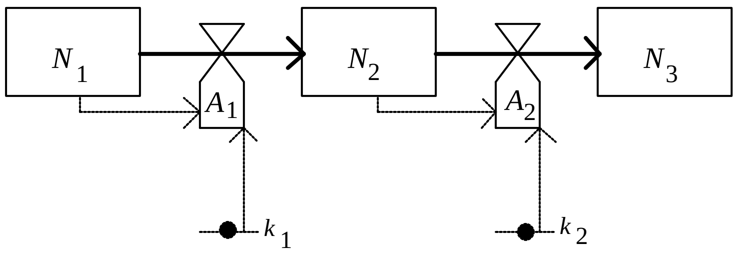
Matematikkens mysterier
- på et højt niveau

af

Kenneth Hansen

3. Differentialligninger



Indholdsfortegnelse

3.1 Introduktion

I dette kapitel skal vi beskæftige os med differentialligninger. I modsætning til almindelige ligninger, hvis løsninger er tal, så er differentialligninger, hvor man skal finde en funktion, som opfylder en ligning - typisk involverer denne ligning differentialkvotienten af funktionen.

En differentialligning er en ligning af formen

$$f'(x) = 2 \cdot f(x)$$

som man dog oftest skriver som

$$\frac{dy}{dx} = 2y$$

Den ubekendte i denne ligning er funktionen f (eller y, om man vil).
En løsning kunne være en af funktionerne

$$f_1(x) = 7e^{2x} \qquad f_2(x) = -8e^{2x} \qquad f_3(x) = e^{2x}$$

- ja, faktisk enhver funktion af formen

$$f(x) = ce^{2x}.$$

Her er tallet c en konstant - oftest kaldet en *integrationskonstant*. Sådanne konstanter optræder næsten altid i differentialligningers løsninger. Man taler om den *generelle løsning* til differentialligningen.

Som regel ved man dog mere om løsningsfunktionen end bare differentialligningen - man kan have en begyndelsesbetingelse, f.eks. af formen

$$f(0) = 23$$

hvilket er nok til at fastlægge integrationskonstantens værdi. I eksemplet ovenfor vil denne begyndelsesbetingelse fastlægge den *partikulære løsning*

$$f(x) = 23e^{2x}$$

Vi skal til at starte med at se, hvorledes differentialligninger optræder i naturen. Derefter skal vi studere, hvorledes man kan løse differentialligninger, både eksakt og numerisk.

Opgaver

1.1 Bevis, at enhver funktion af formen $f(x) = ce^{2x}$ er en løsning til

$$\frac{dy}{dx} = 2y.$$

(Vink: Indsættelse)

3.2 Dynamiske systemer

Mange fænomener i den virkelige verden kan opfattes som såkaldte *dynamiske systemer*. Det dynamiske ligger hér i, at systemets tilstand ændrer sig med tiden. Vi giver nogle eksempler:

Eksempel 1: Henfaldskæde

Den radioaktive isotop Te-131 henfalder til isotopen I-131. Denne henfalder igen til Xe-131, som er en stabil isotop, og som derfor ikke henfalder yderligere.
Dette kaldes en *henfaldskæde*.
Problemstillingen er nu: Man tager 1 kg Te-131. Hvor mange kerner af de forskellige isotoper er der til stede, når der er gået et vist tidsrum? Hvordan udvikler de forskellige isotopmængder sig med tiden?

Eksempel 2: Reaktionskinetik

Den kemiske reaktion

$$2NO_2 \to N_2O_4$$

foregår faktisk begge veje, således at der vil indstille sig en ligevægt. Indenfor *reaktionskinetikken* beskæftiger man sig med, hvor hurtigt denne ligevægt indtræffer.
Problemstillingen er: Man tager 1 mol NO_2. Hvor hurtigt vil ligevægten indstilles, og hvordan vil stofmængden af NO_2 afhænge af tiden?

Eksempel 3: Danmarks befolkning

Hvordan udvikler Danmarks befolkning sig gennem tiden under hensyntagen til fødselsrater, dødsrater, ind- og udvandring? Kan man sige noget om Danmarks befolkning i år 2050?

Eksempel 4: Østersø-torsk

Hvorledes udvikler Østersø-torskenes antal sig under hensyntagen til fiskeri, yngeludsætning, klimaændringer etc.?

Mange flere eksempler kunne naturligvis nævnes.

Når man vil studere et dynamisk system, så skal man lave en *model* af dette system. En sådan model vil typisk bestå af følgende elementer:

1) Nogle systemvariable, som beskriver systemet til tiden t. (Disse systemvariable er altså funktioner af t).

2) Et sæt koblede differentialligninger - én ligning for hver systemvariabel.

3) Et antal begyndelsesværdier og andre konstanter.

Antallet og arten af systemvariablerne afhænger af, hvor detaljeret, man vil studere systemet. F.eks. kunne man vælge følgende systemvariable:

Eksempel 1:

$N_1(t) =$ antallet af Te-131-kerner til tiden t.
$N_2(t) =$ antallet af I-131-kerner til tiden t
$N_3(t) =$ antallet af Xe-131-kerner til tiden t

Eksempel 3:

$N(t) =$ antallet af danskere til tiden t.

Dette valg giver en meget simpel model, så i stedet kunne man bruge

$M(t) =$ antallet af danske mænd til tiden t
$K(t) =$ antallet af danske kvinder til tiden t.

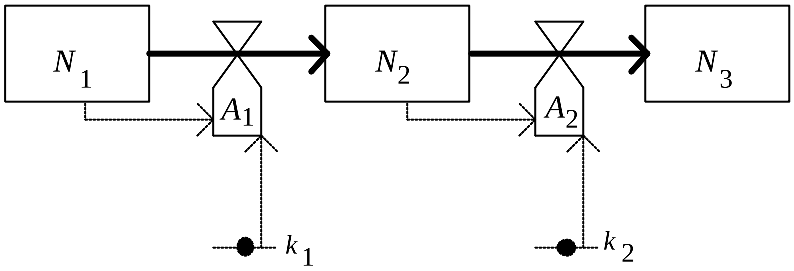
Endnu mere detaljeret ville følgende være

$M_0(t) =$ antallet af danske mænd (drenge) mellem 0 og 1 år
$M_1(t) =$ antallet af danske mænd mellem 1 og 2 år
$M_2(t) = ...$
...

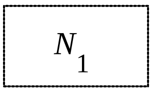
Denne model ville komme til at operere med ca. 200 systemvariable og vil måske blive en anelse uoverskuelig. Men en computer ville sagtens kunne regne på den.

Det er normalt ret bøvlet at opstille de koblede differentialligninger i modellen; men heldigvis kan man få hjælp af *System Dynamics*. Dette er en metode, hvor man først opstiller en grafisk repræsentation af systemvariablerne, og derefter oversætter denne til differentialligninger.

SD-diagrammet for eksempel 1 - henfaldskæden - ser således ud:

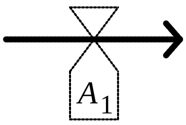


I denne figur er der temmeligt mange ingredienser:



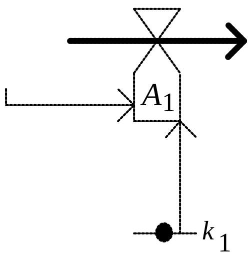
Systemvariable angives ved firkantede kasser.
Skriv variablens navn inden i kassen.

Pile angiver overførelse af 'stof' - et *flow*.



Vandhaner (som ser sådan ud på byggetegninger) regulerer overførelsen af 'stof' - en *rate*.

Konstanter angives på denne måde.



Stiplede pile angiver, et informations-flow, dvs., hvorledes en systemvariabel eller en konstant påvirker en rate.

Andre symboler kan forekomme, bl.a. skyer (i denne bog ellipser), som angiver kilder eller dræn for stof.

SD-diagrammet for henfaldskæden viser altså, at der er tre systemvariable, nemlig N_1, N_2 og N_3. De to flow-pile viser, at der overføres 'stof' fra N_1 til N_2 og fra N_2 til N_3, svarende til, at Te-131 henfalder til I-131 og at I-131 henfalder til Xe-131.

De to haner viser, at strømmen A_1 fra N_1 til N_2 afhænger af N_1 og konstanten k_1, og at strømmen A_2 afhænger af N_2 og konstanten k_2.

Bemærk, at diagrammet **ikke** fortæller, hvorledes strømmene A_1 og A_2 afhænger af N_1, N_2, k_1 og k_2.

For at kunne opstille systemets differentialligninger, skal vi kende disse udtryk; fra fysikundervisningen vides, at

$$A_1 = k_1 \cdot N_1 \quad \text{og} \qquad A_2 = k_2 \cdot N_2 .$$

Den typiske differentialligning ser således ud: For hver systemvariabel N fås ligningen

$$\frac{dN}{dt} = (\text{in - flow}) \;\; - \;\; (\text{out - flow})$$

Hver flow-pil ind til variablen giver altså et positivt led, og hver flow-pil væk fra variablen giver et negativt led.

For henfaldskæden fås derfor differentialligningerne:

$$\frac{dN_1}{dt} = -k_1 N_1 \qquad\qquad \frac{dN_2}{dt} = k_1 N_1 - k_2 N_2$$

$$\frac{dN_3}{dt} = k_2 N_2$$

Endelig skal man, for at kunne løse disse koblede differentialligninger, have fastlagt værdierne for de to konstanter k_1 og k_2, samt startværdierne for mængderne af de to isotoper, dvs. $N_1(0), N_2(0)$ og $N_3(0)$.

Når man så endelig har fået opstillet modellen, så skal differentialligningerne løses og modellen studeres. Det vil vi komme meget mere ind på i de næste afsnit, så her vil vi blot bemærke, at man kan gøre 3 forskellige ting:

1) Man kan løse differentialligningerne eksakt.

2) Man kan løse differentialligningerne numerisk.

3) Man kan lave en kvalitativ analyse.

En eksakt (eller analytisk) løsning af en differentialligning er ganske simpelt en løsningsfunktion skrevet op som funktion, mens en numerisk løsning er løsningsfunktionen opskrevet som en tabel af (approximerede) funktionsværdier. Det kan betale sig at sammenligne med integralregningen - man kunne jo udregne et integral eksakt eller approximativt.

Kvalitativ analyse går ud på at sige noget generelt om løsningsfunktionen uden at løse differentialligningen. Betragter man f.eks. differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 1$$

så vil man opdage, at

$$\frac{dy}{dx} > 0$$

uanset værdien af y. Dette betyder altså, at en løsningsfunktion vil være voksende.

Opgaver

2.1

a) Opstil et SD-diagram for Danmarks befolkning (eksempel 3).
Vælg modellen med de to systemvariable M og K.

b) Gør nogle antagelser om, hvorledes fertiliteten og mortaliteten afhænger af M og K.
Opstil derefter de relevante differentialligninger.

c) Hvilke mangler har den opstillede model?

2.2 Vi skal nu kvalitativt undersøge forskellige aspekter af differentialligningerne for henfaldskæden.
Vi antager, at $N_2(0) = N_3(0) = 0$, dvs. at vi starter med en vis mængde ren Te-131, som så henfalder.

a) Gør rede for, at funktionen N_1 er en aftagende funktion.

b) Gør rede for, at N_3 er en voksende funktion.

c) Gør rede for, at N_2 først vokser, men derefter stagnerer og derefter går imod 0.
Hvilken betingelse kan du give for, hvornår N_2 er maksimal?

2.3 Med computerprogrammet DYMOS kan man løse differentialligningssystemet fra opgave 2.2 numerisk. Prøv dette og observer, om din løsning passer med de ting, du beviste i opgave 2.2.
(Man kan f.eks. sætte $N_1(0) = 100$, og $k_1 = k_2 = 0{,}01$).

3.3 Separation af de variable

I dette afsnit skal vi studere en af de mest anvendte måder at løse differentialligninger på - *separation af de variable*. Metoden virker på differentialligninger af formen

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

Følgende kan derfor løses ved brug af denne metode:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{x} \cdot y^2 \qquad \left(f(x) = \frac{x+1}{x} \quad \text{og} \quad g(y) = y^2 \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \sin x \qquad \left(f(x) = \sin x \quad \text{og} \quad g(y) = 1 \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\ln y} \qquad \left(f(x) = 1 \quad \text{og} \quad g(y) = \frac{y}{\ln y} \right)$$

men ikke

$$\frac{dy}{dx} = x + y$$

idet højresiden ikke er et produkt af to funktioner, hvor den ene kun afhænger af x og den anden kun af y.

Selve metoden er beskrevet i følgende sætning:

Sætning 1 (FS)

Lad f og g være kontinuerte funktioner, lad f være defineret på intervallet I og g på intervallet J, og antag, at

$$g(y) \neq 0 \quad , \quad \text{for} \quad y \in J$$

Lad

$$F(x) = \int f(x)dx$$

og

$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} dy$$

Så vil G have en invers funktion, og løsningen til differentialligningen vil være

$$y = G^{-1}(F(x) + k)$$

hvor k er en integrationskonstant.

Bevis:

Vi deler beviset op i flere dele:

1) G har en invers funktion:

Idet g er kontinuert på et interval og forskellig fra 0 på dette interval, så vil g have konstant fortegn på dette interval.
Dette betyder, at

$$G'(y) = \frac{1}{g(y)}$$

ligeledes har konstant fortegn på J, og G er derfor monoton.
En monoton funktion er injektiv, og en injektiv funktion har altid en invers funktion.

2) $y = G^{-1}(F(x)+k)$ er en løsning til differentialligningen:

Vi regner ensbetydende:

$$y = G^{-1}(F(x)+k)$$

$$\Updownarrow$$

$$G(y) = F(x)+k$$

$$\Updownarrow$$

$$G(y) - F(x) = k$$

$$\Updownarrow$$

$$(G(y) - F(x))' = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$G'(y)\cdot y' - F'(x) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{g(y)}\cdot y' - f(x) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{g(y)}\cdot y' = f(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$y' = f(x)\cdot g(y)$$

Dette beviser sætningen.

Bemærk, at sætningen ikke udtaler sig om de *singulære tilfælde*, hvor $g(y) = 0$. Disse tilfælde skal undersøges separat. Vi giver eksempler herpå senere.

I praksis går man ikke rundt og husker på sætning 1's ordlyd - i stedet går man mere direkte til værks.

Eksempel

Differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+\tan^2 y}$$

kan løses på følgende måde:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+\tan^2 y}$$

$\Updownarrow$

$$(1+\tan^2 y)\; dy = 2x\; dx$$

$\Updownarrow$

$$\int (1+\tan^2 y) dy = \int 2x\; dx$$

$\Updownarrow$

$$\tan(y) = x^2 + k$$

$\Updownarrow$

$$y = \arctan(x^2 + k)$$

Dette giver den generelle løsning; men bemærk, at vi intet har sagt om definitionsmængden for løsningen. Dette er dog rimeligt let for denne differentialligning:

$g(y) = 1+\tan^2 y \neq 0$ uanset værdien for y

så der er ikke nogen singulære tilfælde. Endvidere er definitionsmængden for funktionen $\arctan$ mængden af alle reelle tal, $\mathbf{R}$, så definitionsmængden for løsningen er ligeledes $\mathbf{R}$.

Generelt vil definitionsmængden for løsningen afhænge af integrationskonstanten k.

Den opmærksomme læser vil nu undre sig over, hvorfor der kun optrådte **en** integrationskonstant - vi beregnede jo **to** ubestemte integraler.
Svaret er, at integrerer man, så fås

$$\int (1+\tan^2 y) dy = \int 2x\; dx \quad \Leftrightarrow \quad \tan(y) + k_1 = x^2 + k_2$$

hvor både k_1 og k_2 er integrationskonstanter. Men vi kan samle begge konstanter i én - betegnet k - ved at subtrahere k_1 på begge sider af ligningen og skrive

$$k = k_2 - k_1$$

Generelt er det tilladt at hærge integrationskonstanterne rimeligt meget - de er jo (foreløbigt) ukendte, og ganger man noget ukendt med f.eks. 2, så er resultatet jo stadigt ukendt. Men man skal stadigvæk passe på med, hvad man gør.

Regnet opgave

Givet: Differentialligningen $\frac{dy}{dx} = xy$

Find: Den løsning *f*, som opfylder, at $f(1) = e$

Svar: For det første observerer vi, at den oplyste *y*-værdi er *e*. Idet funktionen *g* er givet ved $g(y) = y$, er $g(e) = e \neq 0$. Vi er altså **ikke** i det singulære tilfælde.
Vi integrerer som før:

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{y} dy = x dx$$

$$\Updownarrow$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int x\, dx$$

$$\Updownarrow$$

$$\ln|y| = \tfrac{1}{2}x^2 + k$$

$$\Updownarrow$$

$$|y| = \exp(\tfrac{1}{2}x^2 + k)$$

Vi indsætter nu informationen $f(1) = e$, dvs. vi sætter $x = 1$ og $y = e$:

$$|e| = \exp(\tfrac{1}{2} \cdot 1^1 + k)$$

$$\Updownarrow$$

$$\ln(e) = \tfrac{1}{2} + k$$

$$\Updownarrow$$

$$1 - \tfrac{1}{2} = k$$

Altså, $k = \tfrac{1}{2}$.

Endelig skal vi finde definitionsmængden for løsningen. Kravet er her, at $y \neq 0$. Idet vores startbetingelse var, at $y = e$ (for $x = 1$), så må *y* være positiv. Vi kan derfor glemme det irriterende numerisk-tegn. Endvidere ser vi, at definitionsmængden for løsningen er de reelle tal - uanset *x*'s værdi vil udtrykket $\exp(\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2})$ være veldefineret og positivt.

Løsningen er derfor

$$f(x) = \exp(\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}) \ \ , \ \ x \in \mathbf{R}.$$

Eksempel

Vi skal finde tre løsninger f , g og h til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2} \ , \ x > 0$$

Disse løsninger skal opfylde ligningerne

$$f(1) = 0 \qquad g(1) = 1 \qquad h(1) = -3$$

Vi starter med at finde en forskrift for f. I begyndelsespunktet (1,0) er $y = 0$, så vi er i undtagelsestilfældet til sætning 1 - det singulære tilfælde - og løsningen bliver den konstante funktion

$$f(x) = 0 \ \ , \ \ x > 0$$

(Man kan kontrollere ved indsættelse, at f faktisk er en løsning til differentialligningen).

Ved både g og h er startværdien for y forskellig for 0, så vi kan separere de variable:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2}$$

$\Updownarrow$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x^2}$$

$\Updownarrow$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$\Updownarrow$

$$\ln|y| = -\tfrac{1}{x} + k$$

$\Updownarrow$

$$|y| = C\exp(-\tfrac{1}{x}) \qquad\qquad (C = e^k)$$

For g gælder, at $g(1) = 1$, hvilket ved indsættelse giver

$$|1| = C\exp(-1) \quad \Leftrightarrow \quad C = e$$

Endvidere er vi i den situation, hvor $y > 0$, så numerisk-tegnet kan ignoreres. Løsningen bliver derfor

$$g(x) = e\exp(-\tfrac{1}{x}) = \exp(1-\tfrac{1}{x})$$

Det ses, at $g(x) > 0$ for $x > 0$, så definitionsmængden for løsningen g bliver $]0;\infty[$.

Ergo,

$$g(x) = \exp(1-\tfrac{1}{x}) \quad , \quad x > 0$$

Ved h indsætter vi også betingelsen $h(1) = -3$ for at finde integrationskonstanten C. Vi får

$$|-3| = C\exp(-1) \qquad \Leftrightarrow \qquad C = 3e$$

Idet $y < 0$ i dette tilfælde, kan numerisk-tegnet erstattes med $-y$, og vi får

$$-y = 3e\exp(-\tfrac{1}{x})$$

Igen er højresiden forskellig fra 0 for $x > 0$, så løsningen bliver

$$y = -3\exp(1-\tfrac{1}{x}) \quad , \quad x > 0$$

Når man skal finde definitionsmængder, så er en god tommelfingerregel, at

definitionsmængden skal altid være et åbent interval!

Eksempel

Vi vil finde løsningen f til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2}$$

som opfylder $f(1) = 2$.

Først separerer vi, idet vi ikke er i det singulære tilfælde:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x^2}$$

$\Updownarrow$

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2}$$

$\Updownarrow$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$\Updownarrow$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + k$$

$\Updownarrow$

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + k$$

$\Updownarrow$

$$y = (\frac{1}{x} + k)^{-1}$$

Vi indsætter nu $x = 1$ og $y = 2$ og får

$$2 = (\frac{1}{1} + k)^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = 1 + k \quad \Leftrightarrow \quad k = -\frac{1}{2}$$

Forskriften for *f* er derfor

$$f(x) = (\frac{1}{x} - \frac{1}{2})^{-1}$$

Men hvad er definitionsmængden?

$f(x)$ er ikke defineret, når nævneren er lig 0, dvs. for $x = 2$. Men $f(x)$ er heller ikke defineret for $x = 0$ - netop fordi differentialligningen ikke giver mening når $x = 0$.
Idet $\mathrm{Dm}(f)$ **skal** være et interval, er der derfor 3 muligheder:

$$]-\infty;0[\,,\ ]0;2[\text{ og }]2;\infty[$$

Idet betingelsen på *f* er, at $f(1) = 3$, vælger vi det interval, hvori *x*-værdien 1 ligger. Ergo er forskriften

$$f(x) = (\frac{1}{x} - \frac{1}{2})^{-1} \quad , \quad 0 < x < 2$$

Vi bemærker, at der er to specielle tilfælde af separation af de variable:

Sætning 2 (FS)

Løsningen til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

er givet ved

$$y = F(x) + k$$

hvor *F* er en stamfunktion til *f*, og k er en integrationskonstant.

Bevis:

Vi anvender sætning 1 med $g(y) = 1$. Så bliver

$$G(y) = \int \frac{1}{g(y)} dy = \int dy = y$$

og

$$G^{-1}(x) = x$$

Alternativt kunne man jo sige, at her skal vi bare finde en stamfunktion til en given funktion.

> **Sætning 3 (LS)**
>
> Løsningen til differentialligningen
>
> $$\frac{dy}{dx} = g(y)$$
>
> er givet ved
>
> $$y = G^{-1}(x+k)$$
>
> hvor G er en stamfunktion til $\frac{1}{g}$, og k er en integrationskonstant.

Bevis:

Dette er sætning 1, men med $f(x) = 1$ og dermed

$$F(x) = \int f(x)\,dx = x + k$$

Eksempel

Løsningen f til differentialligningen $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$ med $f(1) = 2$ findes:

Vi separerer de variable:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$$

$\Updownarrow$

$$y\,dy = dx$$

$\Updownarrow$

$$\int y\,dy = \int dx$$

$\Updownarrow$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = x + k$$

$\Updownarrow$

$$y = \pm\sqrt{2x+k}$$

Idet den opgivne *y*-værdi er lig 2, så skrottes minus-tegnet. Indsættes $x = 1$ og $y = 2$, så fås følgende ligning for *k*:

$$2 = \sqrt{2\cdot 1 + k} \quad \Leftrightarrow \quad k = 2$$

Forskriften for *f* er derfor

$$f(x) = \sqrt{2x+2}$$

og idet indmaden under rodtegnet er positivt for $x > -1$ fås løsningen

$$f(x) = \sqrt{2x+2} \ , \ x > -1$$

Opgaver

3.1 Vis, at løsningen F til differentialligningen $\frac{dy}{dx} = f(x)$ opfyldende $F(x_0) = y_0$ er givet ved

$$F(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

3.2 Løs følgende differentialligninger med begyndelsesbetingelser. Husk definitionsmængderne

a) $\frac{dy}{dx} = x^2 y^2, \quad f(1) = 1$

b) $\frac{dy}{dx} = x\cos^2 y, \quad g(0) = 0$

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy}, \quad h(-e) = -1$

d) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^3}, \quad j(2) = 0$

e) $\frac{dy}{dx} = \sin x, \quad k(\pi) = 2x$

f) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{(\ln y)^2}, \quad l(0) = e$

g) $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}, \quad m(0) = 0$

h) $\frac{dy}{dx} = (1 + \ln x)\cdot y, \quad n(1) = 2$

i) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,y, \quad q(1) = 2\sqrt{2}$

j) $\frac{dy}{dx} = y\frac{e^x}{1+e^x}, \quad r(0) = 4$

3.3 Find de tre løsninger *f*, *g* og *h* til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \ x \neq 0$$

som opfylder

$$f(1) = 0 \qquad g(1) = 1 \qquad \text{og} \qquad h(-1) = 1$$

3.4 Man kan ofte finde specielle løsninger til en differentialligning, f.eks. polynomielle løsninger, ved indsættelse:

Betragt differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = y - x^2 + x + 2$$

og betragt endvidere andengradspolynomiet

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Bestem tallene a, b og c, således at funktionen f bliver en løsning til differentialligningen.

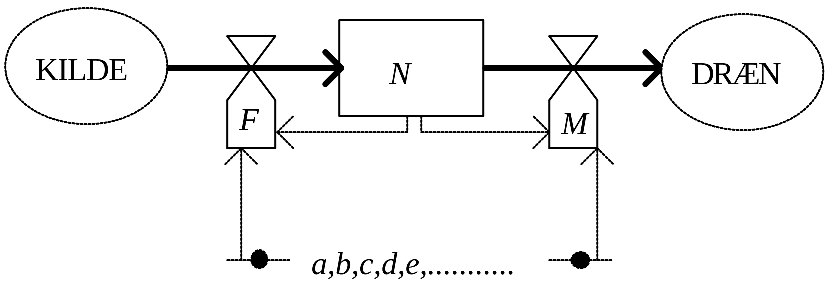
3.5 Bestem samtlige andengradspolynomier, som er løsninger til differentialligningen

$$xy' - 2y + x = 0$$

3.4 Vækstmodeller

Vi vil nu studere forskellige former for vækst.

I den simpleste vækstmodel er der én systemvariabel, N, og to måder, hvorpå N kan ændre sig på - N kan øges ved at der tilføres stof fra en kilde via hanen F, og N kan mindskes ved at stof fratages til et dræn via hanen M. Hanerne F og M kontrolleres af N og af en række uspecificerede systemvariable, her kaldet a, b, c .... *SD*-diagrammet får således udseendet:



Nogle eksempler på vækst er

1) N = Danmarks befolkning
   F = fødselsraten (fertiliteten)
   M = dødeligheden (mortaliteten)

2) N = antal bakterier i en romkugle
   F og M er igen fertiliteten og mortaliteten

3) N = antal atomer af en radioaktiv isotop
   M = aktiviteten af denne isotop
   F = den hastighed, hvormed systemet tilføres atomer (er muligvis lig 0).

De mest interessante vækstmodeller, og dem der er lettest at studere, er de såkaldte *autonome* systemer (autonom = selvbestemmende). Et autonomt system er et system, hvor de forskellige haner etc. **ikke** styres eller influeres af tiden.

Differentialligningen for et autonomt vækstsystem er generelt

$$\frac{dN}{dt} = F(N) - M(N)$$

hvor vi naturligvis ikke umiddelbart kender udtrykkene for F og M. Men det vigtigste her er, at vi har en differentialligning af formen

$$\frac{dy}{dx} = g(y)$$

(hvor vi har erstattet N med y og t med x).

Vi vil løse denne differentialligning for forskellige funktioner g. Vi giver en oversigt:

$g(y) = a$	giver	lineær vækst
$g(y) = ky$	giver	eksponentiel vækst
$g(y) = ay + b$	giver	begrænset eksponentiel vækst
$g(y) = y(b - ay)$	giver	logistisk vækst

Vi starter med den lineære og den eksponentielle vækst:

Sætning 4 (LS)

Den fuldstændige løsning til $y' = a$ er

$$y = ax + b$$

hvor b er en integrationskonstant.

Bevis:

En øvelse!

Sætning 5 (FS)

Den fuldstændige løsning til $y' = ky$ er

$$y = C \cdot e^{kx}$$

hvor C er en integrationskonstant.

Bevis:

Idet vi vil bruge integration ved substitution, så skal vi dele løsningen op i 3 tilfælde, alt efter om højresiden ky er positiv, nul eller negativ. Dette er jo det samme som at dele op efter fortegnet for y:

1) $y = 0$

Dette er det lette (og singulære) tilfælde - hvis y er lig 0, så reducerer differentialligningen til

$$y' = 0$$

som straks løses til

$$y = \text{konstant}$$

Denne konstant må jo være 0, fordi y var 0.
Ergo er løsningen

$$y = 0 = 0 \cdot e^{kx} = C \cdot e^{kx}$$

med $C = 0$.

2) $y > 0$

Vi separerer de variable:

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{y}\,dy = k\,dx$$

$$\Updownarrow$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int k\,dx$$

$$\Updownarrow$$

$$\ln|y| = kx + c \qquad (c \text{ er en integrationskonstant})$$

$$\Updownarrow$$

$$|y| = e^{kx+c} = Ce^{kx} \qquad (C = e^c)$$

Men vi ved, at $y > 0$, så vi kan med det samme skrotte det irriterende numerisk-tegn.

3) $y < 0$

Dette tilfælde minder meget om tilfælde 2 - vi kan i sidste ende ikke tillade os at skrotte numerisk-tegnet - men til gengæld får vi ligningen

$$-y = Ce^{kx}$$

eller

$$y = -Ce^{kx}$$

Men vi kan tillade os at erstatte den ukendte integrationskonstant C med den ligeså ukendte $-C$, hvorved ligningen bliver

$$y = -(-Ce^{kx}) = Ce^{kx}$$

Løsningen til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

ses altså at være den eksponentielle udvikling

$$y = Ce^{kx}$$

Indenfor matematik foretrækker man at skrive eksponentielle udviklinger på formen

$$y = b \cdot a^x$$

og vi får altså sammenhængen

$$a = e^k$$

mellem a og k.

Eksponentielle udviklingers egenskaber turde være velkendte, så vi omtaler dem ikke yderligere.

Bemærk dog, at det er meget let at undersøge, om et givet talmateriale vokser lineært eller eksponentielt - vi indtegner bare talmaterialet på almindeligt millimeter-papir eller på enkeltlogaritmisk papir (ELK) og ser, om vi får en ret linie.

Så let er det ikke med de to andre former for vækst:

Sætning 6 (LS)

Løsningen til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = ay + b \quad , \quad a \neq 0$$

er af formen

$$y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$$

hvor C er en integrationskonstant.

Bevis:

Igen skal vi opdele i tre tilfælde:

1) $\quad y = -\dfrac{b}{a}$

Her er højresiden 0, og dette betyder, at $\frac{dy}{dx}$ er en konstant. Men denne konstant er jo $-\frac{b}{a}$, så vi ser, at dette er en løsning til differentialligningen.

Vi kan skrive denne løsning på formen $y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ ved at sætte $C = 0$.

2) $y > -\frac{b}{a}$

Nu er højresiden forskellig fra 0, så vi kan separere differentialligningen:

$$\frac{dy}{dx} = ay + b$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{dy}{ay+b} = dx$$

$$\Updownarrow$$

$$\int \frac{dy}{ay+b} = \int dx$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{a}\ln|ay+b| = x + k$$

$$\Updownarrow$$

$$|ay+b| = a\exp(x+k) = Ce^{x} \qquad (C = ae^{k})$$

Vi er i det tilfælde, hvor indmaden i numerisk-tegnet er positiv, så vi kan droppe dette tegn:

$$\Updownarrow$$

$$y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$$

3) $y < -\frac{b}{a}$

En opgave!

Når denne type differentialligning optræder i praksis, så er $a < 0$. Dette betyder, at vi får en *hæmmet vækst*:

Eksempel

I en atomreaktor dannes der hele tiden atomkerner af den radioaktive isotop Xe-131 med konstant hastighed b. Samtidigt henfalder disse kerner med hastigheden $k \cdot f(t)$, hvor k er henfaldskonstanten for Xe-131 og $f(t)$ er antallet af kerner til tiden t.
Til at starte med er der ingen kerner, dvs. $f(0) = 0$.
Hvordan udvikler $f(t)$ sig?

Vi starter med at opskrive differentialligningen

$$\frac{df(t)}{dt} = b - k \cdot f(t)$$

Den generelle løsning er umiddelbart

$$f(t) = Ce^{-kt} - \frac{b}{-k} = Ce^{-kt} + \frac{b}{k}$$

og anvender vi begyndelsesbetingelsen $f(0) = 0$, så fås

$$0 = Ce^{-0} + \frac{b}{k} \quad \Leftrightarrow \quad C = -\frac{b}{k}$$

Løsningen er altså

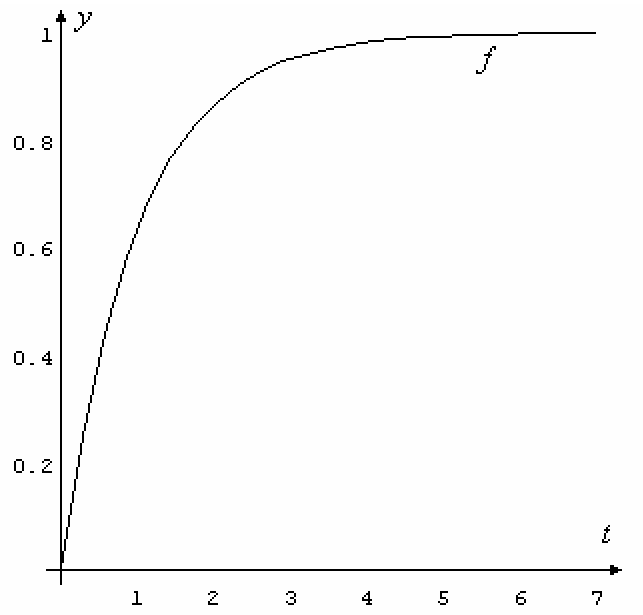
$$f(t) = \frac{b}{k} - \frac{b}{k}e^{-kt} = \frac{b}{k}(1 - e^{-kt})$$

Det ses, at

$$f(t) \to \frac{b}{k} \qquad \text{for} \qquad t \to \infty$$

- man siger, at funktionen f bliver mættet med mætningsgrad $\frac{b}{k}$.

Nedenfor er vist grafen for f med værdierne $b = k = 1$.



Endelig har vi den *logistiske vækst*:

Sætning 7 (FS)

Den logistiske differentialligning

$$\frac{dy}{dx} = y(b - ay) \ \ , \ \ a > 0 \ , b > 0$$

har den fuldstændige løsning

a) $y = 0 \ ,$ $\qquad x \in \mathbf{R}$

b) $y = \dfrac{b}{a} \ ,$ $\qquad x \in \mathbf{R}$

c) $y = \dfrac{b/a}{1 + Ce^{-bx}} \ ,$ $\qquad x \in \mathbf{R}$

d) $y = \dfrac{b/a}{1 - Ce^{-bx}} \ ,$ $\qquad x > \dfrac{\ln C}{-b}$

e) $y = \dfrac{b/a}{1 - Ce^{-bx}} \ ,$ $\qquad x < \dfrac{\ln C}{-b}$

hvor $C > 0$ er en integrationskonstant.

Bevis:

Vi skal dele op i hele 5 tilfælde, alt efter fortegnet for højresiden $y(b-ay)$. Disse tilfælde er

a) $y = 0$

b) $y = \frac{b}{a}$

c) $0 < y < \frac{b}{a}$

d) $y > \frac{b}{a}$

e) $y < 0$

Vi betragter kun tilfælde c), idet dette er det interessante tilfælde.

Vi laver separation af de variable:

$$\frac{dy}{dx} = y(b-ay)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{dy}{y(b-ay)} = dx$$

Vi har nu brug for at vide, at

$$\frac{1}{y(b-ay)} = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{\frac{b}{a} - y}\right)$$

hvilket let kan bevises ved at sætte højresiden på fællesnævner.

$$\frac{1}{b}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{\frac{b}{a} - y}\right)dy = dx$$

$$\Updownarrow$$

$$\int \frac{1}{b}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{\frac{b}{a} - y}\right)dy = \int dx$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{b}\left(\ln|y| - \ln\left|\tfrac{b}{a} - y\right|\right) = x + k$$

$$\Updownarrow$$

$$\ln\frac{|y|}{\left|\frac{b}{a} - y\right|} = bx + k$$

Idet $0 < y < \frac{b}{a}$ kan vi ignorere numerisk-tegnene, og vi får

$$\frac{y}{\frac{b}{a} - y} = e^{bx+k}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\frac{b}{a} - y}{y} = Ce^{-bx} \qquad\qquad (C = e^{-k})$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{b}{ay} - 1 = Ce^{-bx}$$

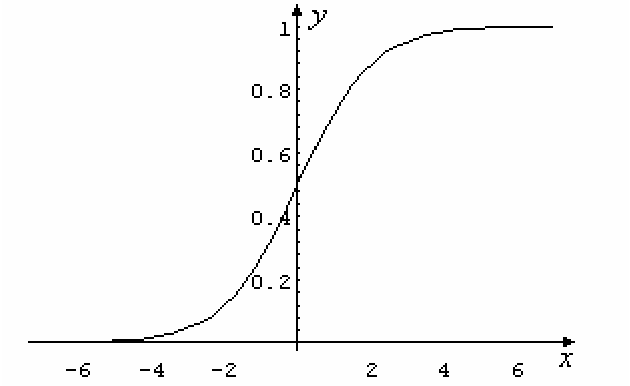
$$\Updownarrow$$

$$\frac{b}{ay} = 1 + Ce^{-bx}$$

$$\Updownarrow$$

$$y = \frac{b/a}{1 + Ce^{-bx}}$$

Nedenfor er vist en typisk løsningskurve til den logistiske vækst ($a = b = C = 1$).



Som det ses, har grafen to vandrette asymptoter:

Sætning 8 (LS)

Den logistiske kurve

$$y = \frac{b/a}{1 + Ce^{-bx}} \quad , \ a, b, C > 0$$

har de vandrette asymptoter med ligningerne

$$y = 0 \qquad \text{og} \qquad y = \frac{b}{a}$$

Bevis:

Vi viser faktisk, at

$$\frac{b/a}{1+Ce^{-bx}} \to 0 \quad \text{for} \quad x \to -\infty$$

og

$$\frac{b/a}{1+Ce^{-bx}} \to \frac{b}{a} \quad \text{for} \quad x \to \infty$$

I det første tilfælde går $x \to -\infty$, hvilket betyder at $-bx \to \infty$ og nævneren vokser derfor ubegrænset, hvorimod tælleren holdes konstant.

I det andet tilfælde går $x \to \infty$, $-bx \to -\infty$, hvorved $e^{-bx} \to 0$. Nævneren går altså imod 1.

Tolkningen af dette resultat er, at b/a angiver den øvre grænse for en population, som vokser logistisk.

Eksempel

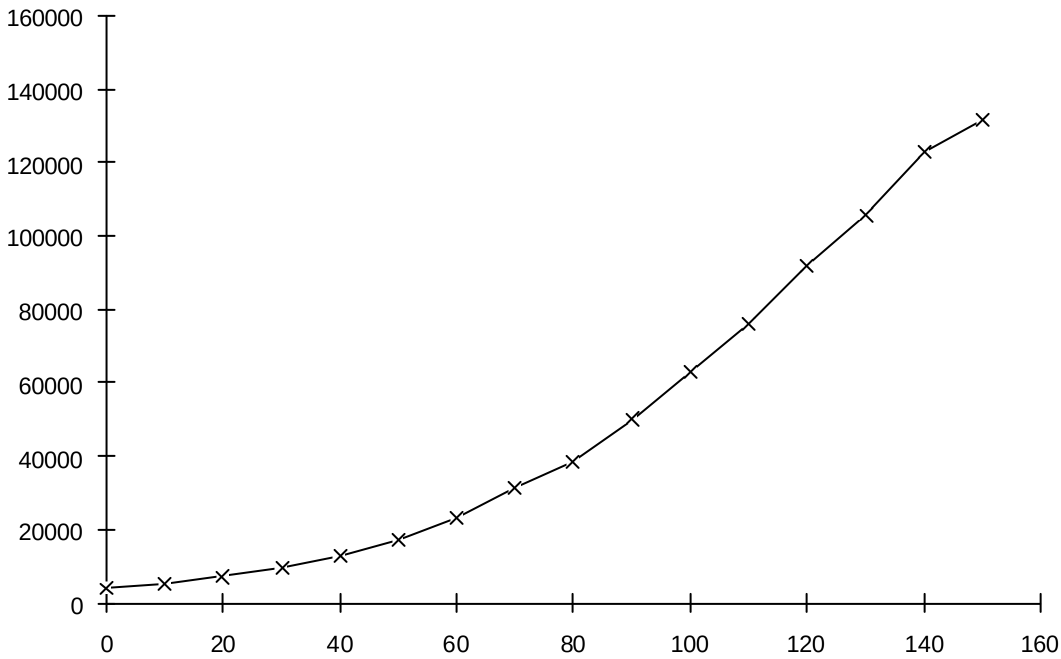
I tabellen nedenfor er angivet USA's befolkningstal i tusinder i perioden 1790-1950:

år	1790	1800	1810	1820	1830	1840
befolkn.	3929	5308	7240	9638	12866	17096

år	1850	1860	1870	1880	1890	1900
befolkn.	23192	31443	38558	50156	62948	75995

år	1910	1920	1930	1940	1950	
befolkn.	91972	105711	122775	131669	150697	

Grafen for disse data er angivet nedenfor - x-aksen angiver antal år efter 1790 og y-aksen befolkningstallet i tusinder.



Grafen ligner en logistisk kurve, og det interessante er nu, hvilke konstanter a, b og C, som giver den bedste tilpasning til kurven. Idet der er hele 3 ukendte variable, så er dette ikke helt nemt. Følgende metode kan bruges:

1) Find hældningen y' af tangenten til kurven i hvert datapunkt.
(Tangenten tegnes på bedste beskub)

2) Plot $\dfrac{y'}{y}$ som funktion af y på almindeligt mm-papir. Bestem a og b ud fra den bedste rette linie.
(Den logistiske differentialligning kan omskrives til $\dfrac{y'}{y} = b - ay$)

3) Plot $\dfrac{b/a}{y} - 1$ som funktion af x på enkeltlogaritmisk papir og bestem konstanten C.

Denne sidste grafs retlinethed bestemmer, hvorledes modellen passer med måledataerne.

Gennemføres dette program, så fås

$$\frac{b}{a} \approx 197200$$

hvilket tolkes som, at USA's befolkning maksimalt kan være på 197200000, dvs. på 197 millioner.
Dette holder dog ikke, i 1980 var USA's befolkning på 226,5 millioner.

Dette kan man forklare ved, at den kraftige mekanisering af USA's landbrug i efterkrigstiden har øget mængden af ressourcer og dermed bæreevnen for USA's befolkning.

Tilsvarende undersøgelser kan naturligvis gennemføres med talmateriale, som man formoder følger en hæmmet vækst.

Opgaver

4.1 Nedenstående tabel viser, hvorledes Færøernes landbefolkning har udviklet sig siden år 1900:

år	befolkning
1900	13600
1910	15900
1920	18900
1930	21000
1935	22100
1945	24800
1950	26100
1955	26300
1960	27200
1966	27400

a) Eftervis, at der er tale om en logistisk vækst og find en forskrift for denne vækst.

b) Forudsig den maksimale landbefolkning på Færøerne.

4.2 En funktion f opfylder, at

$$f'(x) = 10 \cdot f(x) \cdot (w - 10f(x))$$

hvor w er en ukendt konstant.
Endvidere har grafen for f de vandrette asymptoter med ligningerne

$$y = 0 \qquad \text{og} \qquad y = 20$$

Endelig gælder, at

$$f(0) = 10$$

Bestem en forskrift for funktionen f.

3.5 Anden ordens differentialligninger

Vi skal nu undersøge *anden ordens differentialligninger*. Dette er differentialligninger, som involverer både funktionen selv, den afledede og den dobbelt afledede af funktionen. (Vi vil dog ikke hér se på eksempler, hvori den afledede optræder.)
Sådanne differentialligninger optræder kun sjældent indenfor dynamiske systemer, men til gengæld i hobetal indenfor fysikken. Hvorfor nu det?
Newtons 2. lov siger, at en partikel med massen m, der udsættes for en kraft F, vil bevæge sig med accelerationen a, og der gælder ligningen

$$F = ma$$

Men accelerationen er den dobbelt afledede af stedfunktionen $x(t)$, så vi får

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m}$$

- en anden ordens differentialligning!

Vi vil studere to typer af anden ordens differentialligninger. Den første er nem nok:

Sætning 9 (LS)

Differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = g(y)$$

har den generelle løsning

$$f(x) = G(x) + kx + l$$

hvor k og l er konstanter, og

$$G(x) = \int (\int g(x)dx)dx$$

(g integreret **to** gange).

Bevis:

Vi indsætter funktionen f i ligningen og får

$$f''(x) = g(x)$$

Denne ligning integreres

$$\int f''(x)dx = \int g(x)dx \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = G_1(x) + k$$

hvor G_1 er en stamfunktion til g, og integreres igen

$$\int f'(x)dx = \int (G_1(x) + k)dx + l$$

hvilket er det samme som

$$f(x) = G(x) + kx + l \,.$$

Bemærk, at fordi vi integrerede to gange, så fik vi to integrationskonstanter, k og l.

For at finde en partikulær løsning f til en sådan differentialligning skal vi altså have to oplysninger om f - traditionelt anvender man et af følgende:

1) f er fastlagt i to punkter:

$$f(x_0) = y_0 \quad \text{og} \quad f(x_1) = y_1$$

2) f og f' er fastlagt i et punkt:

$$f(x_0) = y_0 \quad \text{og} \quad f'(x_0) = v_0$$

Der findes dog mange andre muligheder!
Dette er typisk for anden ordens differentialligninger - i den generelle løsningsformel optræder **to** konstanter, som man skal fastlægge med **to** betingelser.

Eksempel

En partikel med massen m bevæger sig i Jordens tyngdefelt. Til tiden 0 befinder den sig i højden h_0 over Jordens overflade. Dens hastighed her er da v_0. Bestem partiklens højde h som funktion af tiden t.
Tyngdekraften F på en partikel med massen m er som bekendt lig

$$F = mg$$

hvor g er tyngdeaccelerationen. Differentialligningen bliver derfor

$$\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{mg}{m} = g$$

hvor g ikke afhænger af hverken h eller t. Integreres to gange fås

$$h(y) = \tfrac{1}{2}gt^2 + kt + l$$

og indsættes begyndelsesbetingelserne

$$h(0) = h_0 \quad \text{og} \quad h'(0) = v_0$$

fås

$$l = h_0 \quad \text{og} \quad k = v_0 \,.$$

Den søgte løsning er da

$$h(t) = \tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0$$

- en fra fysikundervisningen velkendt formel.

Den anden type differentialligninger, vi skal studere, optræder indenfor fysikken i forbindelse med bl.a. svingninger. VI starter med løsningsformlen:

Sætning 10 (FS)

a) Differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k^2 y \quad , \quad k \neq 0$$

har den generelle løsning

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$$

hvor c_1 og c_2 er integrationskonstanter.

b) Differentialligningen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -k^2 y \quad , \quad k \neq 0$$

har den generelle løsning

$$y = c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx)$$

hvor c_1 og c_2 er integrationskonstanter.

Vi bemærker, at i begge tilfælde har differentialligningen faktisk formen

$$y'' = Ky$$

og at forskellen mellem de to tilfælde kun ligger i fortegnet for K. Vi løser derfor begge differentialligningerne under ét.
For at kunne bevise løsningsformlen ovenfor har vi brug for adskillige hjælpesætninger:

Sætning 11

a) Hvis funktionerne f og g begge er løsninger til differentialligningen

$$y'' = Ky$$

så er $f + g$ ligeledes en løsning.

b) Hvis f er en løsning til differentialligningen

$$y'' = Ky$$

så er $a \cdot f$ ligeledes en løsning, hvor a er et vilkårligt tal.

Bevis:

a) Idet både *f* og *g* er løsninger, så gælder, at

$$f''(x) = K \cdot f(x) \quad \text{og} \quad g''(x) = K \cdot g(x).$$

Vi kan nu undersøge, hvorvidt $f + g$ er en løsning:

$$(f+g)''(x) = f''(x) + g''(x) = K \cdot f(x) + K \cdot g(x) =$$

$$K \cdot (f(x) + g(x)) = K \cdot (f+g)(x)$$

Så $f + g$ er en løsning!

b) Idet *f* er en løsning til differentialligningen, så gælder, at

$$f''(x) = K \cdot f(x)$$

Vi undersøger, hvorvidt $a \cdot f$ er en løsning:

$$(a \cdot f)''(x) = a \cdot f''(x) = a \cdot K \cdot f(x) = K \cdot (a \cdot f(x))$$

Så $a \cdot f$ er en løsning!

Sætningen ovenfor viser altså, at vilkårlige *linearkombinationer*, dvs. udtryk af formen

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 + \ldots$$

er løsninger til differentialligningen, når blot $f_1, f_2, f_3, \ldots$ er løsninger.

Vi indfører nu den såkaldte *Wronski-determinant*, opkaldt efter den polske matematiker Jozef Maria Wronski:

Definition 12

Lad *f* og *g* være differentiable funktioner. *Wronski-determinanten* $W(f, g)$ er funktionen

$$W(f,g)(x) = f(x) \cdot g'(x) - f'(x) \cdot g(x)$$

Navnet Wronski-**determinant** kommer af, at man kan skrive

$$W(f,g)(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

Eksempel

Lad funktionerne *f*, *g* og *h* være givet ved

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = \sin x \qquad h(x) = e^x$$

Nogle Wronski-determinanter er da

$$W(f,g)(x)=\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x^2 & \sin x \\ 2x & \cos x \end{vmatrix}=x^2\cos x-2x\sin x$$

$$W(g,h)(x)=\begin{vmatrix} g(x) & h(x) \\ g'(x) & h'(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \sin x & e^x \\ \cos x & e^x \end{vmatrix}=e^x\sin x-e^x\cos x$$

Bemærk, at Wronski-determinanten generelt selv er en funktion.

> **Definition 13**
>
> To funktioner *f* og *g* kaldes *lineært uafhængige*, hvis ligningen
>
> $$a\cdot f(x)+b\cdot g(x)=0 \qquad \text{(for alle værdier af } x\text{)}$$
>
> medfører, at konstanterne a og b begge er 0.

Lineært uafhængige funktioner optræder sjældent indenfor almindelige regnerier, men det er et vigtigt begreb indenfor differentialligninger.

Eksempel

Betragt funktionerne *f*, *g* og *h* givet ved

$$f(x)=x^2 \qquad g(x)=x+1 \qquad h(x)=2x^2$$

Funktionerne *f* og *g* er lineært uafhængige, thi lad os antage, at vi har fundet nogle tal *a* og *b*, således at

$$a\cdot f(x)+b\cdot g(x)=0$$

for alle værdier af x.
Men sætter vi $x=0$ så fås

$$a\cdot f(0)+b\cdot g(0)=a\cdot 0^2+b\cdot 1=b=0$$

og sætter vi $x=-1$ så fås

$$a\cdot f(-1)+b\cdot g(-1)=a(-1)^2+b\cdot 0=a=0$$

Alt i alt ses, at både *a* og *b* er 0.
Funktionerne *f* og *h* er derimod lineært afhængige - f.eks. kan man sætte $a=-2$ og $b=1$. Herved fås

$$a\cdot f(x)+b\cdot g(x)=-2x^2+2x^2=0$$

gældende for alle værdier af x.

Sammenhængen mellem Wronski-determinanten og lineær uafhængighed er at finde i følgende sætning:

Sætning 14

f og g er lineært afhængige

$\Updownarrow$

$W(f,g)(x)=0$ for alle x.

Bevis:

f og g er lineært afhængige

$\Updownarrow$

der findes tal a og b, som ikke begge er 0, således at

$a\cdot f(x)+b\cdot g(x)=0$

for alle x

$\Updownarrow$

$$\frac{g(x)}{f(x)}=-\frac{a}{b} \quad \text{for alle } x$$

$\Updownarrow$

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)'=0 \quad \text{for alle } x$$

$\Updownarrow$

$$\frac{f(x)\cdot g'(x)-f'(x)\cdot g(x)}{f(x)^2}=0 \qquad \text{for alle } x$$

$\Updownarrow$

$$\frac{W(f,g)(x)}{f(x)^2}=0 \qquad \text{for alle } x$$

$\Updownarrow$

$W(f,g)(x)=0$ for alle x.

(Her antog vi, at $b\neq 0$. Men beviset kan alligevel gennemføres, hvis $b=0$, for i så fald er $a\neq 0$, og vi kan differentiere $\frac{f(x)}{g(x)}$).

Vi kan nu vende tilbage til differentialligningen fra før:

Sætning 15

Lad f og g begge være løsninger til differentialligningen

$$y'' = Ky$$

Så er deres Wronski-determinant en konstant funktion:

$$W(f,g)(x) = c$$

Bevis:

Idet både f og g er løsninger til differentialligningen, så gælder

$$f''(x) = K \cdot f(x) \quad \text{og} \quad g''(x) = K \cdot g(x).$$

For at bevise, at Wronski-determinanten er en konstant, så differentierer vi den og får 0:

$$W(f,g)'(x) = (f(x) \cdot g'(x) - f'(x) \cdot g(x))' =$$

$$(f(x) \cdot g'(x))' - (f'(x) \cdot g(x))' =$$

$$f'(x) \cdot g'(x) + f(x) \cdot g''(x) - f''(x) \cdot g(x) - f'(x) \cdot g'(x) =$$

$$f(x) \cdot g''(x) - f''(x) \cdot g(x) =$$

$$f(x) \cdot K \cdot g(x) - K \cdot f(x) \cdot g(x) = 0$$

Vi vil nu bevise, at differentialligningen $y'' = K \cdot y$ kan løses ved blot at finde to lineært uafhængige løsninger:

Sætning 16

Lad f og g være to lineært uafhængige løsninger til

$$y'' = K \cdot y$$

Lad endvidere h være en løsning.
Da er h en linearkombination af f og g, dvs. der findes konstanter c_1 og c_2, således at der for alle x gælder

$$h(x) = c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot g(x)$$

Bevis:

Ifølge sætning 15 er alle tre nedenstående Wronski-determinanter

$$W(f,g) \qquad W(f,h) \qquad \text{og} \qquad W(g,h)$$

konstanter. Vi glemmer derfor, at de faktisk er funktioner og opfatter dem som tal. Idet f og g er lineært uafhængige, fortæller sætning 14 os, at

$$W(f,g) \neq 0.$$

Vi har fra udtrykket for Wronski-determinanten følgende to ligninger

$$\begin{cases} f(x)\cdot h'(x) - f'(x)\cdot h(x) = W(f,h) \\ g(x)\cdot h'(x) - g'(x)\cdot h(x) = W(g,h) \end{cases}$$

Vi vil opfatte det som et ligningssystem med to ubekendte, nemlig $h(x)$ og $h'(x)$, og vi vil løse dette system for $h(x)$. For at gøre dette ganger vi den første ligning med $g(x)$ og den anden ligning med $f(x)$ og subtraherer derefter de to ligninger:

$$\begin{cases} f(x)\cdot h'(x) - f'(x)\cdot h(x) = W(f,h) \\ g(x)\cdot h'(x) - g'(x)\cdot h(x) = W(g,h) \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} f(x)\cdot h'(x)\cdot g(x) - f'(x)\cdot h(x)\cdot g(x) = W(f,h)\cdot g(x) \\ g(x)\cdot h'(x)\cdot f(x) - g'(x)\cdot h(x)\cdot f(x) = W(g,h)\cdot f(x) \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$-f'(x)\cdot h(x)\cdot g(x) + g'(x)\cdot h(x)\cdot f(x) = W(f,h)\cdot g(x) - W(g,h)\cdot f(x)$$

$\Updownarrow$

$$h(x)(f(x)\cdot g'(x) - f'(x)\cdot g(x)) = W(f,h)\cdot g(x) - W(g,h)\cdot f(x)$$

$\Updownarrow$

$$h(x)\cdot W(f,g) = -W(g,h)\cdot f(x) + W(f,h)\cdot g(x)$$

$\Updownarrow$

$$h(x) = -\frac{W(g,h)}{W(f,g)} f(x) + \frac{W(f,h)}{W(f,g)} g(x)$$

(Husk, at $W(f,g) \neq 0$).

Sætter vi nu

$$c_1 = -\frac{W(g,h)}{W(f,g)} \qquad \text{og} \qquad c_2 = \frac{W(f,h)}{W(f,g)}$$

så har vi faktisk bevist sætningen.

For at bevise hovedsætningen - sætning 10 - mangler vi blot at finde nogle lineært uafhængige løsninger til de to typer differentialligninger:

Sætning 17

a) Funktionerne

$$f_1(x) = \cos(kx) \qquad \text{og} \qquad f_2(x) = \sin(kx)$$

er lineært uafhængige løsninger til differentialligningen

$$y'' = -k^2 y$$

b) Funktionerne

$$g_1(x) = e^{kx} \qquad \text{og} \qquad g_2(x) = e^{-kx}$$

er lineært uafhængige løsninger til differentialligningen

$$y'' = k^2 y$$

Bevis:

a) Vi viser først, at f_1 og f_2 faktisk er løsninger til differentialligningen:

$$f_1''(x) = (\cos(kx))'' = (-k\sin(kx))'' = -k^2\cos(kx) = -k^2 f_1(x)$$

og

$$f_2''(x) = (\sin(kx))'' = (k\cos(kx))' = -k^2\sin(kx) = -k^2 f_2(x)$$

Derefter viser vi, at funktionerne er lineært uafhængige ved at beregne deres Wronski-determinant:

$$W(f_1, f_2)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(kx) & \sin(kx) \\ -k\sin(kx) & k\cos(kx) \end{vmatrix} =$$

$$\cos(kx)\cdot k\cos(kx) - \sin(kx)\cdot(-k\sin(kx)) =$$

$$k\cdot\cos^2(kx) + k\cdot\sin^2(kx) = k(\sin^2(kx) + \cos^2(kx)) = k\cdot 1 = k$$

og idet k ikke kan være 0, så er de to funktioner lineært uafhængige.

b) forløber på helt samme måde!

Eksempel

Vi skal finde løsningen f til ligningen

$$f''(x) = -4f(x)$$

opfyldende

$$f(0) = 2 \qquad \text{og} \qquad f'(0) = 6$$

Dette er en anden ordens differentialligning med $k = 2$. Den generelle løsning er derfor

$$f(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x)$$

hvor vi blot skal bestemme konstanterne *A* og *B*.
Vi differentierer *f*:

$$f'(x) = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)$$

og indsætter de to betingelser:

$$f(0) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = A \cdot 1 + B \cdot 0$$

$$f'(0) = 6 \quad \Leftrightarrow \quad 6 = A \cdot 0 + B \cdot 2$$

som løses til

$$A = 2 \qquad \text{og} \qquad B = 3$$

Løsningen er derfor

$$f(x) = 2\sin(2x) + 3\cos(2x)$$

Eksempel

Vi skal finde løsningen *g* til ligningen

$$g''(x) = -4g(x)$$

opfyldende

$$g(0) = 2 \qquad \text{og} \qquad g'(0) = 6$$

Dette er en anden ordens differentialligning med $k = 2$. Den generelle løsning er derfor

$$g(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x}$$

hvor vi blot skal bestemme konstanterne *A* og *B*.
Vi differentierer *g*:

$$g'(x) = 2Ae^{2x} - 2Be^{-2x}$$

og indsættelse af de to betingelser give ligningerne

$$2 = A + B \qquad \text{og} \qquad 6 = 2A - 2B$$

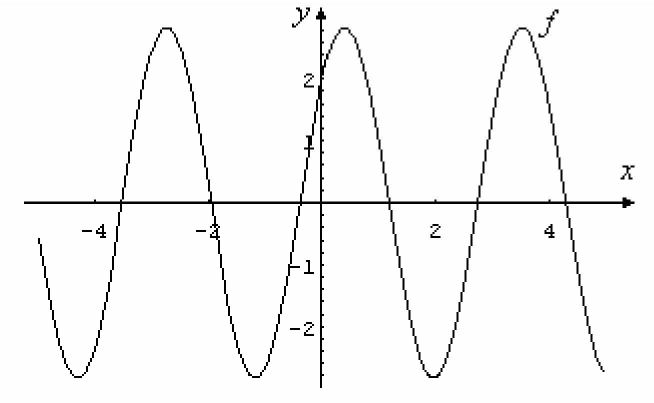
som løses til

$$A = \tfrac{5}{2} \qquad \text{og} \qquad B = -\tfrac{1}{2}$$

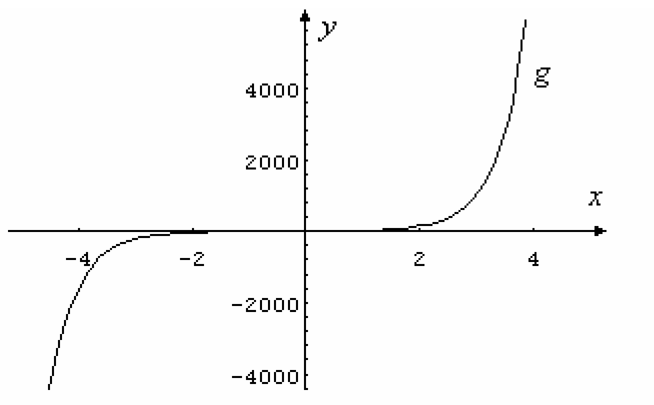
Funktionen *g* er derfor givet ved

$$g(x) = \tfrac{5}{2}e^{2x} - \tfrac{1}{2}e^{-2x}$$

De to løsninger *f* og *g* til næsten den samme differentialligninger er meget forskellige - se selv på graferne:



og



Funktionen *f* er en ganske fredelig svingning, og funktionsværdierne er begrænsede til mellem -3 og 3.
g vokser derimod ganske uhæmmet, og der er ingen periodiske tendenser.

Opgaver

5.1 Løs følgende differentialligninger:

a) $y'' = 4y$ med $f(0) = 1$ $f'(0) = 4$

b) $y'' = -9y$ med $g(0) = 1$ $g(\frac{\pi}{2}) = -2$

c) $y'' = y$ med $h(0) = h'(0) = 10$

d) $y'' = (\ln 2)^2 y$ med $j(0) = 2$ $j'(0) = \ln 2$

5.2 Bestem nedenstående Wronski-determinanter:

a) $W(a^x, b^x)$ b) $W(x^a, x^b)$

c) $W(a^x, x^a)$ d) $W(\sin(ax), \sin(bx))$

e) $W(x^2 - 3x + 2, x^2 + 2x - 3)$

5.3 Betragt differentialligningen.

$$y'' = 4y$$

Bestem den løsning, som har lokalt ekstremum i punktet (0,5).
Bestem endvidere værdimængden for denne løsning.

5.4 Betragt differentialligningen.

$$y'' = -4y$$

Bestem den løsning, som har lokalt ekstremum i punktet (0,5).
Bestem endvidere værdimængden for denne løsning.

3.6 Numerisk løsning

Vi skal nu se på, hvorledes man kan løse differentialligninger numerisk. Den nemmeste metode, *Eulers metode*, gør vi en del ud af, men de såkaldte *Runge-Kutta-metoder* kun berøres overfladisk.

Vi starter med at se, hvorledes man kan finde tangenter til løsningskurver til en differentialligning uden at kende selve kurven:

Eksempel

Givet: Differentialligningen $\frac{dy}{dx} = x^2 + y$.

Find: En ligning for tangenten for den løsningskurve, som går gennem punktet (1,3).

Svar: Kalder vi løsningen til differentialligningen ovenfor for *f*, så ved vi, at

$$f(1) = 3.$$

Endvidere ved vi, at

$$f'(1) = 1^2 + f(1) = 1^2 + 3 = 4$$

så tangentligningen er umiddelbart

$$y = 4(x-1) + 3$$

Dette eksempel viser, at vi altid kan finde **tangenter** til en løsningskurve, selvom vi ikke er i stand til at finde selve kurven.

Strategien i Eulers metode er at approximere en løsningskurve med dens tangenter.

Betragter vi eksemplet ovenfor, så kan vi beregne, at

$$f(2) \approx 4(2-1) + 3 = 7.$$

Vi ser nu , at tangenten til løsningskurven gennem punktet (2,7) har ligningen

$$f'(2) = 2^2 + 7 = 11$$

$$y = 11(x-2) + 7$$

og en tilnærmet værdi for $f(3)$ er derfor

$$f(3) \approx 11(3-2) + 7 = 18$$

På denne måde kan man så fortsætte.

Metoden er ikke særligt præcis, som et senere eksempel vil vise, men vælger man skridtlængden lille, så kan man alligevel få brugbare resultater.

Eulers metode er generelt opskrevet:

Metode 18

Givet differentialligningen

$$y' = F(x, y)$$

og begyndelsesbetingelsen

$$f(x_0) = y_0$$

så kan *f* approximeres ved:

0) Vælg en skridtlængde h og sæt $n = 0$
1) Sæt $x_{n+1} = x_n + h$
2) Sæt $y_{n+1} = y_n + F(x_n, y_n) \cdot h$
3) Sæt $n = n + 1$
4) Gå tilbage til 1).

Eksempel/øvelse

Vi vil betragte differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = y$$

med begyndelsesbetingelsen $f(0) = 1$

a) Vis, at løsningen til denne differentialligning er $f(x) = e^x$

b) I nedenstående skema er udregnet nogle approximerede funktionsværdier med $h = 0{,}5$. Undersøg, hvorledes skemaet er opbygget. (I sidste søjle er angivet den eksakte værdi til sammenligning).

n	x_n	y_n	$F(x_n, y_n)$	e^x
0	0	1	1	1
1	0,5	1,5	1,5	1,6487
2	1	2,25	2,25	2,7183
3	1,5	3,375	3,375	4,4817
4	2	5,0625	5,0625	7,3891
5	2,5	7,59375	7,59375	12,1825

Som det ses, er nøjagtigheden ikke specielt god.
Ovenstående skema kan med fordel bruges som skabelon til et regneark.

c) Approximer funktionen *f* på intervallet [0;1] ved at sætte $h = 0{,}1$.

d) Lav en graf over approximationen fra c) og sammenlign med grafen for funktionen $f(x) = e^x$

Eulers metode kan uden videre overføres til koblede differentialligninger, og computerprogrammet DYMOS anvender da normalt også denne metode.

To andre, mere nøjagtige metoder er *Runge-Kuttas 2. ordens metode* og *Runge-Kutta's 4. ordens metode*. Disse er omtalt i opgaverne.

Opgaver

6.1 I Runge-Kutta's 2. ordens metode gør man følgende:

0) Sæt $n = 0$
1) Sæt $x_{n+1} = x_n + h$
2) Sæt $y'_n = y_n + F(x_n, y_n) \cdot h$
3) Sæt $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2} \cdot (F(x_n, y_n) + F(x_{n+1}, y'_n) \cdot h$
4) Sæt $n = n + 1$ og gå tilbage til skridt 1.

a) Approximér en løsning til differentialligningen

$$y' = y \qquad \text{med} \qquad f(0) = 1$$

på intervallet [0;1] med en skridtlængde $h = 0{,}5$

b) Beskriv i ord, hvad denne metode gør.

6.2 I Runge-Kutta's 4. ordens metode gør man følgende

0) Sæt $n = 0$
1) Sæt $x_{n+1} = x_n + h$ og $x'_n = x_n + \frac{h}{2}$
2) Sæt $y'_n = y_n + \frac{1}{2} F(x_n, y_n) \cdot h$
3) Sæt $y''_n = y_n + \frac{1}{2} \cdot F(x'_n, y'_n) \cdot h$
4) Sæt $y'''_n = y_n + F(x'_n, y''_n) \cdot h$
5) Sæt

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} \cdot (F(x_n, y_n) + 2F(x'_n, y'_n) + 2F(x'_n, y''_n) + F(x_{n+1}, y'''_n)) \cdot h$$

6) Sæt $n = n + 1$ og gå tilbage til skridt 1.

Løs differentialligningen fra opgave 6.1 på intervallet [0,1] med $h = 1$.

6.3 Vi skal nu se på sammenhængen mellem numeriske løsninger af differentialligninger og numerisk integration:

a) Vis, at funktionen $F(x) = \int_a^x f(x)\,dt$ er løsningen til differentialligningen $y' = f(x)$ med $f(a) = 0$

b) Vis, at $F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$

c) Lad A være den approximerede værdi for $F(b)$ opnået vha. Eulers metode med en skridtlængde på $h = \dfrac{b-a}{n}$. Vis, at $A = V_n$ - den n'te venstresum.

6.4 Betragt nedenstående differentialligning

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 2x + y^2$$

Bestem en ligning for tangenten til den løsningskurve, som går gennem $(2,-1)$.

6.5 Hvordan løser man en 2. ordens differentialligning numerisk? Lad os betragte differentialligningen

$$y'' = -y \qquad \text{med} \qquad f(0) = 0 \qquad \text{og} \qquad f'(0) = 1.$$

a) Vis, at $f(x) = \sin x$

Man indfører nu en hjælpevariabel z givet ved $z = y'$.

b) Vis, at differentialligningen ovenfor kan omskrives til det koblede system af differentialligninger givet ved

$$y' = z \qquad \text{og} \qquad z' = -y$$

med begyndelsesbetingelserne

$$x = 0 \;\Rightarrow\; y = 0 \text{ og } z = 1$$

Systemet kan nu løses numerisk ved følgende fremskrivningsformel:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot z_n \qquad \text{og} \qquad z_{n+1} = z_n - h \cdot y_n$$

c) Løs systemet i intervallet $x \in [0;2\pi]$ med en skridtlængde på $h = 0{,}5$.

d) Lav et plot af sammenhørende værdier af (y,z) i et koordinatsystem - både for den approximerede løsning og for den eksakte løsning. Sammenlign.
(Et sådant plot kaldes for et *faseplot*).

3.7 En økologisk model

Vi vil i dette kapitel kort præsentere en økologisk model.

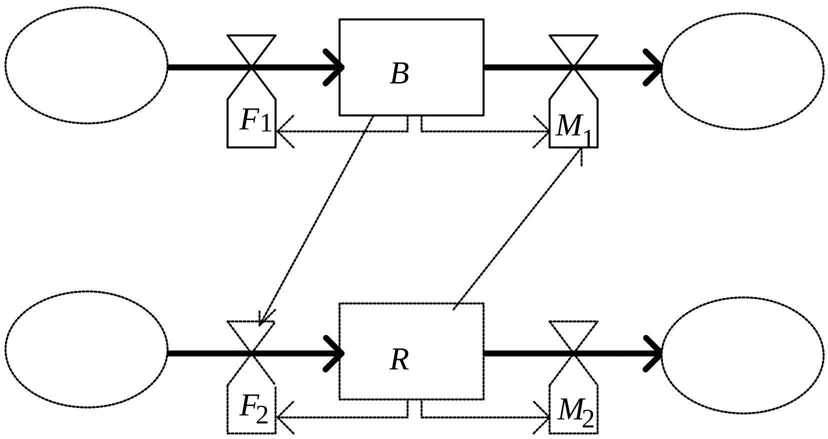
Historisk set opstod denne model uafhængig at hinanden i Italien og i USA i 1920'erne. I Italien observerede matematikeren Vito Volterra periodiske tendenser mellem antallet af spisefisk og rovfisk (hajer og rokker) i Middelhavet. Samtidigt observerede amerikaneren Alfred Lotka lignende tendenser i antallet af sneharer og losser i Canada.

Modellen, som beskriver disse fænomener, kaldes Volterra-Lotka's rovdyr-byttedyr-model og indeholder systemvariablerne

$B(t) =$ antal byttedyr til tiden t

$R(t) =$ antal rovdyr til tiden t

Disse to variable indgår i følgende SD-diagram:



Byttedyrenes antal, $B(t)$, kan ændres på to måder:

1) Der kan fødes nye byttedyr. Fertiliteten F_1 antages at være proportional med antallet af allerede eksisterende byttedyr, så

$$F_1 = a_1 B$$

2) Der kan dø byttedyr. Disse dør enten som følge af naturlige årsager, eller fordi de bliver ædt af rovdyrene. Den naturlige død er proportional med antallet af byttedyr, mens antallet af ædte dyr er proportional med både antallet af rovdyr og byttedyr, dvs.

$$M_1 = a_2 B(t) + cB(t) \cdot R(t)$$

Tilsvarende kan rovdyrenes antal ændres på to måder:

1) Der kan fødes nye rovdyr. Dette sker af to årsager; dels pga. den naturlige tilvækst i rovdyrenes antal, $b_1 R(t)$, og dels pga. et øget antal byttedyr, $dB(t) \cdot R(t)$. Fertiliteten er derfor

$$F_2 = b_1 R(t) + dB(t) \cdot R(t)$$

2) Rovdyrene kan dø en naturlig død (de bliver jo nok ikke ædt af byttedyrene), så

$$M_2 = b_2 R(t)$$

Differentialligningerne bliver derfor

$$\frac{dB}{dt} = a_1 B - a_2 B - cBR \qquad \text{og} \qquad \frac{dR}{dt} = b_1 R + dBR - b_2 R$$

eller, hvis man sætter $a = a_1 + a_2$ og $b = -(b_1 + b_2)$:

$$\frac{dB}{dt} = aB - cBR \qquad \text{og} \qquad \frac{dR}{dt} = -bR + dBR$$

Af fysiske årsager må konstanterne a, b, c og d alle være positive - det eneste underlige er måske, at b skal være positiv; men dette fortolkes som, at hvis byttedyrene lige pludseligt skulle uddø, så ville den naturlige befolkningstilvækst for rovdyrene være negativ, idet deres livsgrundlag vil være borte.

Disse differentialligninger kan ikke løses eksakt; men man kan dog bevise følgende:

Sætning 18

Lad $(B(t), R(t))$ være en løsning til ligningssystemet ovenfor. Da gælder, at

$$a \ln R + b \ln B - cR - dB = H$$

hvor H er en konstant.

Bevis:

Vi eliminerer den variable t og separerer herefter B or R:

$$\frac{dB}{dt} = aB - cBR \qquad \text{og} \qquad \frac{dR}{dt} = -bR + dBR$$

$\Downarrow$

$$\frac{dB}{dt} = B(a - cR) \qquad \text{og} \qquad \frac{dR}{dt} = R(dB - b)$$

$\Downarrow$

$$\frac{dB}{dR} = \frac{B(a - cR)}{R(dB - b)}$$

$\Downarrow$

$$\frac{dB - b}{B} dB = \frac{a - cR}{R} dR$$

$\Downarrow$

$$\int (d - \frac{b}{B}) dB = \int (\frac{a}{R} - c) dR$$

$\Downarrow$

$$dB - b \ln B = a \ln R - cR + H$$

Man kan således plotte kurven med ligningen

$$a \ln R + b \ln B - cR - dB = H$$

i et (B, R)-koordinatsystem - et såkaldt fasediagram. Den typiske kurve ligner en ellipse lidt.

Opgave

Tegn kurven med ligningen

$$\ln R + \ln B - R - B = -2$$

i et koordinatsystem.

Den periodiske adfærd kan nu forklares ved, at systemets tilstand, som jo er et punkt i fasediagrammet, bevæger sig rundt og rundt i denne ellipse-formede bane.

Opgaver

7.1 Løs Volterra-Lotka's differentialligninger numerisk for

$$a = 0{,}5 \qquad b = 0{,}04 \qquad c = 1{,}5 \qquad d = 0{,}01$$

$$B(0) = 170 \qquad R(0) = 20$$

Brug evt. en computer.
Tegn systemets fasediagram og kommentér resultatet.

7.2 Findes der et såkaldt *ligevægtspunkt* for Volterra-Lotka-systemet, dvs. en værdi for *B* og for *R*, således at både $\frac{dB}{dt}$ og $\frac{dR}{dt}$ er lig 0 ?
Hvorfor kalder man dette for et ligevægtspunkt?

Facitliste

3.2 a) $f(x) = (\frac{4}{3} - \frac{1}{3}x^3)^{-1}$, $x < \sqrt[3]{4}$

b) $g(x) = \arctan(\frac{1}{2}x^2)$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

c) $h(x) = -\sqrt{2\ln(-x) - 1}$, $x < -\sqrt{e}$

d) $j(x) = 0$, $x > 0$ (singulær løsning)

e) $k(x) = 1 - \cos x$, $x \in \mathbf{R}$

f) $l(x) = \exp(\sqrt[3]{3x+1})$, $x \in \mathbf{R}$

g) $m(x) = -\ln(2 - e^x)$, $x < \ln 2$

h) $n(x) = 2x^x$, $x > 0$

i) $q(x) = \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{2}$, $x \in \mathbf{R}$

j) $r(x) = 2e^x + 2$, $x \in \mathbf{R}$

3.3 $f(x) = 0, x > 0$ $g(x) = x, x > 0$ $h(x) = -x, x < 0$

3.4 $a = 1,\ b = 1,\ c = -1$

3.5 $ax^2 + x$, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$

4.2 $f(x) = \dfrac{20}{1 + e^{-2000x}}$

5.1 a) $f(x) = \frac{3}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x}$

b) $g(x) = -2\sin(3x) + \cos(3x)$

c) $h(x) = 10e^x$

d) $j(x) = \frac{3}{2}2^x + \frac{1}{2}2^{-x}$

5.2 a) $\ln(\frac{b}{a})a^x b^x$ b) $(b-a)x^{a+b-1}$

c) $a^x \cdot x^{a-1}(a - x\ln a)$

d) $b\sin(ax)\cos(bx) - a\cos(ax)\sin(bx)$

e) $5x^2 + 10x - 5$

5.3 $f(x) = \frac{5}{2}e^{2x} + \frac{5}{2}e^{-2x}$ $\text{Vm}(f) = [\,5\,,\infty\,[$

5.4 $f(x) = 5\cos(2x)$ $\text{Vm}(f) = [\,-5\,,5\,]$

6.4 $y = 9x - 19$

7.2 Ja

Kapiteloversigt

Separation af de variable

$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$ har løsningen $G^{-1}(F(x)+k)$

$(G(y) = \int g(y)dy \quad F(x) = \int f(x)dx)$

(Husk de singulære tilfælde)
Definitionsmængden er altid et åbent interval.

$\frac{dy}{dx} = f(x)$ har løsningen $F(x) = \int f(x)dx$

$\frac{dy}{dx} = g(y)$ har løsningen $G^{-1}(x+k)$

Vækstmodeller

Lineær vækst kommer fra differentialligningen $y' = a$ og har de lineære funktioner af formen $f(x) = ax + b$ som løsninger

Eksponentiel vækst kommer fra differentialligningen $y' = ky$ og har de eksponentielle udviklinger af formen $f(x) = Ce^{kx}$ som løsninger

Mættet eksponentiel vækst kommer fra differentialligningen $y' = ay + b$. Løsningen er $f(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$. Linien med ligningen $y = -\frac{b}{a}$ er vandret asymptote.

Logistisk vækst kommer fra differentialligningen $y' = y(b - ay)$ og har bl.a. løsningen $f(x) = \frac{b/a}{1 + Ce^{-bx}}$. Linierne med ligningerne $y = 0$ og $y = \frac{b}{a}$ er vandrette asymptoter.

Anden ordens differentialligninger

Differentialligningen $y'' = f(x)$ har løsningen $\int\int f(x)dx\,dx + kx + l$.

Differentialligningen $y'' = k^2 y$ har løsningen $Ae^{kx} + Be^{-kx}$

Differentialligningen $y'' = -k^2 y$ har løsningen $A\sin(kx) + B\cos(kx)$