:

$$\begin{aligned}
&\log(10)-\log(1) &&= 1-0 &&= 1\\
&\log(100)-\log(10) &&= 2-1 &&= 1\\
&\log(1000)-\log(100) &&= 3-2 &&= 1\\
&\quad\ldots\\
&\log(10^n)-\log(10^{n-1}) &&= n-(n-1) &&= 1
\end{aligned}$$

På den dekade af et logaritmepapir, som vi så før, er angivet, hvordan man afsætter punkter. Som det ses, gøres det ved at indsætte punkterne direkte

Eksempel

Givet: Udviklingen de sociale og sundhedsmæssige udgifter i perioden 1960-1973:

Årstal	1960	1965	1970	1971	1972	1973
Udgifter (mill. kr)	4356	8660	21330	25359	29391	33332

Kan ovenstående beskrives ved en eksponentiel udvikling?

Svar: Afsæt punkter direkte i et ELK. (Se næste side)

Ja, da punkterne **tilnærmelsesvis** ligger på en ret linie i et **elk f**ølger de **tilnærmelsesvis** en eksponentiel udvikling.

Find: Forskriften for den eksponentielle udvikling.

Svar: En eksponentiel udvikling er givet ved forskriften $f(x) = b \cdot a^x$, hvor vi skal finde *a* og *b*. (*x* er antal år efter 1960).

1 Find to punkter **på** linien ved aflæsning:

$(x_1 \, , \, y_1) \;= (1963{,}7000) \;= (3{,}7000)$

$(x_2 \, , \, y_2) \;= (1969{,}18000) \;= (9{,}18000)$

2 $a = \sqrt[x_2 - x_1]{\dfrac{y_2}{y_1}} = \sqrt[9-3]{\dfrac{18000}{7000}} \approx 1{,}1705$

$b = \dfrac{y_1}{a^{x_1}} = \dfrac{7000}{a^3} \approx 4365$

3 Forskriften er da givet ved $f(x) = 4365 \cdot 1{,}1705^x$

Find: Giv en prognose for udgiften i 1980, hvis udviklingen fortsætter.

Svar: Indsæt årstallet 1980 i forskriften.

$$x = 1980 - 1960 = 20$$
$$f(20) = 4365 \cdot 1{,}1705^{20} \approx 101721$$

I år 1980 må man altså forvente, at de social- og sundhedsmæssige udgifter bliver på ca. 101721 mill. kr.

Find: Fordoblingskonstanten T_2

Svar: Det kan gøres på to måder:

1) Aflæs to punkter, hvor den enes y-værdi er dobbelt så stor som den anden. f.eks.

$$(x_1\ ,\ y_1) = (1963{,}9{,}8000) = (3{,}9{,}8000)$$
$$(x_2\ ,\ y_2) = (1968{,}3{,}16000) = (8{,}3{,}16000)$$
$$T_2 = x_2 - x_1 = 8{,}3 - 3{,}9 = 4{,}4$$

2) Brug formlen for T_2:

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)} = \frac{\log(2)}{\log(1{,}1705)} \approx 4{,}4$$

Opgaver

1.L Tag et almindeligt stykke enkeltlogaritmisk papir og inddel y-aksen, således at den går fra 0,1 til 100. Inddel x-aksen, så den går fra -5 til 13 - dvs.1 cm pr. enhed.

Indtegn nedenstående punkter:

$A = (-3\,;\,0{,}4)$	$B = (-1\,;\,1{,}4)$	$C = (0{,}1\,;\,0{,}25)$
$D = (1{,}4\,;\,0{,}5)$	$E = (3{,}8\,;\,0{,}17)$	$F = (6\,;\,0{,}6)$
$G = (0\,;\,3)$	$H = (7\,;\,1{,}1)$	$I = (9\,;\,4)$
$J = (2\,;\,15)$	$K = (6{,}2\,;\,9)$	$L = (9{,}5\,;\,5{,}8)$
$M = (3{,}4\,;\,48)$	$N = (11\,;\,16)$	

Indtegn derefter liniestykkerne *AB, AC, CD, CE, EF, GH, HI, JK, KL, KM* og *KN*.

Hvis du har gjort ovenstående rigtigt, så skulle liniestykkerne danne et ord. Hvilket?

2.L Prisen i øre på cigaren *Lille Aroma* i perioden 1970-1977 er angivet nedenfor:

År	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
Pris	58,5	62,0	64,5	69,0	72,0	76,0	80,0	87,0

a) Gør rede for, at cigar-prisen tilnærmelsesvist vokser eksponentielt med tiden.
b) Find en forskrift for denne eksponentielle udvikling.
c) Hvor meget koster mon en cigar i 1994?
d) Bestem, hvor lang tid der går, før cigarprisen fordobles.

3.L Antallet af ansøgere til sygeplejerskolen i Hillerød er angivet i tabellen:

År	1984	1985	1986	1987	1988
Antal	564	465	373	303	257

a) Undersøg, om talmaterialet bedst følger en lineær eller en eksponentiel udvikling.
b) Giv en prognose for antallet af ansøgere i 1989.

4.L FInd forskriften for funktionerne f, g og h, hvis grafer er vist nedenfor.

4.7 Potentiel udvikling

Vi vil nu betragte potens-funktioner og potentielle udviklinger.

> **Definition 25 (FS)**
>
> Lad f have forskriften
>
> $$f(x) = x^a \qquad x > 0$$
>
> f kaldes en *potensfunktion* med eksponenten a

> **Definition 26 (FS)**
>
> Lad f have forskriften
>
> $$f(x) = b \cdot x^a \qquad x > 0$$
>
> f kaldes en potentiel udvikling med eksponent a

Eksempel

Hvis du har kørekort, så ved du forhåbentligt, at jo hurtigere en bil kører, jo længere er bremselængden. Sammenhængen er faktisk

$$B = B_1 \cdot v^2$$

hvor v er hastigheden og B er bremselængden.

Dette er en potentiel udvikling, og idet eksponenten er 2, så kan man faktisk se, at hvis hastigheden fordobles, så firdobles bremselængden ($2^2 = 4$).

Vi vil i det følgende finde formler og lignende, som kan hjælpe med at behandle potentielle udviklinger. Nogle af sætningerne minder faktisk om tilsvarende sætninger for eksponentielle udviklinger.

Sætning 27 (FS)

Lad f være en potentiel udvikling: $f(x) = b \cdot x^a$

Lad $f(x_1) = y_1$ og $f(x_2) = y_2$

Så findes a og b ved:

$$a = \frac{\log y_2 - \log y_2}{\log x_2 - \log x_1}$$

$$b = \frac{y_1}{x_1{}^a}$$

Bevis:

Vi starter med at finde formlen for a:

$$f(x_1) = y_1 \quad \text{og} \quad f(x_2) = y_2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$bx_1{}^a = y_1 \quad \text{og} \quad bx_2{}^a = y_2$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{bx_2{}^a}{bx_1{}^a} = \frac{y_2}{y_1}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a = \frac{y_2}{y_1}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a = \frac{\log(\frac{y_2}{y_1})}{\log(\frac{x_2}{x_1})} = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1}$$

Formlen for b er meget lettere:

$$bx_1{}^a = y_1 \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{y_1}{x_1{}^a}$$

Eksempel

Givet: f er en potentiel udvikling opfyldende

$$f(4) = 35 \quad \text{og} \quad f(8) = 100$$

Find: Forskriften for f

Svar: Af ovenstående sætning får vi

$$a = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1} = \frac{\log 100 - \log 35}{\log 8 - \log 4} \approx 1{,}514$$

og

$$b = \frac{y_1}{{x_1}^a} = \frac{35}{4^{1{,}514}} \approx 4{,}288$$

Forskriften er altså

$$f(x) = 4{,}288 \cdot x^{1{,}514}.$$

Hvor eksponentielle udviklinger gav rette linier på **enkeltlogaritmisk papir**, så giver potentielle udviklinger rette linier på **dobbeltlogaritmisk papir**:

Et **do**bbelt**l**ogaritmisk **k**oordinatsystem (DOLK) er et koordinatsystem, hvori begge akserne er logaritmiske.

Sætning 28 (FS)

Funktionen *f* er en potentiel udvikling

$\Updownarrow$

Grafen for *f* er en ret linie i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem

Bevis:

Vi ser ved at tage logaritmer, at

$$y = b \cdot x^a$$

$$\Updownarrow$$

$$\log(y) = \log(b) + a\log(x)$$

Dette beviser sætningen begge veje:

Hvis *f* er en potentiel udvikling, så ligger punkterne $(\log(x), \log(y))$ på en ret linie med hældning a og skæring $\log(b)$

Omvendt, hvis punkterne $(\log(x), \log(y))$ ligger på en ret linie, så er der tale om en potentiel udvikling.

Eksempel

I tabellen nedenfor er angivet omløbstiden T og afstanden R til Saturn for nogle af Saturns måner. (T er målt i døgn og R i Saturn-radier).

Måne	T	R
Enceladus	1,37	3,9
Tethys	1,89	4,9
Dione	2,74	6,2
Rhea	4,52	9,7
Titan	15,95	20,2
Hyperion	21,28	24,5
Iapetus	79,33	58,9

Kan ovenstående beskrives ved en potentiel udvikling?

Ja, plotter man T ad x-aksen og R ad y-aksen i et DOLK, så får man en ret linie. (Se næste side).

Forskriften for den potentielle udvikling findes:
Punkterne $(x_1, y_1) = (2\,; 5{,}4)$ og $(x_2, y_2) = (15\,; 20)$ aflæses på selve linien. Sætning 27 fortæller nu, at

$$a = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1} = \frac{\log 20 - \log 5{,}4}{\log 15 - \log 2} \approx 0{,}6498$$

og

$$b = \frac{y_1}{x_1{}^a} = \frac{5{,}4}{2^{0{,}6498}} \approx 3{,}442$$

Ergo er sammenhængen mellem T og R givet ved

$$R = 3{,}442 \cdot T^{0{,}6498}$$

Givet: Saturn-månen Phoebe har omløbstiden 550,5 døgn.

Find: Afstanden fra Phoebe til Saturn.

Svar: Vi indsætter $T = 550{,}5$ i ovenstående sammenhæng og får

$$R = 3{,}442 \cdot 550{,}5^{0{,}6498} \approx 207{,}9$$

Phoebe befinder sig altså ca. 207,9 Saturn-radier fra Saturn.

Opgaver

1.L Tag et stykke DOLK-papir, og inddel x-aksen i dekaderne 1 - 10 - 100 og y-aksen i dekaderne 0,1 - 1 - 10 - 100.

Indtegn derefter punkterne

$A=(2\,;22)$	$B=(5\,;40)$	$C=(10\,;66)$
$D=(3{,}2\,;11)$	$E=(7{,}8\,;19)$	$F=(18\,;36)$
$G=(3{,}8\,;7)$	$H=(10\,;13)$	$I=(24\,;22)$
$J=(9\,;2)$	$K=(16\,;6{,}8)$	$L=(42\,;9)$
$M=(56\,;5{,}6)$	$N=(95\,;2{,}4)$	$P=(18\,;0{,}8)$
$Q=(11\,;1{,}1)$	$R=(11\,;1{,}9)$	

Indtegn endelig liniestykkerne *AB*, *BC*, *BE*, *DE*, *EF*, *GH*, *HI*, *GJ*, *HK*, *IL*, *MN*, *NP*, *PQ* og *QR*.

Herved dannes der et ord - hvilket?

2.L Hvilke af nedenstående funktioner har en graf, som er en ret linie i

a) et almindeligt koordinatsystem?
b) et enkeltlogaritmisk koordinatsystem?
c) et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem?

$f(x)=x^3$	$g(x)=3x-4$	$h(x)=\sqrt{x}$
$i(x)=2\cdot 7^x$	$j(x)=\dfrac{5}{3^x}$	$k(x)=\dfrac{5}{\sqrt[3]{x}}$
$l(x)=\sqrt{x}-4$	$m(x)=5$	$n(x)=2x\sqrt{x}$

(For alle funktioner gælder det, at $x>0$).

3.L Tabellen nedenfor viser nogle funktionsværdier for en funktion *f*:

x	0,2	0,5	3	7	8
$f(x)$	2,7	4	7,9	11	12

Gør rede for, at f tilnærmelsesvist er en potentiel udvikling, og find en forskrift for *f*.

4.M Lav en tabel, som sammenligner de forskellige egenskaber og formler for lineære funktioner, eksponentielle og potentielle udviklinger. Tabellen skal indeholde forskrifterne, informationer om funktionernes grafer, formler til bestemmelse af a og b samt oplysninger om, hvornår funktionen er voksende eller aftagende.

5.M En størrelse kan vokse på to forskellige måder: *plusvækst* og *gangevækst*. Der er tale om plusvækst, når en størrelse vokser ved at man adderer størrelsen med noget, mens der er tale om gangevækst, når man ganger størrelsen med noget.

a) Lad y afhænge lineært af x, dvs. der findes tal a og b, således at

$$y = ax + b$$

Vis, at hvis x vokser med plusvækst, så vokser y også med plusvækst.

b) Lad y afhænge eksponentielt af x, dvs. $y = ba^x$.
Vis, at hvis x vokser med plusvækst, så vokser y med gangevækst.

c) Lad y afhænge potentielt af x, dvs. $y = bx^a$.
Vis, at hvis x vokser med gangevækst, så vokser y med gangevækst.

6.M En *logaritmisk udvikling* er en funktion f af formen

$$f(x) = a \cdot \log x + b$$

a) Vis, at enhver logaritmefunktion er en logaritmisk udvikling med $b = 0$.

b) Vis, at en logaritmisk udvikling laver gangevækst til plusvækst.

c) Bevis følgende:
Hvis f er en logaritmisk udvikling: $f(x) = a\log x + b$, og antag, at $f(x_1) = y_1$ og $f(x_2) = y_2$, så gælder, at

$$a = \frac{y_2 - y_1}{\log x_2 - \log x_1}$$

og

$$b = y_1 - a\log x_1$$

d) Bevis, at grafen for en funktion f er en ret linie i et omvendt enkeltlogaritmisk koordinatsystem, hvis og kun hvis f er en logaritmisk udvikling.
(Et *omvendt enkeltlogaritmisk koordinatsystem* er et koordinatsystem med logaritmisk x-akse og almindelig y-akse.)

7.L Nedenfor er vist graferne for funktionerne f, g og h. Bestem en forskrft for disse funktioner.

4.8 Blandede opgaver

1.M En eksponentielt voksende størrelse forøges med 50% på 13 år.

a) Bestem fordoblingstiden.

b) Bestem den procentvise forøgelse over 26 år.

2.M Om en eksponentielt aftagende funktion f oplyses, at $f(2) = 80$, og at $f(x)$ bliver 20% mindre, når x øges med 3.

a) Tegn grafen for f i et ELK.

b) Bestem halveringskonstanten for f.

3.M Nedenfor er vist graferne for de eksponentielle udviklinger f, g, h og i. Bestem forskrifterne for disse fire funktioner.

4.M For en eksponentiel udvikling *f* gælder det, at funktionsværdien $f(x)$ øges med 70%, når *x* får en tilvækst på 10.
Bestem fordoblingstiden.

5.M Nedenfor er vist grafen for en *stykkevis eksponentiel udvikling*. Bestem forskriften.

6.M En eksponentielt aftagende funktion har forskriften $f(x) = b \cdot a^x$.

a) Beregn a og b, når det oplyses, at $f(-2) = 11$ og $f(17) = 0{,}9$.

b) Bestem halveringskonstanten for *f* med 2 decimaler.

7.M Om en eksponentielt voksende funktion f oplyses det, at $f(-1)=3$, og at fordoblingskonstanten er 7.

a) Tegn grafen for f i et ELK.

b) Bestem $f(27)$

8.M I et ELK er givet punkterne $A=(-2;3)$, $B=(6;16)$ og $C=(12;10)$. Den rette linie gennem A og B er grafen for en eksponentielt voksende funktion f.

a) Bestem fordoblingskonstanten for f.

Den rette linie gennem B og C er grafen for en eksponentielt aftagende funktion g.

b) Bestem halveringskonstanten for g.

9.M Bestem løsningen (2 dec.) til ligningen

$$2,7\cdot 0,81^x = 1,1$$

10.M Om en eksponentielt voksende funktion f gælder, at

$$f(1)=2 \qquad \text{og} \qquad f(4)=12$$

a) Bestem $f(7)$ og $f(-2)$.

b) Bestem fordoblingskonstanten for f.

11.M I *Tidsskrift for Landøkonomi* nr. 2, 1986, kan man læse, at afvandringen fra landbruget indenfor den sidste halve snes år har våret på 4% om året.

a) Bestem den procentvise afvandring pr. tiår.

b) Bestem halveringstiden for antallet af beskæftigede ved landbruget svarende til en afvandring på 4% om året.

12.M Når man dyrker idræt i bjergene, kan den tynde luft være et problem, idet luftens indhold af ilt aftager med højden. Luftens indhold af ilt kan måles ved ilttrykket. Tabellen viser sammenhængen mellem ilttryk og højde over havoverfladen. Højden er angivet i meter, ilttrykket i mmHg.

Højde	0	500	1000	1500	2000	2500	3000
Ilttryk	150	140	131	123	115	107	100

a) Gør rede for, at illtrykket tilnærmelsesvist er en eksponentielt aftagende funktion af højden over havoverfladen.

b) Bestem ilttrykket i højden 2350 m over havoverfladen.

c) Bestem den højde, i hvilket ilttrykket er halvt så stort som ved havoverfladen.

13.M En eksponentielt voksende funktion f med fordoblingskonstanten 5 opfylder, at $f(-2)=3$.

a) Bestem $f(3)$ og $f(10)$

b) Løs ligningen $f(x)=20$

14.M En potentiel udvikling f opfylder, at

$$f(2)=8 \qquad \text{og} \qquad f(3)=18$$

a) Bestem en forskrift for f.

b) Bestem $f(7)$ og $f(0{,}8)$

c) Løs ligningen $f(x)=2$.

15.M En funktion f opfylder

$$f(2)=7{,}2 \qquad \text{og} \qquad f(4)=3{,}1$$

Bestem $f(4{,}4)$, når det oplyses, at

a) f er en lineær funktion

b) f er en eksponentiel udvikling

c) f er en potentiel udvikling.

16.M I bogen *Elektriske installationer* af E. Hviid Christensen findes nedenstående tabel over sammenhængen mellem elektriske pærers effektforbrug, målt i Watt, og deres lysstrøm, målt i lumen.

Effekt	15	25	40	60	75	100
Lysstrøm	130	240	430	730	980	1380

a) Gør rede for, at lysstrømmen som funktion af effektforbruget med tilnærmelse kan beskrives ved en funktion af formen

$$f(x)=b\cdot x^a$$

b) Bestem tallene a og b.

c) Med hvor mange procent øges lysstrømmen, når effektforbruget fordobles?

d) Med hvor mange procent skal effektforbruget forøges, hvis lysstrømmen ønskes fordoblet?

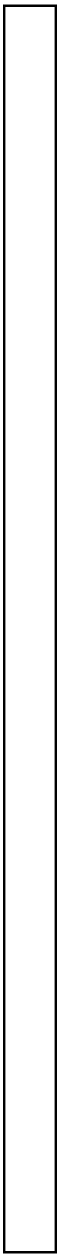
17.M Under passende omstændigheder kan opløsning af sukker i vand beskrives ved, at den uopløste sukkermængde aftager eksponentielt med tiden.
Af en oprindelig mængde på 200 gram sukker opløses de 100 gram i løbet af 2 minutter.
Hvor lang tid varer det, inden 180 gram af de oprindelige 200 gram er opløst?

18.M Indholdet af et radioaktivt stof i et præparat aftager eksponentielt med tiden med en halveringstid på $12{,}8\cdot 10^8$ år.

a) Bestem, hvor mange procent af det oprindelige indhold, der er tilbage af det radioaktive stof efter $8,5 \cdot 10^8$ år.

b) Bestem, hvor lang tid, der går, før indholdet af det radioaktive stof er nået ned på 10% af den oprindelige værdi.

19.M Nedenfor er vist graferne for fire funktioner *f*, *g*, *h* og *i*. Bestem forskrifterne.



20.M Et frysevarefirma har fundet ud af, at holdbarheden af pommes frites er 500 døgn ved $-30°C$ og 100 døgn ved $-16°C$. Det vides, at holdbarheden er en eksponentielt aftagende funktion af opbevaringstemperaturen.

a) Tegn i et ELK grafen for denne funktion.
b) Bestem holdbarheden af pommes frites, der opbevares ved $-5°C$ i et køleskabs frostrum.
c) Ved hvilken opbevaringstemperatur har pommes frites en holdbarhed på 50 døgn?
d) Hvor mange grader skal opbevaringstemperaturen sænkes, for at holdbarheden fordobles?

21.S Nedenstående tabel viser for en række pattedyr sammenhørende værdier af legemsvægten M målt i kg og iltforbrug V i liter ilt pr. time.

Dyr	M	V
mus	0,025	0,041
rotte	0,290	0,25
hund	11,7	3,87
mand	70	14,76
hest	650	71,10
elefant	3833	268,00

a) Indtegn sammenhørende værdier af $\log M$ og $\log V$ i et almindeligt koordinatsystem.
b) Gør rede for, at $\log V$ med god tilnærmelse kan beskrives som en lineær funktion af $\log M$, og bestem en forskrift for denne funktion.
c) Gør rede for, at svaret til opgave b) viser, at V afhænger potentiel af M, og find denne sammenhæng.
d) Forudsig iltforbrug for en hval med massen 10 tons og en spidsmus med massen 1 g.
e) Ved intensiteten af et pattedyrs stofskifte forstår det iltforbrug pr. kg. legemsvægt. Gør rede for, at jo større et pattedyr er, jo mindre er intensiteten af dets stofskifte.

22.M Nedbrydningen af giftstoffet DDT i naturen kan beskrives ved en eksponentiel udvikling med halveringstid 11 år.
a) Hvor mange procent af stoffet nedbrydes på et år.
b) Hvor lang tid går der, for en given mængde DDT er nedbrudt til 5% af den oprindelige mængde?

23.M Nedenunder er vist grafen for en *stykkevis potentiel funktion*.

a) Bestem en forskrift for denne funktion f.

b) Løs, gerne grafisk, ligningen

$$f(x) = 1{,}4$$

24.M Når lys har passeret en vandoverflade og derefter går ned gennem vandet, vil intensiteten $I(x)$ af lyset aftage med den vejlænge x (målt i meter), som lyset har tilbagelagt i vandet. Idet $I(0)$ betegner intensiteten umiddelbart under vandoverfladen, er forholdet mellem $I(0)$ og $I(x)$ givet ved

$$\frac{I(x)}{I(0)} = e^{-kx}$$

hvor k er en konstant, der afhænger af lysets farve. For rødt lys er $k = 0,29$ og for blåt lys er $k = 0,046$ (k måles i m^{-1}).

a) Med hvor mange procent er intensiteten af rødt lys faldet, når lyset er nået ned i en dybde af 5 meter, og
   1) lyset går lodret ned gennem vandet?
   2) lysstrålen danner en vinkel på $30°$ med lodret?

b) Bestem den vejlængde, som rødt lys har tilbagelagt i vandet, når intensiteten er halveret.

c) Bestem den dybde, hvor intensiteten af rødt lys er 10% af intensiteten af blåt lys, når intensiteterne af de to farver lys er ens ved vandoverfladen, og lysstrålerne går lodret ned gennem vandet.

25.M Når et signal sendes gennem et kabel, så vil det svækkes. Kaldes intensiteten af det udsendte signal for I_1 og intensiteten af det modtagne signal for I_2, er signaltabet D i kablet bestemt ved

$$D = 10\log\left(\frac{I_1}{I_2}\right)$$

Signaltabet angives i enheden decibel (dB).

a) For ca. 35 år siden kunne man fremstille lyslederkabler, hvor intensiteten af det modtagne signal var 10% af det udsendte signal i et kabel på 10m. Bestem signaltabet i et sådant kabel.

b) I 1970 kunne man fremstille lyslederkabler, hvor signaltabet var 0,2 dB i et kabel på 10 meter.
Hvor mange procent at det oprindelige signals intensitet udgjorde det modtagne signal gennem et sådant kabel?.

c) I dag fremstilles kabler, hvor intensiteten af det modtagne signal er 1% af intensiteten af det udsendte signal i et kabel på 30 km. Det oplyses, at signaltabet i et kabel er proportionalt med kablets længde.
Hvor mange procent udgør intensiteten af det modtagne signal af intensiteten af det udsendte signal i et sådant kabel, når dets længde kun er 10 meter?

26.S Oprindeligt blev logaritmer indført af skotten John Napier i 1614 som et regneteknisk hjælpemiddel. Det var nemlig lettere at finde logaritmen i en tabel til to tal, addere disse logaritmer og tage den såkaldte antilogaritme

$(\exp_{10})$ (igen i en tabel), end at udregne produktet af de to tal. Den relevante formel er

$$a \cdot b = \exp_{10}(\log a + \log b)$$

a) Bevis denne formel.

Teoretiske overvejelser viser, at den hastighed, hvormed man kan lægge to n-cifrede tal sammen, er proportional med n, mens tiden for at multiplicere to n-cifrede tal er proportional med n^2.
Du skal nu undersøge, om dette passer.
I skal arbejde sammen to og to. Den ene er tidtager, mens den anden regner nedenstående stykker ud **uden brug af lommeregner**. Bagefter bytter I roller. Indfør resultaterne i et passende skema.
(Der skal regnes 3 stykker ud af hver type - dette er for at forøge nøjagtigheden af tidstagningen.)

Addition

$n=1$	:	$2+3$	$4+7$	$5+9$
$n=2$	:	$12+65$	$87+56$	$34+28$
$n=3$	:	$527+376$	$326+948$	$362+482$
$n=4$	:	$2595+9283$	$9394+2683$	$2749+8429$
$n=5$	:	$29672+92938$	$62739+92745$	$20439+92873$

Multiplikation

$n=1$	:	$2\cdot 3$	$4\cdot 7$	$5\cdot 9$
$n=2$	:	$12\cdot 65$	$87\cdot 56$	$34\cdot 28$
$n=3$	:	$527\cdot 376$	$326\cdot 948$	$362\cdot 482$
$n=4$	:	$2595\cdot 9283$	$9394\cdot 2683$	$2749\cdot 8429$
$n=5$	:	$29672\cdot 92938$	$62739\cdot 92745$	$20439\cdot 92873$

b) Indtegn dine tider for addition og for multiplikation i et DOLK.

c) Passer de teoretiske forudsigelser ovenfor?

d) Hvor lang tid vil det tage dig at
   1) addere to 100-cifrede tal?
   2) multipliceret to 100-cifrede tal?

Facitliste

Sektion 0:

1:	131071 kornfrø	2: ca. $1{,}84 \cdot 10^{16}$ kg

Sektion 1:

1a:	1679616	512	0	893871739	$3{,}652 \cdot 10^{16}$
1b:	0,001	0,0625	0,0080	1	0,0909
1c:	5,6234	22,3607	22,3607	1,5651	2
1d:	0,5417	5,9176	7,2249	20907515,8	0,9739
1e:	8	0,125	8	8	8

3: a: 1 b: 5 c: 5 d: 5^{12} e: 2 f: 1 g: 1 h: $2 \cdot 5^{-1}$ i: $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$
j: $2^4 \cdot 3^{-2}$ k: $2 \cdot 3^8$ l: $2^{-8} \cdot 3^{-5}$ m: 7^{-17} n: $2^{-31} \cdot 3^{-15}$

5: % betyder, at udtrykket ikke er defineret.
a: 2 b: % c: 2 d: % e: 2 f: % g: 2 h: 2 i: -3 j: %
k: % m: 3 n: 0 o: 0 p: 3/2 q: %

6: a: $(ab)^{1/n} = a^{1/n} \cdot b^{1/n}$ b: $\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} = \frac{a^{1/n}}{b^{1/n}}$
c: $(a^m)^{1/n} = (a^{1/n})^m$ d: $(a^n)^{1/n} = a$

7: a: 4 b: 16 c: 9 d: 1/9 e: 81 f: 2 g: 1/2 h: 4 i: 4 j: 8
k: 32 l: 2 m: 2 n: 4096 $(= 2^{12})$ o: 4 p: 4

8: a: 6 b: $8\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}}$ c: $\pi^{-2/3}$ d: $2^{-7/12}$

9: a: $x^{-6} \cdot y^{-5}$ b: a^{-4} c: 1 d: $a^{17/4}$
e: $a^{79/6}$ f: $\sqrt[6]{a}$ g: $a^{-11/2} \cdot b^{7/4}$

10: a: $\sqrt{2}$ b: $\frac{7\sqrt{5}+\sqrt{15}}{5}$ c: $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ d: $\frac{3}{5}\sqrt{5}-1$ e: $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ f: 0

11:	a: 3^{29}	b: 2^{-10}	c: 5^2	d: a^{-6}	e: x^{12}	f: x^4
	g: a^{45}	h: b^4	i: p^{26q}	j: q^6	k: 13^{12}	l: 4^{3n}
	m: -1	n: 2^{9p+3q}	o: b^{30n}	p: 7^3	q: b^x	r: 3^{-1}
	s: e^{9x}	t: a^{10}	u: 7^{-12}	v: 2^x	w: 2^{-2}	x: x^{8n}
	y: 10^{5x}	z: p^{-17}				
12:	a: 5^4	b: -6^5	c: 7^5	d: 2^{18}	e: $2^8 \cdot 3^2$	f: $(tu)^{-8}$
	g: a^5b^9	h: 30^{-7}	i: $3x^6y^2$	j: 3^{-6}	k: 7^n	l: 7^{4x+4y}
	m: 8^{-1}	n: $30^{-2}a^{-6}$	o: 2^3	p: 4^2	q: 5^3	r: $(a/b)^5$
	s: 2^{-10}	t: $3^{18}2^{-21}$	u: $a^{16}b^{-16}$	v: $(3/2)^{-7}$	w: -1	x: 4^{-n}
	y: $\left(\frac{x}{yz}\right)^{2n}$	z: 3^3y^7				
13:	a: 2^6	b: 5^6	c: $a^{10}b^{10}$	d: 8^9	e: $2^6/5^6$	
	f: 1	g: 30^6	h: 5^{-14}	i: 2^8	j: e^{-7}	
	k: 10^6	l: 6^{-8}				
14:	a: $\sqrt[3]{4}$	b: $\sqrt{2}$	c: 2	d: 2	e: b^4x^{-2}	

f: ab^{-2} g: a h: $\frac{3}{2}a$ i: $\sqrt{\frac{8}{7}a}$ j: $a\sqrt{60}$

k: a^3b^{-2} l: b^6

15: a: 1 b: $5^{2x}2^{-2x-6}$ c: d^{-2} d: $a^{2p+16}b^{-2p-4}$

e: $\frac{3}{8}x^5y^{-2}z^{-1}$

Sektion 2:

2: a 3: c , d 4: e

5: $\exp_a(m)\cdot\exp_a(n)=\exp_a(m+n)$ $(\exp_a(m))^n=\exp_a(mn)$

$\dfrac{\exp_a(m)}{\exp_a(n)}=\exp_a(m-n)$ $\exp_a(n)\cdot\exp_b(n)=\exp_{ab}(n)$

$\dfrac{\exp_a(n)}{\exp_b(n)}=\exp_{\frac{a}{b}}(n)$

6: a: 1 b: 3^{-1} c: 5^{-1} d: 0 e: 1 f: 6^n

Sektion 3:

2: b: 9,26 mia. c: 2026 d: 19,53 %

3: a: $f(x)=1{,}0047\cdot1{,}2579^x$ b: $f(x)=715{,}0429\cdot1{,}1112^x$

c: $f(x)=4{,}2426\cdot0{,}8409^x$ d: $f(x)=6\cdot4^x$

e: $f(x)=6\cdot1{,}2599^x$ f: $f(x)=0{,}007053\cdot21{,}32^x$

g: $f(x)=2{,}9046\cdot1{,}1339^x$

4: a: $f(x)=29{,}4\cdot1{,}02523^x$, x er antal år efter 1965

b: 70,31 mill c: 2,523 % d: 28,29 %

5: a: $f(x)=100\cdot1{,}12^x$ b: 100,95 kr. c: 0,949%

d: 12,68 %

6: Tjah - et rigtigere beløb ville være 4894,44 kr.

7: a: $f(x)=143093\cdot0{,}9777^x$, x er antal år efter 1972

b: 2,23 % c: 76112

Sektion 4:

1: a: $2\log a$ b: $10\log x$ c: $\ln p$ d: $6\log 2$ e: $2-2\log 3$
f: $\ln 10$ g: $\log 5$

2: a: $\log 2$ b: $\log 2$ c: $-2\log 5$ d: $2\log 2$ e: $2\log 2$
f: $\frac{17}{12}\ln 6$ g: $2\log\frac{12}{5}$ h: $2n\log x$ i: $12\ln 2-2\ln 3$ j: -3

3: a: $f(x)=162\cdot 1{,}0211^x$ b: 2037

4: a: 90 dB b: $1\ \mathrm{W/m^2}$ c: 3,01 dB

5: a: e^2 , e^{-2} b: 0 , 1 c: 10 d: 0,24097 ; 41,4987

Sektion 5:

1: a: $T_2=2{,}6419$ b: $T_2=0{,}2130$ c: $T_{1/2}=6{,}5788$
d: $T_2=6{,}1163$ e: $T_2=693{,}4933$ f: $T_{1/2}=346{,}2269$

3: $f(x)=3{,}9575\cdot 0{,}7408^x$ 4: $g(x)=0{,}3217\cdot 1{,}8779^x$

5: 2 6: 2

Sektion 6:

1: ELK

2: b: x er antal år efter 1970, $f(x)=58\cdot 1{,}0624^x$
c: 248 øre d: 11,45 år

3: a: eksponentiel udvikling b: ca. 200 ansøgere

4: $f(x)=5{,}0170\cdot 1{,}2585^x$ $g(x)=3{,}1748\cdot 0{,}8909^x$ $h(x)=4$

Sektion 7:

1: HEJ

2: a: *g, m* b: *i, j, m* c: *f, h, k, m, n*

3: $f(x)=5{,}2\cdot x^{0{,}4}$

7: $f(x)=2{,}1$ $g(x)=30\cdot x^{-1{,}2}$ $h(x)=4\cdot x^{1{,}2}$

Kapiteloversigt

Potensregneregler

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\quad \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\quad (a^x)^y = a^{x\cdot y}$ $\quad a^0 = 1$

$\dfrac{1}{a^x} = a^{-x}$ $\quad a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$ $\quad \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ $\quad \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}$ $\quad \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Eksponentialfunktioner

$f(x) = a^x \qquad a > 0,\ x \in \mathbf{R}$

Eksponentiel udvikling

$f(x) = b\cdot a^x \qquad a > 0,\ b > 0,\ x \in \mathbf{R}$

Hvis $f(x_1) = y_1$ og $f(x_2) = y_2$, så

$$a = \sqrt[x_2-x_1]{\frac{y_2}{y_1}} \qquad \text{og} \qquad b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$$

Fordoblingstiden: $\quad T_2 = \dfrac{\log 2}{\log a}$

Halveringstiden: $\quad T_{1/2} = \dfrac{\log \frac{1}{2}}{\log a}$

En eksponentiel udvikling giver en ret linie i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem (ELK).

Potentiel udvikling

$f(x) = b \cdot x^a \qquad b > 0 \ , \ x > 0$

Hvis $f(x_1) = y_1$ og $f(x_2) = y_2$, så

$$a = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1} \qquad \text{og} \qquad b = \frac{y_1}{x_1^{\,a}}$$

En potentiel udvikling giver en ret linie i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem (DOLK).

Logaritmer

$y = \exp_a(x) \Leftrightarrow x = \log_a(y)$

$\log_a(1) = 0 \qquad \log_a(a) = 1$

$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \qquad \log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$

$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y) \qquad \log_a(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n}\log_a(x)$

$$\log_a(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(a)}$$

$\log(x) = \log_{10}(x) \qquad \ln(x) = \log_e(x)$

$(e \approx 2{,}7182818...)$