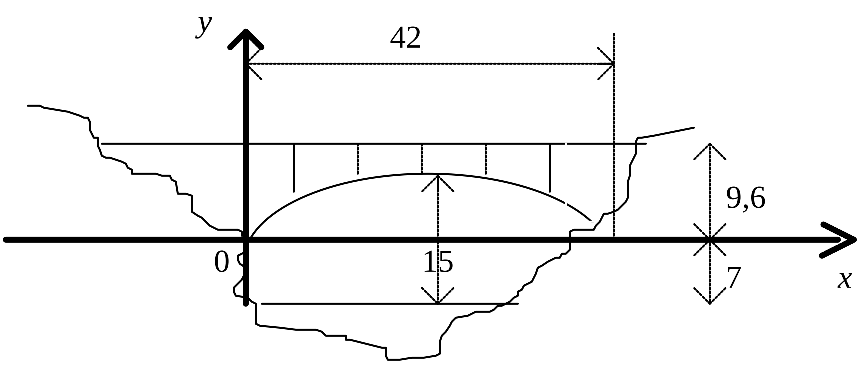
Matematikkens mysterier

- på et obligatorisk niveau

af

Kenneth Hansen

3. Analytisk geometri



En bro

Hvad er mon højden af støttepælene?

3. Analytisk geometri

Indhold

Anvendte symboler

Opgaver er mærket med symbolerne:

L: let opgave eller øveopgave. Der er et facit i facitlisten
M: mellemsvær opgave
S: svær opgave

Sætninger, definitioner og formler er mærket med

FS: sætningen findes i formelsamlinge
LS: lær selv formlen udenad - den findes (underligt nok) **ikke** i formelsamlingen, og du får sikkert brug for den til eksamen

3.1 Koordinatsystemet

Vi skal nu beskæftige os med *analytisk geometri*. Analytisk geometri adskiller sig væsentligt fra *klassisk geometri*, som er det, vi har beskæftiget os med i sidste kapitel om trigonometri.

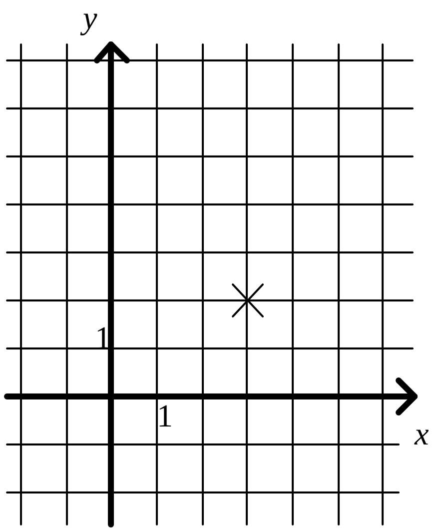
Både klassisk geometri, analytisk geometri og den såkaldte *vektor-geometri*, som I kommer til at snuse til senere, er forskellige arbejdsmetoder eller måske nærmere beskrivelser af - geometri...

I klassisk geometri arbejder man hovedsageligt med liniestykker, vinkler og deslige. Problemet med klassisk geometri er, at den er upraktisk. Hermed menes ikke, at den er uanvendelig; men klassisk geometri kræver en vis mængde "input" for at kunne virke.

Har man f.eks. tre punkter, som tilsammen danner en trekant, så kan den klassiske geometri fortælle, hvorledes man kan beregne vinklerne i denne trekant, **forudsat** at man kender afstanden mellem punkterne. Den kan ikke fortælle, hvorledes man finder (eller beregner) disse afstande. Den kan f.eks. heller ikke sige, **hvor** to ikke-parallelle linjer skærer hinanden.

Endvidere er der et begrænset antal former, som den klassiske geometri kan beskrive: Punkter, linier, cirkler, trekanter og andre polygoner. Parablen, som I skal lære meget om senere, kan også beskrives i den klassiske geometri; men det er en meget besværlig beskrivelse, som I bliver forskånet for! Andre simple objekter, så som spiraler, kan den klassiske geometri slet ikke klare.

I analytisk geometri løser man disse problemer ganske smart - man indfører et koordinatsystem:

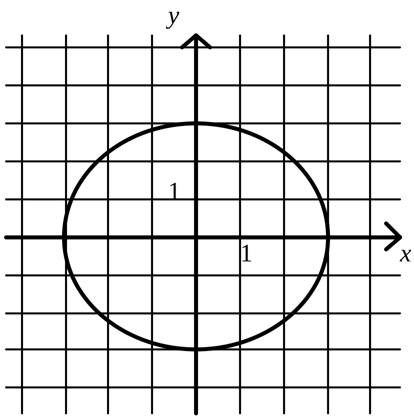


I et koordinatsystem kan ethvert punkt tilskrives et *koordinatsæt* - f.eks. har punktet markeret med et kryds til venstre koordinaterne (3,2).

Fidusen er nu, at man ved hjælp af et punkts koordinater kan få en masse information om dette punkt. Der findes f.eks. en formel til at beregne afstanden mellem to punkter, når deres koordinatsæt er kendte.

Alle disse metoder er ren algebra, og dette betyder faktisk, at alle geometriske problemer kan løses indenfor analytisk geometri uden nogen som helst form for tegninger! Dette bliver dog noget abstrakt, så vi tager tegningerne med.

Indenfor den analytiske geometri beskriver man linier, cirkler og andre geometrisk objekter ved hjælp af deres ligninger:



Cirklen til venstre har f.eks. ligningen:

$$x^2 + y^2 = 9.$$

Dette betyder, at hvis punktet med koordinaterne (x, y) ligger på cirklen, så opfylder koordinaternes talværdier ovenstående ligning. Og omvendt - opfylder et punkts koordinater ligningen, så ligger punktet på cirklen.

F.eks. ligger (3,0) , (0,3) og $(\sqrt{4}, \sqrt{5})$ på cirklen, idet disse koordinatsæt opfylder ligningen, mens (0,0) og (125362,62367) ikke ligger på cirklen.

Nogle gange bruger man *mængdebygger-notationen*; f.eks. ville cirklen ovenfor blive beskrevet som mængen af punkter (eller *punktmængden*)

$$\left\{ (x, y) \,\middle|\, x^2 + y^2 = 9 \right\}$$

Efter den lodrette streg, som kaldes mængdebyggeren, kommer en række betingelser, som punktet foran skal opfylde for at være med i mængden. Det skal læses som:

Mængden af de punkter (x,y) hvorom der gælder, at $x^2 + y^2 = 9$

3.2 Den rette linie

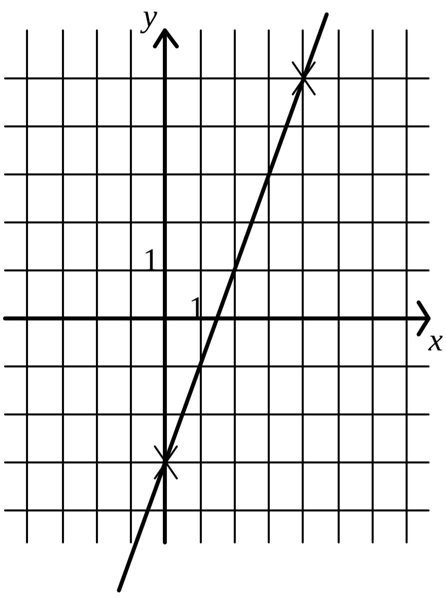
Det er velkendt, at ligningen for den rette linie er

$$y = ax + b.$$

De fleste ved vel også, at tallet a kaldes *hældningskoefficienten*.

Eksempel

Vi vil tegne linien med ligningen $y = 2x - 3$.
Vi starter med at bemærke, at $a = 2$ og $b = -3$.
Den nemmeste måde at tegne en linie på er at finde to punkter på linien og forbinde disse med en lige streg, som gerne må fortsætte ud over punkterne.



Med linien til venstre kan vi nemt finde to punkter:

Vi sætter f.eks. $x = 0$ og får den tilsvarende y-værdi $y = 2 \cdot 0 - 3 = -3$. Det ene punkt er altså (1,-1).

Det andet punkt kunne f.eks. være $(4, 2{\cdot}4 - 3) = (4,5)$, hvor vi sætter x=4.

Vi kan nu tegne linien i et koordinatsystem.

Vi vil nu undersøge den geometriske betydning af tallene a og b. Vi starter med b ved nedenstående øvelse*:*

Øvelse

Tegn i samme koordinatsystem linierne med ligningerne:

$$y = x + 1\ ,\ y = 2x + 1\ ,\ y = 3x + 1\ ,\ y = 1\ ,\ y = -x + 1\ ,\ y = -2x + 1$$

Hov, alle graferne skærer y-aksen i (0,1)!

Som ovenstående øvelse kunne antyde, så har tallet b noget med liniens skæring med y-aksen at gøre. Vi formulerer det i følgende sætning:

Sætning 1 (FS)

Linien med ligningen $y = ax + b$ skærer y-aksen i punktet $(0,b)$

Bevis:

Beviset er for en gangs skyld meget simpelt. Linien skærer y-aksen, netop når x-koordinaten er 0. Vi sætter derfor $x = 0$ i liniens ligning og får, at

$$y = a \cdot 0 + b = b.$$

Linien skærer altså y-aksen i $(0, b)$.

Vi skal nu kigge på hældningskoefficientens geometriske betydning:

Øvelse

Tegn i samme koordinatsystem linierne med ligningerne:

$$y = 2x - 2 \text{ , } y = 2x - 1 \text{ , } y = 2x \text{ , } y = 2x + 1 \text{ , } y = 2x + 2$$

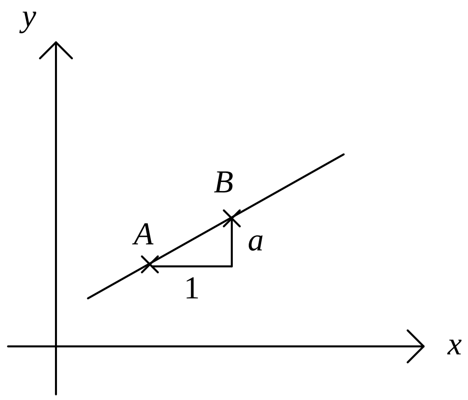
Som det ses af øvelsen, er **linier med samme hældningskoefficient parallelle**.

Øvelse

Tegn i samme koordinatsystem linierne med følgende ligninger:

$$y = -2x \text{ , } y = -x \text{ , } y = 0 \text{ , } y = x \text{ , } y = 2x.$$

Det ses, at **linier med positiv hældning går opad**, mens **linier med negativ hældning går nedad**. Er hældningen 0, så er linien vandret. Endvidere, jo større hældningen er, jo stejlere er linien.



Populært sagt: Når vi går 1 enhed ud af *x*-aksen, så går vi *a* enheder op ad *y*-aksen - se figuren.

Bemærk, at hvis hældnings-koefficienten *a* er negativ, så skal vi gå nedad.

Vi kan præcisere dette i følgende sætning:

> **Sætning 2 (FS)**
>
> Betragt linien med ligningen
> $$y = ax + b$$
> Tilvæksten i *y*-koordinaten ved en tilvækst på 1 for *x*-koordinaten er hældningskoefficienten *a*.

Bevis:

Betragt figuren øverst på siden.
Vi lader punktet *A* have koordinaterne (x_0, y_0) og da *A* ligger på linien, så er *A*´s *y*-koordinat lig:

$$y_0 = a \cdot x_0 + b.$$

Punktet *B* har *x*-koordinaterne (x_1, y_1). Vi gik 1 henad *x*-aksen fra x_0 , så $x_1 = x_0 + 1$, og da *B* også ligger på linien, så er *B*'s *y*-koordinat lig:

$$y_1 = a \cdot (x_0 + 1) + b = y_0 + a.$$

Det ses, at forskellen mellem de to *y*-koordinater netop er *a*:

$$y_1 - y_0 = y_0 + a - y_0 = a$$

Vi kan med det samme bevise følgende sætning:

Sætning 3 (FS)

Lad v være vinklen mellem:linien med ligningen

$$y = ax + b$$

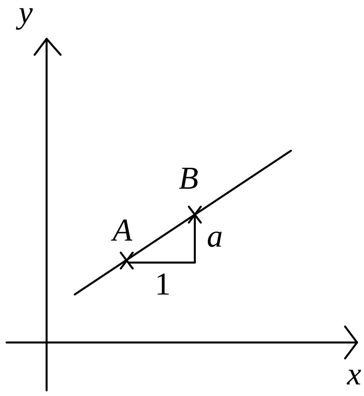
og x-aksen

Da gælder, at

$$a = \tan(v)$$

Bevis:

Betragt følgende trekant:



Vinklen v er netop vinklen A på figuren.

Trekanten er retvinklet, den hosliggende katete har længden 1 og den modstående katete længden a, så må

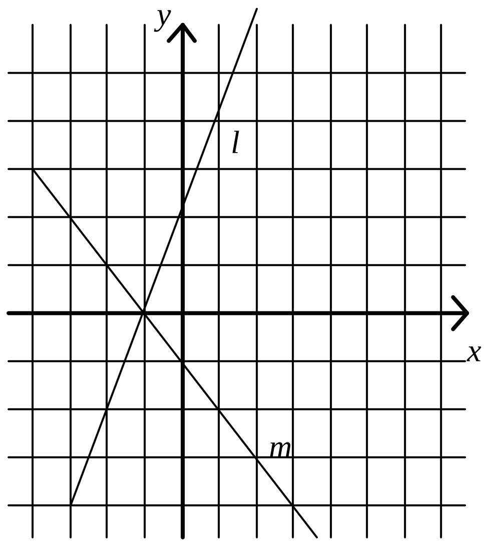
$$\tan v = \frac{a}{1} = a$$

Bemærk, at både a og v skal regnes med fortegn: Hvis linien er nedadgående, så vil v være negativ, og ellers positiv. Dette kan lommeregneren sagtens finde ud af!

(Vi skal senere se, hvad det egentligt betyder, når en vinkel er negativ.)

Eksempel

Betragt linierne l og m : $l : y = 2x + 2$, $m : y = -x - 1$



Vinklen mellem l og x-aksen er lig
$$\arctan(2) = 63.4349°.$$

Vinklen mellem m og x-aksen er lig
$$\arctan(-1) = -45°.$$

Det negative gradtal betyder her, at linien går nedad.

Vi kan finde vinklen mellem de to linier ved at tage differensen mellem de to gradtal. Denne vinkel er $63.4349° - (-45°) = 108.4349°$.

Det er fortegnet på den ene vinkel,der redder os og giver det rigtige facit!

Man er ofte i den situation, at man kender koordinaterne til to punkter på en linie , og at man skal finde ligningen for linien. Dette er nemt nok:

Sætning 4 (FS)

Lad punkterne (x_0, y_0) og (x_1, y_1) ligge på linien med ligningen $y = ax + b$, og antag, at $x_0 \neq x_1$. Da gælder:
$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Bevis:

Idet begge punkterne ligger på linien, så må der gælde, at

$$y_1 = ax_1 + b \quad \text{og} \quad y_0 = ax_0 + b$$

Vi manipulerer videre med disse to ligninger og starter med at trække dem fra hinanden. Vi får så

$$y_1 - y_0 = (ax_1 + b) - (ax_0 + b) = ax_1 + b - ax_0 + b = ax_1 - ax_0$$
$$\Updownarrow$$
$$y_1 - y_0 = a(x_1 - x_0)$$
$$\Updownarrow$$
$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Sætning 5 (FS)

Lad den rette linie l have hældningskoefficienten a og gå gennem punktet (x_0, y_0). Da er l's ligning:

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

Bevis:

Vi ved, at ligningen for l er af formen $y = ax + b$ - problemet er bare, at vi ikke kender tallet b, men heldigvis kender vi a.

Vi sætter derfor punktet (x_0, y_0) ind i ligningen og får

$$y_0 = ax_0 + b \quad .$$
$$\Downarrow$$
$$b = -ax_0 + y_0$$

Dette udtryk for b kan vi nu sætte ind i den oprindelige ligning:

$$y = ax + b = ax - ax_0 + y_0$$
$$\Downarrow$$
$$y = a(x - x_0) + y_0$$

hvilket beviser sætningen.

Rustet med disse to sætninger kan vi nu finde alle de ligninger for rette linier, som vi gider (og flere endnu!):

Eksempel

Bestem ligningen for den rette linie, som går gennem punkterne (-2,6) og (1,3).

Vi starter med at finde hældningskoefficienten:

$$a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{3-6}{1-(-2)} = \frac{-3}{3} = -1.$$

Sætning 5 fortæller os nu, at ligningen er

$$y = -1 \cdot (x - (-2)) + 6.$$

Dette kan skrives lidt pænere som

$$y = -x + 5.$$

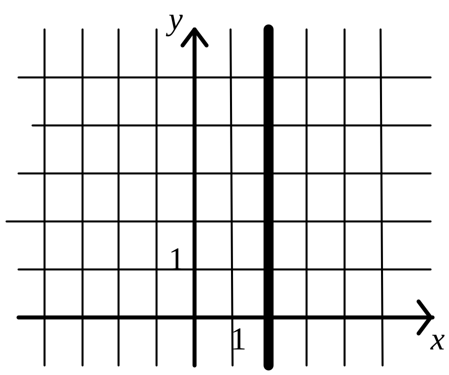
Endelig skal vi nævne, at man nogle gange vælger at skrive den rette linies ligning på formen

$$Ax + By + C = 0.$$

Dette ser ikke ud som store sager, idet ligningen $y = ax + b$ jo bare kan omskrives til $ax - y + b = 0$; men fordelen ved denne alternative ligning er, at vi kan få **lodrette linier** med ind i billedet.

Eksempel

Hvordan beskriver vi med en ligning linien lodret igennem punktet (2,4)?



Ja, da linien går lodret, så ændrer y sig, jo højere vi går op ad linien, mens x **forbliver den samme**. Vi må derfor i hvertifald kunne skrive:

$$x = 4$$

og omformuleret får vi:

$$x - 4 = 0$$

Og så kan vi ikke sige mere!

Som vi kan se, indgår der i ligningen for en lodret linie ingen y´er, og sådan kan alle lodrette linier beskrives.

Tilsvarende vil alle vandrette linier have ligninger, hvor der ikke indgår x´er, som f.eks: $2y = 8$

Opgaver

1. L Bestem en ligning for følgende linier:

a) l går gennem (2,4) og (8,10)
b) m går gennem (7,-4) og (1,-2)
c) n går gennem (-10,1) og (-1,10)
d) p går gennem (9,3) og (3,3)
e) q går gennem (0,4) og har hældningen 5
f) r går gennem (4,0) og har hældningen 8

2.L Vi bruger de samme linier som i opgave 1.
Bestem vinklerne mellem:

a) l og m b) n og q
c) p og l d) r og l
e) p og q f) m og x-aksen
g) p og y-aksen h) r og m

3.M Tegn følgende linier i samme koordinatsystem:
$l: 3x+2y+7=0 \quad m: 3x=6 \quad n: 3y=6 \quad p: 3x+3y=12$

4.L Find ligningen for den lodrette linie gennem punktet (6,8).

3.3 Ortogonale linier

Der gælder et smukt resultat om hældningskoefficienterne for ortogonale linier, som nedenstående sætning viser.

Sætning 6 (FS)

Lad linierne l og m have hældningskoefficienterne a og c. Vi har da følgende udsagn

$$l \text{ og } m \text{ er orthogonale} \quad \Leftrightarrow \quad ac = -1$$

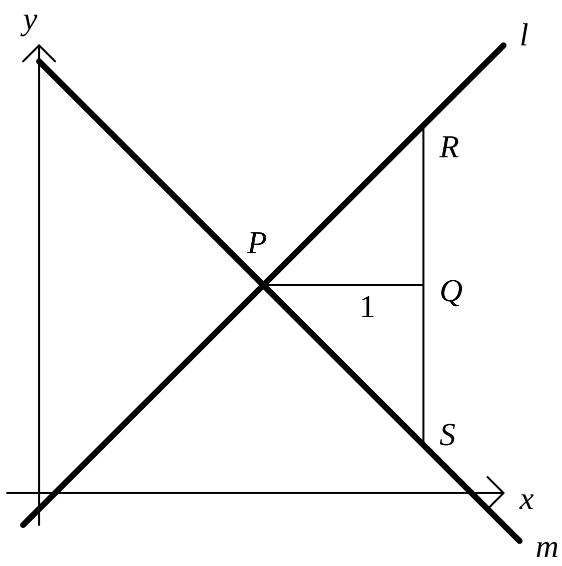
Bevis

Lad l og m have ligningerne

$$l: \quad y = ax + b \qquad m: \quad y = cx + d$$

Betragt nedenstående tegning, hvor vi har tegnet de to linier l og m. Vi har ladet l have positiv hældning og m have negativ hældning.

(Det er klart, at hvis de to linier er orthogonale, så skal den ene linie skal stige og den anden linie falde, så de kan ikke begge være positive eller begge være negative.)



Liniernes skæringspunkt kaldes P.
Liniestykket PQ er laver således, at PQ er vandret og $|PQ| = 1$.
Liniestykket RQS er lodret, og R og S er liniestykkets skæringer med linierne l og m.

Ifølge sætning 2 har vi straks, at $|QR| = a$.

Tilsvarende er $|QS| = -c$. Minustegnet skyldes, at c er negativ, mens en afstand skal være positiv.

Som man kan se af figuren, så har vi ved at trække en lodret streg fra linie *m* til linie *l* fået dannet tre trekanter:

$$\Delta PQR,\quad \Delta PQS \text{ og } \Delta PRS$$

To af disse trekanter er retvinklede, nemlig ΔPQS og ΔPQR. Vi regner nu på disse trekanter med flittig brug af Pythagoras:

$$\begin{array}{ll}
\Delta PQR \text{ er retvinklet} & \Delta PQS \text{ er retvinklet} \\
\Downarrow & \Downarrow \\
|PQ|^2 + |QR|^2 = |PR|^2 & |PQ|^2 + |QS|^2 = |PS|^2 \\
\Downarrow & \Downarrow \\
1 + a^2 = |PR|^2 & 1 + c^2 = |PS|^2
\end{array}$$

Vi er nu færdig med forberedelserne i beviset. Nedenfor regner vi med ensbetydende-pile - det har nemlig den fordel, at vi beviser begge vejene i sætningen i ét hug.
Det væsentligste punkt nedenfor er anvendelsen af Pythagoras' og omvendt Pythagoras. Den relevante ensbetydende-pil er markeret med en *.

$$\begin{array}{ll}
 & l \text{ og } m \text{ er orthogonale} \\
\Updownarrow & \\
 & \Delta PRS \text{ er retvinklet} \\
\Updownarrow * & \\
 & |PR|^2 + |PS|^2 = |RS|^2 \\
\Updownarrow & \\
 & 1 + a^2 + 1 + c^2 = (a + (-c))^2 \\
\Updownarrow & \\
 & 2 + a^2 + c^2 = a^2 + c^2 - 2ac \\
\Updownarrow & \\
 & 2 = -2ac \\
\Updownarrow & \\
 & ac = -1
\end{array}$$

Eksempel

Givet: Linien *l*: y = 2x +3
Linien *m* står vinkelret på *l*
Find: *m*'s hældningskoefficient
Svar: Vi erindrer, at vinkelret er det samme som ortogonal, og har:

$$a_l \cdot a_m = -1$$

$$2a_m = -1$$

m's hældingskoefficient bliver derfor lig $-\frac{1}{2}$

Opgaver

1.L Find hældingen af en linie, som står vinkelret på linien *l*, når *l*'s hældning *a* er :

a) *a*= 5 b) *a*= -8 c) *a*=0 d) *a*= - 0,008

2.M Bestem tallet *k*, således at linierne *l* og *m* med ligningerne

$l: y = 2x + 3$ og $m: y = kx - 1$

er orthogonale.

3.4 Lineære sammenhænge

Vi vil studere nogle situationer fra det virkelige liv, hvor lineære sammenhænge forekommer. Vi starter med et eksempel fra fysikken:

Eksempel (Ohm's lov)

Det er velkendt, at der er følgende sammenhæng mellem strømmen I og spændingsfaldet U over en resistor:

$$U = R \cdot I$$

Her kaldes størrelsen R for resistiorens *resistans*.

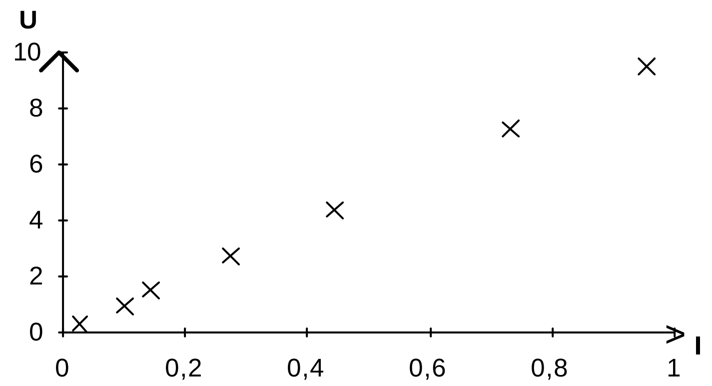
Denne lov, som iøvrigt kaldes Ohm's lov, er et eksempel på en lineær sammenhæng: Dette minder meget om ligningen for en ret linie med hældningskoefficienten R og skæringen 0 med y-aksen.

Antag, at vi f.eks. i en fysiktime har målt på en resistor og fundet følgende værdier:

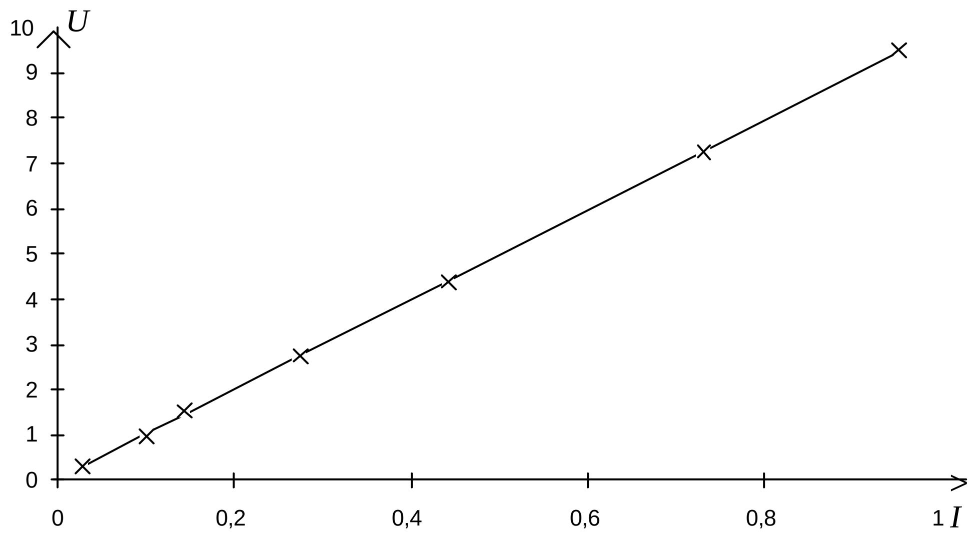
I	0,027	0,100	0,142	0,274	0,442	0,731	0,954
U	0,31	0,97	1,53	2,75	4,38	7,26	9,52

Hvad er nu resistansen for denne resistor?

Dette problem kan løses ved at indtegne målepunkterne på et stykke millimeterpapir: (Der er dog ikke anvendt millimeter-papir på figuren nedenunder!)



Desværre ligger punkterne ikke på en ret linie; der er små afvigelser, som skyldes måleusikkerhed osv.
For at finde R tegner vi derfor den bedste rette linie:



Vi aflæser to punkter **på linien** (ikke to målepunkter; de ligger jo ikke nødvendigvis på linien). Det er bedst, hvis disse to punkter ligger langt fra hinanden.

Her kan vi f.eks. bruge (2; 0,2) og (6; 0,6).

Ved at anvende sætning 3 så kan vi nu finde hældningskoefficienten:

$$a = \frac{6-2}{0{,}6-0{,}2} = \frac{4}{0{,}4} = 10$$

og resistansen R var altså på $10\,\Omega$. (Resistans måles i Ohm (Ω)).

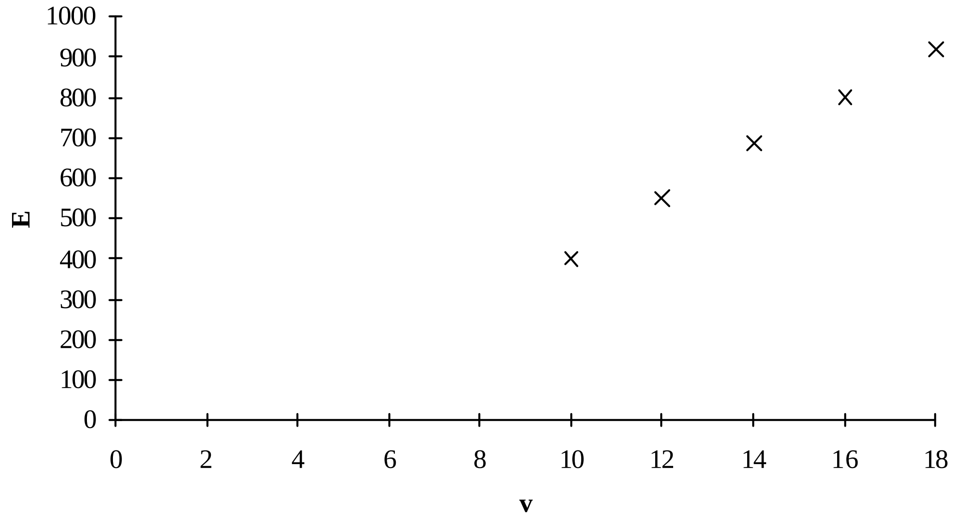
En sammenhæng af formen $y = a \cdot x$ kaldes ofte en *proportionalitet* (eller en *ligefrem proportionalitet*) mellem x og y. Størrelsen a kaldes så *proportionalitetskonstanten.*

Eksempel (Kalorieforbrug)

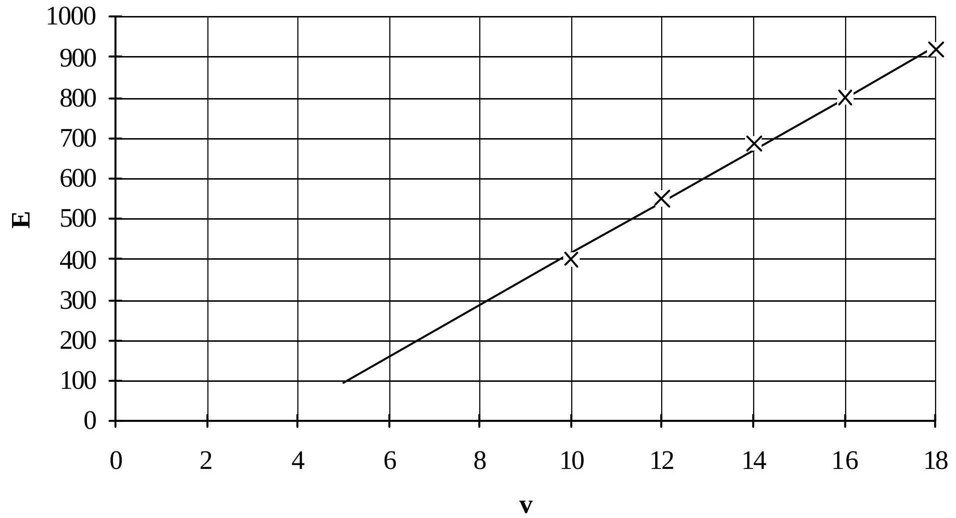
Nedenunder er vist sammenhængen mellem den hastighed v (i km/time), som en forsøgsperson løber, og hans kalorieforbrug E pr. time.

v	10	12	14	16	18
E	400	552	686	800	918

Man vil undersøge sammenhængen mellem v og E, og derfor indtegner man målepunkterne i et koordinatsystem:



Det ser ud til, at der er en lineær sammenhæng mellem v og E. Vi finder denne sammenhæng ved at tegne bedste rette linie og aflæse punkter til beregning:



Grafen ovenfor er ikke for god; men det ser ud til, at linien går gennem

(5 ; 100) og (12,8 ; 600).

Antager vi, at sammenhængen mellem v og E er af formen

$$E = a \cdot v + b$$

Så giver sætning 3 og 4, at

$$a = \frac{600-100}{12{,}8-5} = 64{,}10$$

og

$$b = 600 - 64{,}10 \cdot 12{,}8 = -220{,}51.$$

Sammenhængen er altså

$$E = 64{,}10v - 220{,}51$$

Bemærk, at E og v **ikke** er proportionale **-** idet b-værdien jo ikke er 0, men lig med -220.51

Opgaver

1.L En lodret hængende, elastisk fjeder belastes med forskellige lodder, hvorved fjederen forlænges. I tabellen er der angivet sammenhørende værdier af loddets masse m (målt i g), og fjederens forlængelse x (målt i cm).

m	50	100	150	200	250	300
x	1,1	2,5	3,8	5,0	6,3	7,5

a) Afbild måleresultaterne på millimeter-papir.
b) Find ud fra grafen en sammenhæng mellem m of x.
c) Er m og x proportionale?

3.5 Lineære og stykkevis lineære funktioner

Definition 7 (FS)

En lineær funktion er en funktion f, hvis forskrift er af formen:

$$f(x) = a \cdot x + b$$

Og meget mere er der vel ikke at sige om lineære funktioner, som ikke allerede er blevet sagt tidligere..

Eksempel

Lad f være en lineær funktion, som opfylder, at $f(1) = 5$ og $f(4) = 11$. Hvad er forskriften for f ?

Dette problem kan løses ved at bruge sætning 4 - vi ved, at grafen for f er en ret linie, som går gennem punkterne (1, 5) og (4 , 11).

Vi kan da finde hældningskoefficienten:

$$a = \frac{f(5) - f(2)}{4 - 2} = \frac{11 - 5}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$$

Og sætning 6 fortæller, at så er forskriften:

$$f(x) = 2(x - 4) + 11 = 2x + 3$$

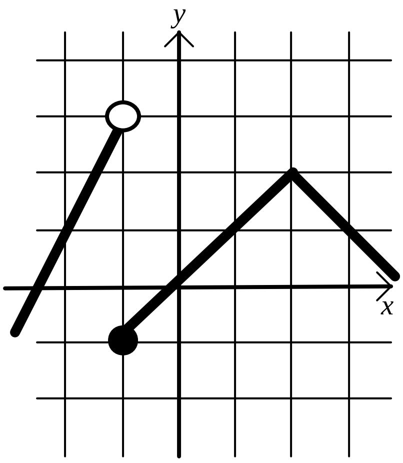
Vi kigger nu på de *stykkevis lineære funktioner*, som der er lidt mere gods i.

Eksempel

Betragt funktionen f med forskriften:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & , \quad x < -1 \\ x & , -1 \leq x \leq 2 \\ -x + 4 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

Det er en stykkevis lineær funktion. Dens graf kan ses på næste side. Forskriften skal læses på følgende måde:



Skal man beregne $f(1)$, så kigger man til højre i gaflen. Det ses, at når $x=1$, så er vi i den **midterste** forgrening. Så $f(3)=3$.

Tilsvarende er $f(-2)=2\cdot(-2)+5=1$, idet vi er i den **øverste** forgrening.

Endelig er $f(3)=3$, idet vi her er i den **nederste** forgrening.

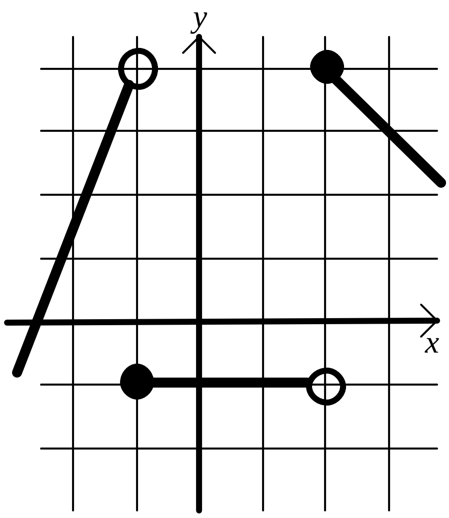
Bemærk, at man i endepunkterne bruger udfyldte og ikke-udfyldte boller til at vise, om endepunktet er en del af grafen eller ikke.

F.eks. ligger (-1,-1) på grafen, idet $f(-1)=1$, mens (-1,3) **ikke** ligger på grafen.

I punktet (2,2) er det ikke nødvendigt at bruge en bolle - der er jo ingen tvivl om, hvad funktionsværdien er.

Eksempel

Vil vi finde forskriften for funktionen g med nedenstående graf, så skal vi gøre følgende:



Vi kan se, at forskriften falder i 3 dele:

Så den første del er for
$x<-1$

Den anden del er for
$-1\le x<2$

Og den tredie del er for
$x\ge 2$

For den første del kan man enten aflæse nogle punkter, og så bruge sætningern 4 og 5 til at finde forskriften. Det er dog meget lettere at se, at hældningskoefficienten er 3, idet grafen stiger 3 enheder opad y-aksen, hver gang x stiger med en enhed. Endvidere ville dette stykke af grafen, hvis det blev fortsat, skære y-aksen i punktet (0,7), så konstantleddet er 7.

Den anden del af grafen er vandret, så hældningskoefficienten er 0. Skæringen med y-aksen er i punktet (0,-1) , altså er konstantleddet lig -1.

Den tredie del af grafen har hældningskoefficienten -1, og forlænges grafen, så skærer den y-aksen i (0,6), dvs. at konstantleddet er 6.

Ergo er forskriften lig

$$g(x) = \begin{cases} 3x+7 & , \quad x < -1 \\ -1 & , \; -1 \leq x < 2 \\ -x+6 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

En særligt fornem stykkevis lineær funktion er den såkaldte *numerisk-værdi*:

Definition 8

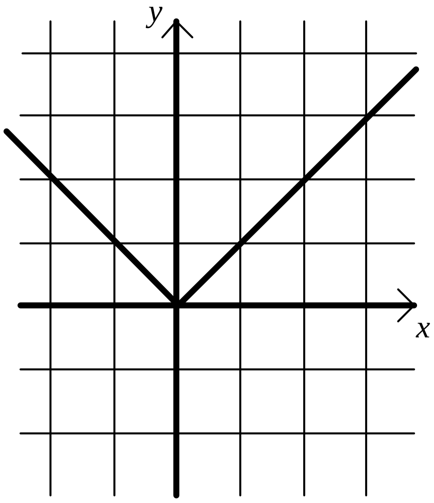
Den numeriske værdi $|x|$ af tallet x er defineret som

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

F.eks. har vi at

$$|2| = 2 \;,\; |-2| = 2 \;,\; |0| = 0$$

Numerisk-værdien gør bare det, at den sletter et eventuelt fortegn på indmaden. Positive værdier lades derfor uændret, mens negative værdier bliver positive.



Grafen for numerisk-funktionen er vist til her til venstre.

Som vi kan se, er grafen altid over x-aksen.

Der gælder følgende sætning om numeriske værdier, hvor punkt c og e er de vigtigste.

Sætning 9

Lad x og y være reelle tal. Da gælder følgende regneregler:

a) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

b) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$

c) $|x+y| \leq |x| + |y|$

d) $|x-y| \leq |x| + |y|$

e) $x^2 = |x|^2 = |x^2|$

Opgaver

1.L

a) Om to lineære funktioner f og g gælder, at

$$f(2) = g(2) = 5, \qquad f(5) = -3 \qquad \text{og} \qquad g(5) = 5$$

Bestem $f(9)$ og $g(9)$.

b) Grafen for en lineær funktion h går gennem punkterne

$$A = (-2;1) \qquad \text{og} \qquad B = (3;2)$$

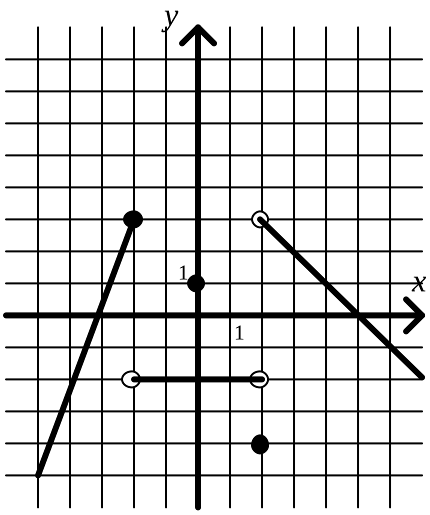
Bestem en regneforskrift for h.

c) Ligger punktet $C = (5.3\,;\,2.4)$ på grafen for h ?

2.L Tegn graferne for følgende funktioner:

$$f(x) = \begin{cases} 3x-4 & , x < 3 \\ -x-1 & , x \geq 3 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -x & , x < 0 \\ 6 & , x = 0 \\ 2x-3 & , x > 0 \end{cases}$$

3.L



Find en forskrift for den funktion *f*, hvis graf er vist til venstre.

4.L Beregn nedenstående tal:

a) $|8|-|-8|$

b) $|-4|+|4|$

c) $\dfrac{|2|^2-|2|^2}{|2|}$

d) $|-5^2|$

e) $-|5|^2$

f) $|10-6|+|10|-|6|$

3.6 Afstanden mellem to punkter

I dette afsnit viser vi den såkaldte *afstandsformel*. Bemærk, at vi kalder afstanden fra punktet A til punktet B for $|AB|$. Grunden, til at vi bruger to lodrette streger ligesom ved numerisk tegn, er selvfølgelig, at en afstand skal være positiv.

Sætning 10 (FS)

Lad $A = (x_1, y_1)$ og $B = (x_2, y_2)$ være to punkter..
Så er afstanden mellem A og B lig med

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Bevis:

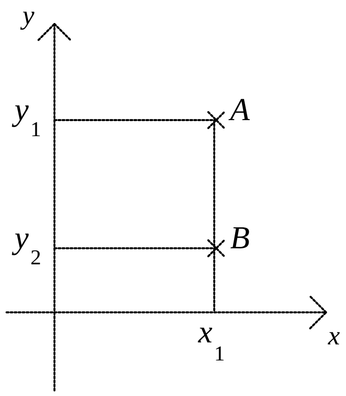
Det er nødvendigt at dele op i hele fire forskellige tilfælde:

a) $x_1 = x_2$ og $y_1 = y_2$
b) $x_1 = x_2$ og $y_1 \neq y_2$
c) $x_1 \neq x_2$ og $y_1 = y_2$
d) $x_1 \neq x_2$ og $y_1 \neq y_2$

Tilfælde a):

De to punkter A og B er tydeligvis ens, idet de har samme koordinater!. Afstanden mellem A og B er 0, og heldigvis giver formlen også, at denne afstand er 0.

Tilfælde b):



De to punkter A og B ligger på samme lodrette linie i koordinatsystemet.

Afstanden mellem A og B er da lig den lodrette afstand, og denne er ud fra figuren lig med forskellen mellem y-koordinaterne.

Her skal man dog huske at tage numerisk-værdien af denne forskel, idet afstanden ellers kan blive negativ! Vi har altså, at

$$|AB| = |y_1 - y_2|$$

Spørgsmålet er så, om det passer med formlen! Så lad os prøve med formlen, og hvis den giver det samme, så er dette tilfælde også ok.

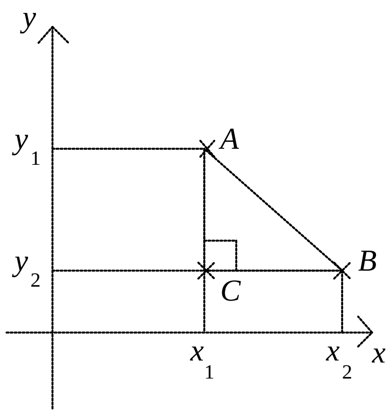
$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \qquad \text{(Først formlen)}$$
$$= \sqrt{0^2 + (y_1 - y_2)^2} \qquad (x_1 = x_2)$$
$$= |y_1 - y_2| \qquad \text{(kvadratroden af et tal i anden er altid positivt)}$$

Tilfælde c)

Her ligger punkterne på samme **vandrette** linie. Beviset for, at formlen gælder i dette tilfælde, er næsten det samme som i tilfælde b), og den flittige elev, som gerne vil glæde sin lærer, opfordres til at gennemføre beviset i dette tilfælde.

Tilfælde d)

Så kan vi endelig komme til at bruge Pythagoras!. Vi ser, at A og B hverken ligger på samme vandrette eller lodrette linie. Som på figuren laver vi hjælpepunktet $C = (x_1, y_2)$, og vi får da den **retvinklede** trekant ABC.



Vi er interesserede i hypotenuselængden $|AB|$, og for at finde denne finder vi først katetelængderne $|AC|$ og $|BC|$.

Som i tilfældene b) og c) har vi, at:

$$|AC| = |y_1 - y_2|$$
$$|BC| = |x_1 - x_2|$$

Vi kan nu anvende Pythagoras, og vi får følgende:

$$|AB| = \sqrt{|BC|^2 + |AC|^2} \qquad \text{(Pythagoras)}$$
$$= \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2}$$
$$= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \qquad \text{(Husk, at } |x|^2 = x^2\text{)}$$

Eksempel

Afstanden mellem punkterne $A=(2,3)$ og $B=(-1,4)$ kan findes vha. formlen:

$$|AB| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$
$$\Downarrow$$
$$|AB| = \sqrt{(2-(-1))^2+(3-4)^2} = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$$

Eksempel

Antag, at vi har givet de tre punkter $A=(1,5)$, $B=(4,7)$ og $C=(-3,-2)$. Vi skal nu beregnde siderne og vinklerne i ΔABC.

Det er nemt nok at beregne sidelængderne - vi bruger bare afstandsformlen:

$$a = |BC| = \sqrt{(4-(-3))^2+(7-(-2))^2} = \sqrt{7^2+9^2} = \sqrt{130}$$
$$b = |AC| = \sqrt{(1-(-3))^2+(5-(-2))^2} = \sqrt{4^2+7^2} = \sqrt{65}$$

Vinklerne kan findes vha. **cosinus-relationerne***:*

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$\Downarrow$$
$$\cos A = \frac{\sqrt{65}^2+\sqrt{13}^2-\sqrt{130}^2}{2\sqrt{65}\sqrt{13}} = \frac{65+13-130}{2\sqrt{65}\sqrt{13}} = \frac{-52}{2\sqrt{65}\sqrt{13}}$$
$$\Downarrow$$
$$A = 153,43°$$

På samme måde får vi, at

$$B = 18,43° \text{ og } C = 8,13°.$$

Det er som altid smart at gøre prøve, så lad os lægge de tre vinkler sammen:

$$A+B+C = 153,43°+18,43°+8,13° = 179,99°$$

Årsagen, til at vi ikke lige præcis får $180°$ er naturligvis, at vi har lavet afrundingsfejl i vinkelberegningerne!

Opgaver

1.L I et koordinatsystem er der givet punkterne:

A=(2,-3), B=(-1,2), C=(0,-4) og D=(-3,-7).

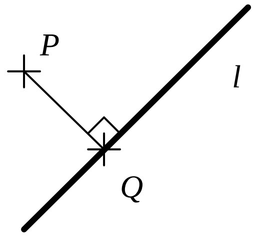
a) Indtegn A, B, C og D i et koordinatsystem.
b) Beregn afstandene $|AB|,|AC|,|AD|,|BC|,|BD|$ og $|CD|$.

2.L I et koordinatsystem er der givet trekant ΔABC ved

A=(2,3), B=(-5,-10) og C=(8,-12).

Beregn siderne og vinklerne i trekant ABC.

3.7 Afstand mellem punkt og linie



Endelig kan vi udlede en formel for afstanden mellem et punkt og en linie. Vi skal dog først definere denne afstand som

$$\operatorname{dist}(P,l) = |PQ|$$

Her er Q er det punkt på linien, så PQ står vinkelret på l.

Lidt mere formelt, så definer vi:

Definition 11

Lad l være en linie og P et punkt i planen. *Afstanden mellem P og l*, betegnet $\operatorname{dist}(P,l)$, defineres som den vinkelrette afstand mellem punktet P og l. (Se tegningen ovenfor).

Vi er nu klar til afstandsformlen.

Sætning 12 (FS)

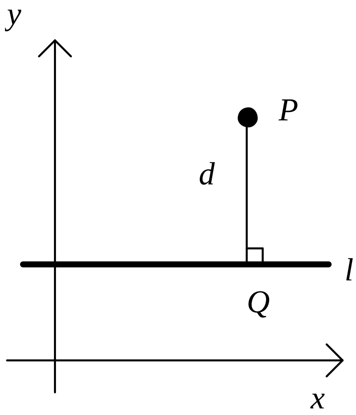
Lad linien l have ligningen $y = ax + b$, og lad punktet P have koordinaterne (x_1, y_1). Da gælder, at

$$\operatorname{dist}(P,l) = \frac{|ax_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

Bevis:

Vi tegner linien l og punktet P. Afstanden fra P til l kalder vi d. Vi har nu to tilfælde - enten er l en vandret linie, eller l er **ikke** en vandret linie.

1) l er en vandret linie:



Af figuren ses, at
$Q = (x_1, b)$
Dette må jo gælde, idet Q og P skal ligge på samme lodrette linie, og derfor får samme x-koordinat. y-koordinaten bestemmes af, at Q er pisket til at ligge på den vandrette linie

$$y = b$$

(Egenligt $y = ax + b$, men linien er vandret, så $a = 0$)

Vi har altså

$$d = |PQ| = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (y_1 - b)^2} = \sqrt{0 + (y_1 - b)^2} = |y_1 - b|$$

Passer dette nu også med den lovede formel? Tja, lad os prøve - husk, at $a = 0$:

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|ax_1 + b - y_1|}{\sqrt{1 + a^2}} = \frac{|0 + b - y_1|}{\sqrt{1 + 0^2}} = \frac{|b - y_1|}{1} = |b - y_1|$$

Idet der jo gælder, at

$$|y_1 - b| = |b - y_1|$$

så må vi jo konkludere, at formlen passer i dette tilfælde!

l er en skrå linie:

Denne gang bliver vi nødt til at gå en lille omvej for at komme til målet!

Vi tegner en lodret linie fra P til linien l og kalder skæringspunktet for R. Det giver os første trekant ΔRPQ med sidelængderne:

$|PQ| = d = \text{dist}(P, l)$

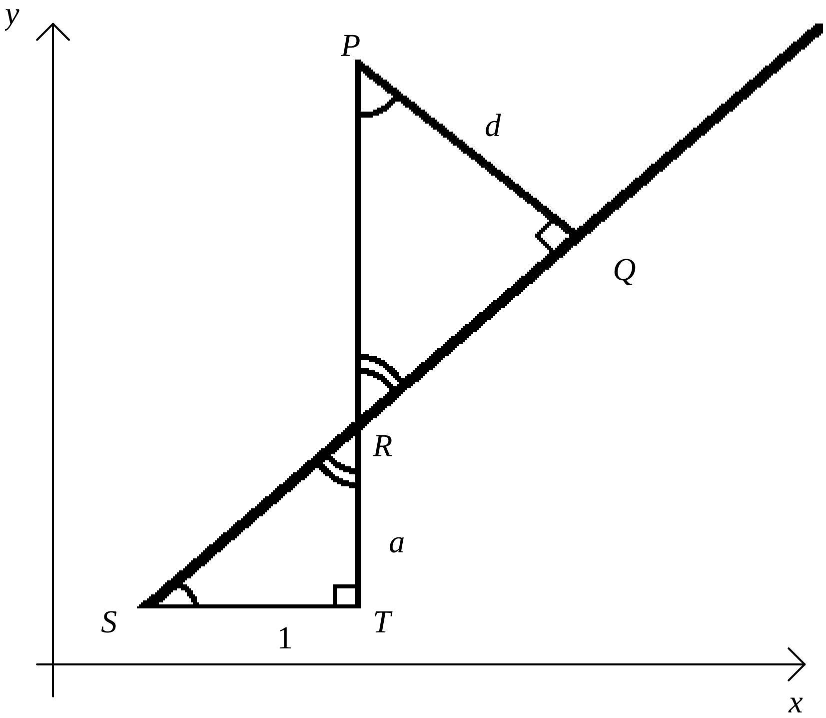
$|PR| = |ax_1 + b - y_1|$ (R´s y-koordinat - P´s y-koordinat.
R´s x-koordianat er også x_1)

Derefter går vi fra punktet R nedad med tallet a; det giver os punktet T. Ved at gå vandret ind til linien l igen og kalde skæringspunktet for S, så har vi fået anden trekant ΔSRT med sidelængderne:

$|RT| = a$ og $|ST| = 1$

Ifølge Pythagoras er nu

$$|SR| = \sqrt{|RT|^2 + |ST|^2} = \sqrt{a^2 + 1}$$



Som vi kan se af figuren, så er de to trekanter ΔPQS og ΔRST ensvinklede. Ensvinklede trekanter er proportionale, så

$$\frac{|PQ|}{|ST|} = \frac{|PR|}{|SR|}$$

Ved indsættelse af sidelængderne fås

$$\frac{d}{1} = \frac{|ax_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

Den forrige sætning har et minus hæftet på sig. Den kan nemlig kun anvendes på linier af formen $y = ax + b$. Det betyder faktisk, at man ikke kan regne afstanden fra et et punkt til en lodret linie., idet vi husker at lodrette linier ikke kan beskrives på denne måde! Det vil en sand matematiker jo ikke havde siddende på sig, så vi udvider sætningen til også at omfatte lodrette linier. Spørgsmålet er så, hvordan! Svaret ligger i at lave en afstandsformel, som bruger en linies normalform:

$$Ax + By + C = 0$$

Sætning 13 (LS)

Lad punktet $P=(x_1,y_1)$, og linien l have ligningen $Ax+By+C=0$. Afstanden mellem P og l er da givet ved

$$\text{dist}(P,l)=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Bevis:

Vi har næsten bevist sætningen i forrige sætning. Vi deler op i to tilfælde:

l er en skrå eller en vandret linie:

Vi har formlen fra forrige sætning.

$$\text{dist}(P,l)=\frac{|ax_1+b-y_1|}{\sqrt{a^2+1}}$$

Den nye formel kan fås ved at omskrive ligningen for *l* til:

$$y=ax+b$$

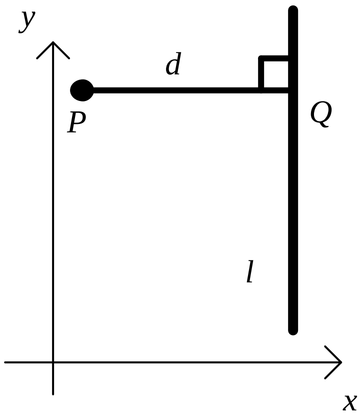
l har derfor hældningen $a=-\frac{A}{B}$ og skæringen $b=-\frac{C}{B}$. Vi får

$$\begin{aligned}\text{dist}(P,l) &= \frac{\left|-\frac{A}{B}x_1-\frac{C}{B}-y_1\right|}{\sqrt{(-\frac{A}{B})^2+1}}\\ &= \frac{\left|\frac{A}{B}x_1+\frac{C}{B}+y_1\right|}{\sqrt{(\frac{A}{B})^2+1}}\\ &= \frac{B\cdot\left|\frac{A}{B}x_1+\frac{C}{B}+y_1\right|}{B\cdot\sqrt{(\frac{A}{B})^2+1}}\\ &= \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\end{aligned}$$

l er en lodret linie:

Liniens ligning er da af typen:

$$Ax+C=0 \Rightarrow x=\frac{-C}{A}$$



Af figuren ses vi

$$Q = (-\tfrac{C}{A}, y_1)$$

og

$$\operatorname{dist}(P,l) = |PQ| = \left|x_1 - (-\tfrac{C}{A})\right| = \left|x_1 + \tfrac{C}{A}\right|$$

Idet vi husker på, at $B = 0$, så kan dette omskrives til

$$\operatorname{dist}(P,l) = \frac{A\left|x_1 + \tfrac{C}{A}\right|}{A} = \frac{|Ax_1 + C|}{\sqrt{A^2}} = \frac{|Ax_1 + 0 + C|}{\sqrt{A^2 + 0}} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Eksempel

Givet: Linien *l* med ligningen $3x+4y+3=0$

Punkterne $P=(2,1)$ og $Q=(5,-10)$

Find: Afstandene fra punkterne til linien:

Svar: Vi bruger afstandsformel fra punkt til linie:

$$\mathrm{dist}(P,l)=\frac{|3\cdot 2+4\cdot 1+3|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|13|}{\sqrt{25}}=\frac{13}{5}$$

$$\mathrm{dist}(Q,l)=\frac{|3\cdot 5+4\cdot(-10)+3|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-7|}{\sqrt{25}}=\frac{7}{5}$$

Opgaver

1.L Bestem afstanden mellem punktet *A* og linien *m*, når

1) $A=(7;-1)$ og $m: 2x-3y=-4$
2) $A=(2;5)$ og $m: y=2x-1$
3) $A=(5;5.5)$ og $m: 17x-12y+15=0$
4) $A=(3;-7)$ og $m: y=-5x+14$
5) $A=(-9;2)$ og $m: 7x-3y+27=0$
6) $A=(3;-6)$ og $m: -2x+7y+5=0$

3.8 Cirkler

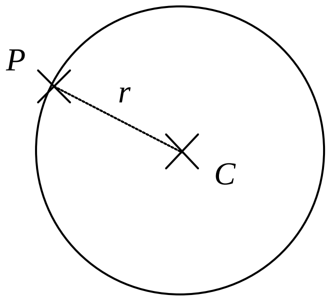
Vi vil nu undersøge, hvorledes man kan beskrive en cirkel i et koordinatsystem.
Vi starter med at minde om, hvorledes man definerer en cirkel.

Definition 14 (FS)

En *cirkel* er mængden af punkter P, som opfylder følgende egenskab:

Afstanden fra P til et fast punkt C, skal være et konstant tal r: $|PC| = r$

Punktet C kaldes cirklens *centrum*,
mens tallet r kaldes cirklens *radius*.



Ovenstående definition beskriver en *cirkelperifieri*, eller *randen af en cirkel*.

Er man interesseret i hele *cirkelskiven*, så skal ligningen $|PC| = r$ ændres til uligheden $|PC| \le r$.

Bemærk, at **tallet *r* skal være positivt**.

Er r nemlig negativ, så får vi en negativ afstand, og det er umuligt. Og er $r = 0$, så beskriver definitionen overfor punktmængden, som kun består af punktet C.

Vi bruger nu afstandsformlen til at finde en ligning for cirklen:

Sætning 15 (FS)

Cirklen med centurn $C = (a,b)$ og radius r har ligningen

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Bevis:

Vi har, at punktet $P = (x, y)$ ligger på cirklen, når afstanden $|CP| = r$. Vi bruger afstandsformlen til at finde $|CP|$:

$$|CP| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\,.$$

Dvs. $P = (x, y)$ ligger på cirklen, når

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

Og kvadrerer vi begge sider, så fås ligningen

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

For at bringe forvirringen op på et højere niveau kan vi bruge mængdebygger-notationen til at beskrive en cirkel:

$$\left\{(x,y) \,\middle|\, (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\right\}$$

Det er ikke altid, at man lige skriver cirklens ligning på formen ovenfor - nogle gange vælger man at gange parenteserne ud og at flytte rundt på leddene. Dette kan give anledning til mange sjove og underholdende opgaver!

Eksempel

Cirklen med centrum $C = (0,0)$ og radius $r = 1$ har ligningen

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 1^2$$

Eller, på mere "normalt" dansk

$$x^2 + y^2 = 1^2$$

Dette er en meget hyppigt optrædende cirkel, så den fortjener et specielt navn - den kaldes *enhedscirklen*.

Eksempel

Cirklen med centrum $C = (-2,3)$ og radius $r = 3$ har ligningen:

$$(x-(-2))^2 + (y-3)^2 = 3^2$$

Normalt ganger man dog leddene ud og flytter højresiden over på venstresiden. Følgende ligninger er derfor også ligninger for cirklen:

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 3^2$$

Hvis vi ganger paranteserne ud, så fås:

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 2 = 0$$

Tit og ofte er man ude for den modsatte situation - man har en ligning med *x*'ere og *y*'ere, og man skal bevise, at det er ligningen for en cirkel samt finde cirklens centrum og radius.

Metoden til at løse dette problem er illustreret i følgende sætning:

Sætning 16 (LS)

En ligning på formen:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

er ligningen for enten:

a) en cirkel
b) et punkt
c) ingenting.

Bevis:

Vi skriver ligningen om:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$\Downarrow$.

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} + y^2 + by + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$$

$\Downarrow$.

$$(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$$

Vi deler nu op i tre muligheder:

Højresiden er negativ:

Det ses, at venstresiden er summen af to kvadrater, og **venstresiden** kan således **aldrig** blive **negativ**. Er højresiden derfor negativ, så kan ligningen ikke være opfyldt for nogen punkter (x,y), og ligningen fremstiller ingenting (eller den tomme mængde), så det var tilfælde c.

Højresiden er lig med nul:

Nu kan ligningen kun passe, hvis begge led på venstresiden er nul, dvs. hvis

$$(x + \frac{a}{2})^2 = 0 \quad \text{og} \quad (y + \frac{b}{2})^2 = 0$$

Eller, idet kvadratet på et tal kun kan være nul, hvis tallet selv er det:

$$x+\frac{a}{2}=0 \text{ og } y+\frac{b}{2}=0$$
$$\Downarrow.$$
$$x=-\frac{a}{2} \text{ og } y=-\frac{b}{2}.$$

Ligningen er kun opfyldt for punktet med koordinaterne $(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$, og vi er åbenbart i tilfælde b.

Højreside er positiv:

Vi er i tilfælde a og har en cirkel med centrum og radius:

$$C=(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}) \qquad \text{og} \qquad r=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c}.$$

Regnede opgaver:

Opgave:

Tegn den kurve, hvis ligning er givet ved $x^2+y^2-4x+6y=12$.

Løsning:

Vi omskriver ligningen:

$$x^2+y^2-4x+6y=12$$
$$\Downarrow.$$
$$x^2-4x+4+y^2+6y+9=12+4+9$$

Vi lægger 4 og 9 til på begge sider. 4-tallet kommer fra kvadratet på halvdelen af x-koefficienten (-4), og 9-tallet kommer tilsvarende som kvadratet på y-koefficienten (3).

$$(x-2)^2+(y+3)^2=25$$

Aha - vi har en cirkel med centrum i (2,-3) (bemærk fortegnene) og radius lig $\sqrt{25}=5$. Det er nu en smal sag at producere denne cirkel i et koordinatsystem under anvendelse af f.eks. en passer.

Opgave:

Tegn den kurven med ligningen: $x^2+y^2+8x+6y+25=0$

Løsning:

Vi laver de samme omskrivninger som i forrige opgave:

$$x^2 + y^2 + 8x + 6y + 25 = 0$$
$\Downarrow$.
$$x^2 + 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 = -25 + 16 + 9$$
$\Downarrow$.
$$(x+4)^2 + (y+3)^2 = 0$$

Kurven er altså bare punktet (-4,-3), som med lethed kan produceres i etkoordinatsystem - endda uden brug af passer!

Opgave:

Tegn den kurve, hvis ligning er givet ved: $x^2 + y^2 - 6x = -11$

Løsning:

Vi laver de samme omskrivninger igen, men med den finte, at koefficienten til y-leddet er 0:

$$x^2 + y^2 - 6x = -11$$
$\Downarrow$.
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = -11 + 9$$
$\Downarrow$.
$$(x-3)^2 + (y-0)^2 = -2$$

Idet højresiden er blevet negativ, så fremstiler ligningen altså ingenting.

Eksempel

Givet: En kurve med ligningen: $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$.

Find: En tegning af kurven i koordinatsystemet.

Svar: De samme omskrivninger laves igen (suk!):

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 2$$
$\Downarrow$.
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 2 + 1 + 1$$
$\Downarrow$.
$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2^2$$

Og vi ser, at kurven er en cirkel med
centrum i $C = (1, -1)$ og radius $r = 2$.

Givet Punkterne $P = (0,0)$, $Q = (3,-1)$ og $R = (4,2)$.

Find: Punkternes beliggenhed i forhold til kurven ovenfor.

Svar: Afstanden mellem $A = (x_1, y_1)$ og $B = (x_2, y_2)$ er

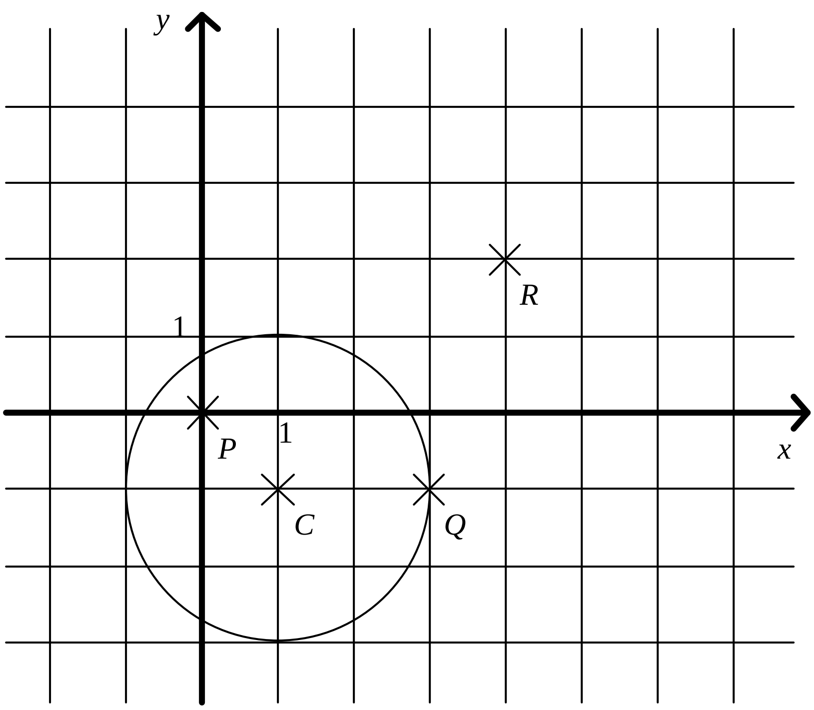
$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Afstandene fra P, Q og R til centrum C findes da ved

$$|PC| = \sqrt{(1-0)^2 + ((-1)-0)^2} = \sqrt{2}$$
$$|QC| = \sqrt{(1-3)^2 + ((-1)-(-1))^2} = 2$$
$$|RC| = \sqrt{(1-4)^2 + ((-1)-2)^2} = \sqrt{18}$$

Heraf ses, at punktet P ligger indenfor cirklen, idet $\sqrt{2} < r$, Q ligger på cirklen, idet $2 = r$, mens R ligger udenfor cirklen, idet $\sqrt{18} > r$.

Situationen er vist i nedenstående koordinatsystem:



Opgaver

1.L Opskriv ligningerne for følgende cirkler:

a) Cirklens centrum er (1,-3), og cirklens radius er 4.

b) Cirklens centrum er (0,-2), og radius er $\sqrt{5}$.

c) Centrum er (-2,-4) og cirklen går gennem punktet (2,-4).

d) Centrum er (-1,1), og den passerer gennem punktet med koordinaterne (1,-1).

2.L Nedenfor er der angivet ligningerne for nogle punktmængder. Bestem disse punktmængder. Hvis punktmængden er en cirkel, bestem dens centrum og radius.

a) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 8x + 8y + 32 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 4x - y - \frac{27}{4} = 0$

d) $x^2 + y^2 - 2y + 2 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 2 = 0$

3.9 Parabler og andengradsligningen

Vi skal nu kigge på en anden vigtig type af kurver - de såkaldte *parabler*:

> **Definition 17 (FS)**
>
> En *parabel* er en kurve med ligningen:
>
> $$y = ax^2 + bx + c \qquad , a \neq 0$$
>
> hvor a, b og c, de såkaldte koefficienter, er reelle tal, og a skal være forskellig fra 0.

Bemærk, at hvis vi alligevel lader a=0 i definitionen af en parabel, så får vi en ret linie.

Eksempel

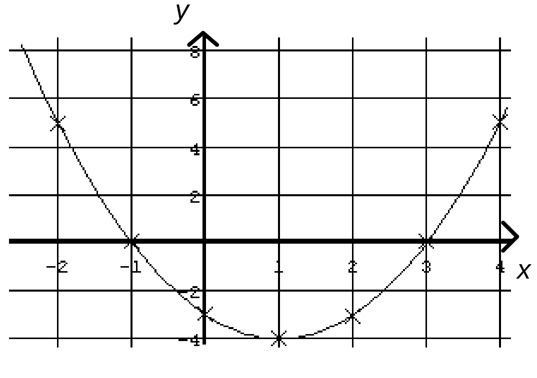
Parablen med ligningen $y = x^2 - 2x - 3$ har koefficienterne $a = 1$, $b = -2$ og $c = -3$. For at tegne denne parabel kan vi finde en masse **støttepunkter*;*** vi vælger en række x-værdier og sætter dem ind i formlen og får en række y-værdier:

Sætter vi f.eks. x=1, så får vi, at $y = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$, og heraf ses, at punktet (1,-4) ligger på parablen.

For at holde styr på dette plejer man at sætte støttepunkterne ind i et skema som nedenstående:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

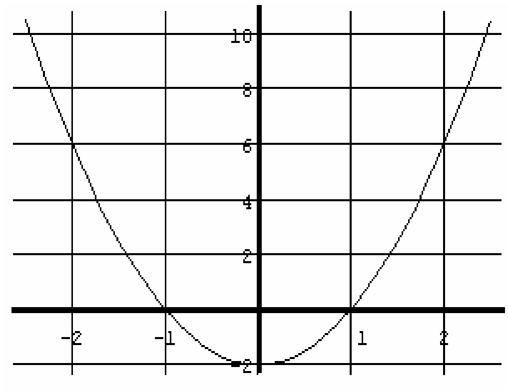
Disse punkter kan nu sættes ind i et koordinatsystem og forbindes med en kurve:



Det ses, at ovenstående parabel skærer *y*-aksen i punktet (0,-3) og *x*-aksen i punkterne (-1,0) og (3,0). Endvidere ses at parablens *toppunkt*, som underligt nok er punktet i bunden af kurven, har koordinaterne (1,-4). Toppunktet er det sted på grafen, hvor grafen vender.

Eksempel

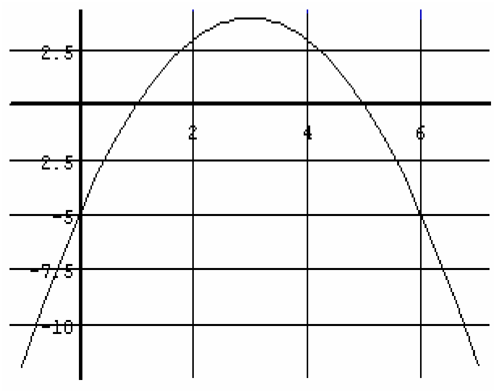
Parablen med ligningen $y = 2x^2 - 2$ tegnes på samme måde som ovenfor.



Det ses af grafen, at denne parabel skærer *y*-aksen i $(0,-2)$ skærer *x*-aksen i (-1,0) og (1,0). har toppunkt i (-2,0).

Bemærk, at x^2-koefficienten nu er 2. Dette betyder, at parablen er "smallere" - de to *parabelgrene* er stejlere.

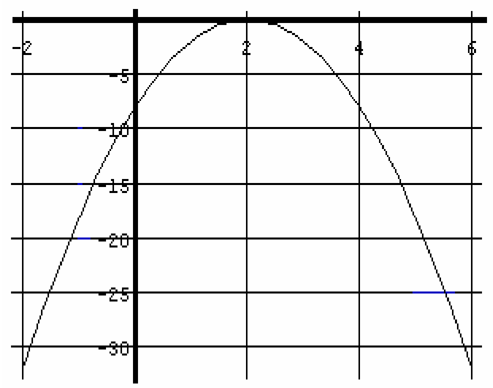
Nedenstående parabel har ligningen $y = -x^2 + 6x - 5$.



x^2-koefficienten er nu negativ ($a = -1$), og det betyder at parablen "vender nedad".

Vi kan af grafen se at parablen skærer *y*-aksen i (-5,0) skærer *x*-asken i (1,0) og (5,0) har toppunktet i (3,4).

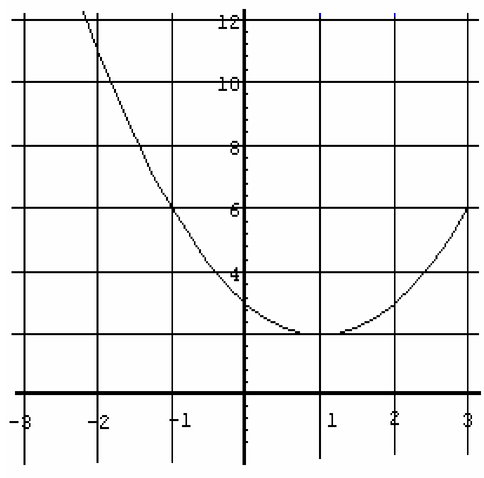
Denne parabel har ligningen $y = -2x^2 + 8x - 8$.



Vi kan af grafen se at parablen skærer *y*-aksen i (0,-8) skærer *x*-aksen i (2,0) har toppunkt i (2,0)

Bemærk at skæringspunktet med *x*-aksen samtidigt er toppunktet.

Denne parabel har ligningen $y = x^2 - 2x + 3$



Vi kan af grafen se at parablen
skærer y-aksen i (3,0)
skærer ikke x-aksen
har toppunkt i (1,2)

Vi vil i det følgende undersøge, hvorledes skæringspunkterne med x-aksen og med y-aksen samt toppunktet kan findes uden at tegne parablen, men kun ved at kigge på parablens ligning.

Vi starter med det nemmeste, nemlig skæringspunktet med y-aksen:

Sætning 18 (LS)

Parablen med ligningen

$$y = ax^2 + bx + c$$

skærer y-aksen i punktet $(0, c)$

Bevis:

Alle punkter på y-aksen har x-koordinaten x=0. Så hvis et punkt med x-koordinaten = 0 skal opfylde parablens ligning, så må y-koordinaten være

$$y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$

som vi ser ved indsættelse af x=0 i parablens ligning.

Vi kigger nu på en parabels skæringspunkter med x-aksen. Alle punkter på x-aksen har y-koordinaten 0, så vi skal finde de x-værdier, som opfylder ligningen

$$0 = ax^2 + bx + c.$$

Sådan en ligning kaldes en *andengradsligning*, fordi den ubekendte x optræder i anden potens. Det kræves dog stadigvæk, at *andengradskoefficienten* a er forskellig fra 0.

Løsningen til andengradsligningen findes i følgende sætning:

Sætning 19 (FS)

Lad $ax^2+bx+c=0$ være en andengradsligning med $a \neq 0$.
Lad andengradsligningens *diskriminant* være tallet:

$$d = b^2 - 4ac$$

Så afhænger løsningsmængden til andengradsligningen af d's fortegn:

1) Hvis d<0, så: er der ingen løsninger.
2) Hvis d=0, så er der én løsning:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

3) Hvis d>0, så er der to løsninger:

$$x = \frac{-b+\sqrt{d}}{2a} \quad \text{eller} \quad x = \frac{-b-\sqrt{d}}{2a}.$$

Af en eller anden grund lærer de fleste gymnasieelever denne formel udenad! Det skyldes måske de 247 andengradsligninger de kommer til at løse...

Tallet d kaldes *diskriminanten*, idet den adskiller (eller diskriminerer) mellem de forskellige muligheder for løsninger.

Traditionelt kaldes løsningerne til andengradsligningen ofte for *rødder*. Dette kommer af, at den simple andengradsligning:

$$x^2 - a = 0$$

har kvadrat**roden** af a som løsning, når a ellers ikke er negativ. (Ligningen har også løsningen $-\sqrt{a}$).

Ofte slår man tilfælde 2 og 3 sammen og skriver, at løsningerne er:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}.$$

Dette passer jo, også når $d = 0$.

Inden vi beviser sætningen ovenfor, så er det nok på sin plads at give et par eksempler på løsning af andengradsligninger.

Eksempler

a) Ligningen $x^2 - 2x - 3 = 0$ har diskriminanten

$$d = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot (-3) = 4 + 12 = 16.$$

Denne diskriminant er positiv, så der er to rødder:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

b) Ligningen $-2x^2 - x + 3 = 0$ har diskriminanten

$$d = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 3 = 1 + 24 = 25$$

Denne diskriminant er også positiv, og igen er der to rødder:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot (-2)} = \frac{1 \pm 5}{-4} = \begin{cases} -\frac{3}{2} \\ 1 \end{cases}$$

c) Ligningen $x^2 - 2x + 1 = 0$ har diskriminanten

$$d = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0,$$

Her er diskriminanten lig 0, så der er kun en løsning:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1.$$

d) Ligningen $x^2 + 6x + 8 = 0$ har diskriminanten

$$d = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 48 = -12.$$

Denne diskriminant er negativ, så her er der ingen løsninger!

e) Ligningen $x^2 + 4x + 2 = 0$ har diskriminanten

$$d = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 16 - 8 = 8$$

Da diskriminanten er positiv er der to løsninger:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{2 \cdot 1} = -2 \pm \frac{\sqrt{8}}{2} = -2 \pm \sqrt{\frac{8}{4}} = -2 \pm \sqrt{2} = \begin{cases} -2 + \sqrt{2} \\ -2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Nå, ikke mere snak; men i gang med beviset for andengradsligningens løsningsformel:

Bevis for sætning 19:

Vi laver følgende omskrivninger af andengradsligningen:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Downarrow.$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

$$\Downarrow.$$

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - 4ac = b^2 - 4ac$$

$\Downarrow$.

$$4a^2x^2 + 2\cdot 2ax\cdot b + b^2 = d$$

$\Downarrow$.

$$(2ax+b)^2 = d$$

Vi skal nu kigge på fortegnet for d :

d er negativ:

I ovenstående ligning er **venstresiden** et kvadrat og kan derfor **ikke** være **negativ**. Når d er negativ, så er **højresiden negativ**! Ligningen er derfor meningsløs, og der er derfor ingen rødder. Vi er altså i tilfælde 1.

d er lig 0:

Da d er lig 0, så er højresiden lig 0. Derfor må venstresiden også være lig 0. Vi får derfor

$$2ax + b = 0$$

Der er derfor kun en rod i dette tilfælde, nemlig

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Dette klarer tilfælde 2.

d er positiv:

Da d>0 så kan vi tage kvadratroden på begge sider af ligningen ovenfor. Der er dog den finte, at indmaden $2ax+b$ enten er lig kvadratroden af d eller minus kvadratroden af d. Dvs. vi har faktisk to ligninger:

$$2ax + b = \sqrt{d} \quad \text{eller} \quad 2ax + b = -\sqrt{d}$$

Disse ligninger løses videre:

$$2ax = -b + \sqrt{d} \quad \text{eller} \quad 2ax = -b - \sqrt{d}$$

$\Downarrow$.

$$x = \frac{-b+\sqrt{d}}{2a} \quad \text{eller} \quad x = \frac{-b-\sqrt{d}}{2a}$$

Og vi har endelig fået ordnet tilfælde 3.

Eksempel

Vi kan f.eks. bruge andengradsligningen til af finde skæringspunkterne mellem parablerne tidligere i afsnittet og y-aksen. Tager vi f.eks. den første parabel, som jo havde ligningen

$$y = x^2 - 2x - 3,$$

så finder man skæringspunkterne med y-aksen ved at sætte y=0 og løse den derved fremkomne andengradsligning:

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Denne ligning har diskriminanten:

$$d = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 - 12 = 16,$$

Da diskriminanten er positiv er der to rødder og dermed to skæringspunkter P_1 og P_2. Disse skæringspunkter har x-koordinaterne

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

Det vil sige, at de to skæringspunkter er givet ved

$$P_1 = (3;0) \qquad \text{og} \qquad P_2 = (-1;0)$$

Dette passer fint med grafen for parablen!

Den flittige læser vil på nuværende tidspunkt allerede have kontrolleret alle de andre skæringspunkter.

Øvelse: Gør dette!

Vi kommer nu til toppunktsformlen, som giver koordinaterne til det punkt på grafen, hvor grafen vender:

Sætning 20 (Toppunktsformlen) (FS)

Betragt parablen med ligningen

$$y = ax^2 + bx + c$$

Parablens toppunkt er

$$T = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right).$$

(d er her diskriminanten : $d = b^2 - 4ac$).

Beviset for denne sætning vil komme i et senere kapitel.

Eksempel

For at vende tilbage til den første parabel, så husker vi på, at denne havde ligningen

$$y = x^2 - 2x - 3.$$

Vi kan nu finde toppunktets x-koordinat:

$$x_T = -\frac{b}{2a}$$
$$\Downarrow$$
$$x_T = -\frac{-2}{2\cdot 1} = -(-1) = 1$$

og toppunktets y-koordinat:

$$y_T = -\frac{d}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$
$$\Downarrow$$
$$y_T = -\frac{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3)}{4\cdot 1} = -\frac{4+12}{4} = -4$$

Det ses, at toppunktet er $T = (1;-4)$, som det også blev påstået tidligere.

Øvelse: Kontrollér de andre toppunkter i eksemplerne fra før.

Sinus-fælden vender tilbage!

I trigonometri-hæftet havde vi et eksempel på **sinus-fælden**:

I ΔABC er $A = 30°$, $a = 10$, $c = 12$. Find b.

For at finde b, kan man enten bruge sinus-relationerne eller cosinus-relationerne. Hér nøjes vi med cosinus-relationerne:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$$

I denne ligning kender vi alle størrelserne pånær b. Endvidere er det faktisk en andengradsligning i b. Det er nu fristende at sætte de kendte værdier ind i ligningen og løse løs:

$$10^2 = b^2 + 12^2 - 2\cdot b\cdot 12\cdot\cos 30°$$
$$\Downarrow.$$

$$100 = b^2 + 144 - b \cdot 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$b^2 - 12\sqrt{3}b - 44 = 0$$

Diskriminanten er
$$d = (-12\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 1 \cdot 44 = 256$$
og der findes **to** værdier for b:
$$b = \frac{-(-12\sqrt{3}) \pm \sqrt{256}}{2 \cdot 1} = \frac{12\sqrt{3} \pm 16}{2} = 6\sqrt{3} \pm 8 = \begin{cases} 6\sqrt{3} + 8 \\ 6\sqrt{3} - 8 \end{cases}$$

Med 4 betydende cifre er b altså
$$b = 6\sqrt{3} + 8 \approx 18,39 \qquad \text{eller} \qquad b \approx 6\sqrt{3} - 8 = 2,392$$

Den bitre erfaring viser, at det er bedst at tackle sinus-fælden på denne måde. Man glemmer nemlig ikke så let, at en andengradsligning har to løsninger.

Opgaver

1.L Løs følgende ligninger:

a) $2x^2+14x+24=0$ b) $4x^2+4x+1=0$

c) $3x^2-x+7=0$ d) $2x^2-2x=0$

e) $3x^2-27=0$ f) $-\sqrt{2}x^2+\sqrt{10}x+\frac{5}{4}\sqrt{5}=0$

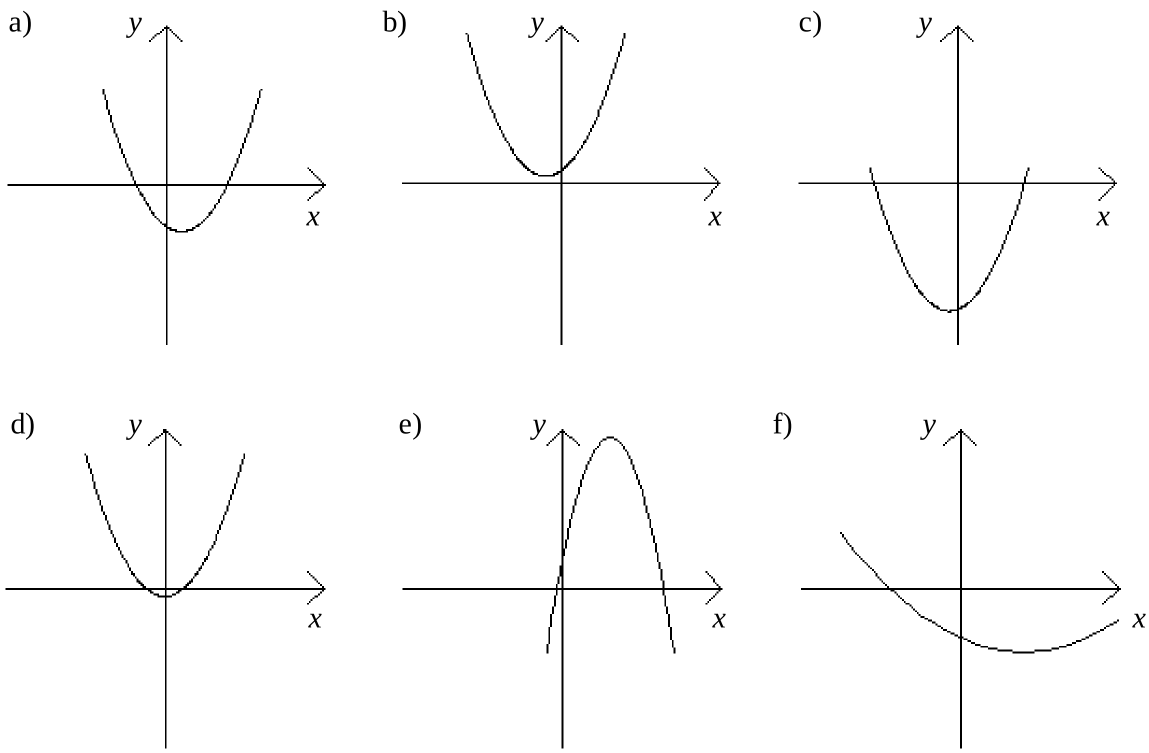
g) $4x^2=100$ h) $\frac{5}{2}x^2-\frac{7}{2}x+1=0$

2.L For nedenstående parabler skal skæringspunkterne med x-aksen og med y-aksen samt toppunktet bestemmes. Derefter skal parablerne skitseres i et koordinatsystem.

a) $y=2x^2+3x+2$ b) $y=2x^2$

c) $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x-1$ d) $y=x^2-2x+1$

3.L På figurerne nedenfor er vist graferne for nogle parabler med ligningen $y=ax^2+bx+c$. Bestem i hvert tilfælde fortegnene for tallene a, b, c og for diskriminanten d.



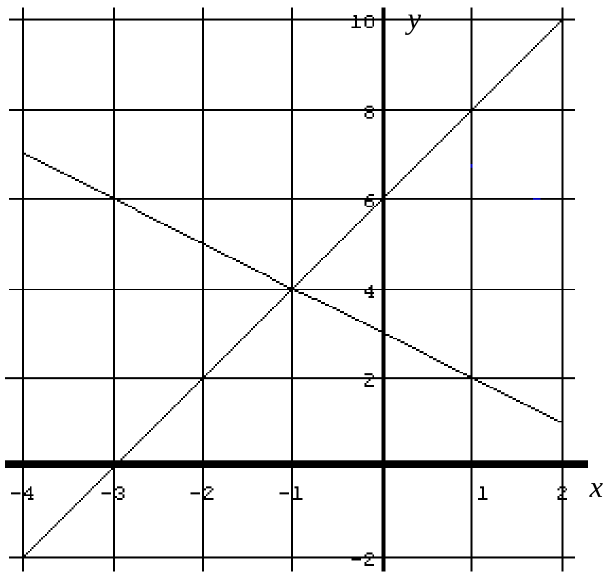
3.10 Skæringspunkter

Vi vil i det følgende vise, hvorledes man kan bruge den analytiske geometri til at finde skæringspunkter. Filosofien bag er følgende:

Vi har to linier og/eller kurver. De skærer måske hinanden, men hvor?
For at besvare dette tager vi ligningerne for de to kurver. Vi skal nu finde de koordinatsæt (x,y), som opfylder begge ligninger. At gøre dette er et rent algebraisk problem, som kun kræver en vis portion formelfræs. Løsningerne, altså de koordinatsæt (x,y), som påfylder begge ligningerne, er netop koordinatsættene til skæringspunkterne.

Vi illustrerer metoden med massevis af eksempler:

Eksempel



Linierne med ligningerne

$$y = 2x + 6$$

og

$$y = -x + 3$$

har, som figuren viser, et enkelt skæringspunkt. Faktisk kan vi aflæse dette skæringspunkt på figuren - det er (-1,4).

Det er dog bedre at se, om vi kan beregne dette punkt.

Vi søger altså et talpar (x,y), som opfylder ligningssystemet

$$\begin{cases} y = 2x + 6 \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

Når man skal løse sådan et ligningssystem, så er en anvendelig metode at *eliminere*, dvs. bortfjerne, den ene variabel.

I dette tilfælde kan vi eliminere y ved at sætte de to ligningers højresider lig hinanden:

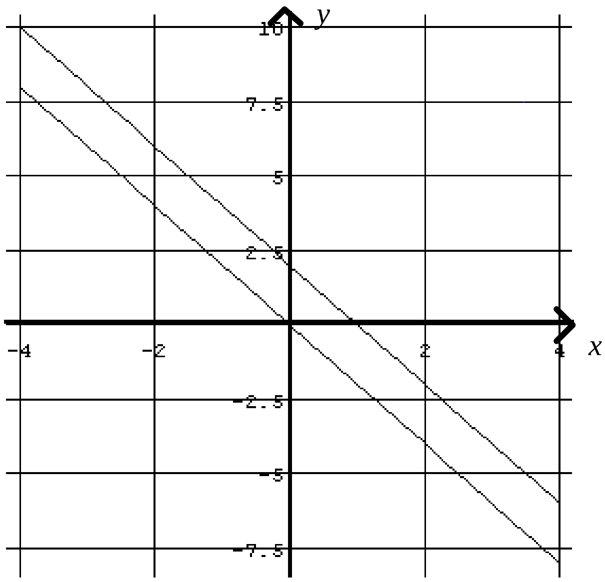
$$\begin{cases} y = 2x + 6 \\ y = -x + 3 \end{cases} \quad \Rightarrow. \quad \begin{cases} 2x + 6 = -x + 3 \\ y = -x + 3 \end{cases} \quad \Rightarrow.$$

$$\begin{cases} 3x = -3 \\ y = -x+3 \end{cases} \Rightarrow. \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = -x+3 \end{cases} \Rightarrow.$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vi ser altså, at skæringspunktet har koordinaterne (-1, 4).

Eksempel



Vi vil finde samtlige skærings-punkter mellem linierne med ligningerne:

$$2x + y = 2$$

og

$$4x + 2y = 0$$

Figuren viser, at de to linier er parallelle, hvilket betyder, at der ikke er nogen skæringspunkter.

Men vi prøver alligevel, om vi kan løse det relevante ligningssystem:

$$\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow. \qquad \begin{cases} y = 2 - 2x \\ 4x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow.$$

$$\begin{cases} y = 2 - 2x \\ 4x + 2(2 - 2x) = 0 \end{cases} \Rightarrow. \qquad \begin{cases} y = 2 - 2x \\ 4x + 4 - 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow.$$

$$\begin{cases} y = 2 - 2x \\ 4 = 0 \end{cases}$$

Ups - den sidste ligning i ligningssystemet endte med at blive 4=0, og dette er jo umuligt. Vi må derfor konkludere, at der ingen løsninger er til ligningssystsmet, og dermed ingen skæringspunkter mellem de to linier.

Eksempel

Vi vil finde skæringspunkterne mellem linierne med ligningerne:

$$y = 3x + 8 \quad \text{og} \quad 6x - 2y + 16 = 0.$$

Tegner vi linierne i et koordinatsystem, så ser vi, at linierne falder sammen , dvs at de to ligninger fremstiller den samme linie.

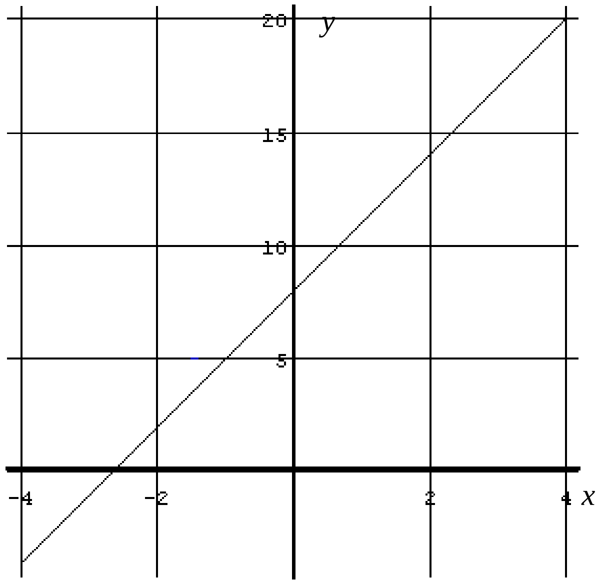
Dette betyder, at der er uendeligt mange skæringspunkter.

Løser vi ligningssystemet, så får vi

$$\begin{cases} y = 3x + 8 \\ 6x - 2y + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow. \quad \begin{cases} y = 3x + 8 \\ 6x - 2(3x + 8) + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow.$$

$$\begin{cases} y = 3x + 8 \\ 6x - 6x - 16 + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow. \quad \begin{cases} y = 3x + 8 \\ 6x - 6x - 16 + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow.$$

$$\begin{cases} y = 3x + 8 \\ 0 = 0 \end{cases}$$



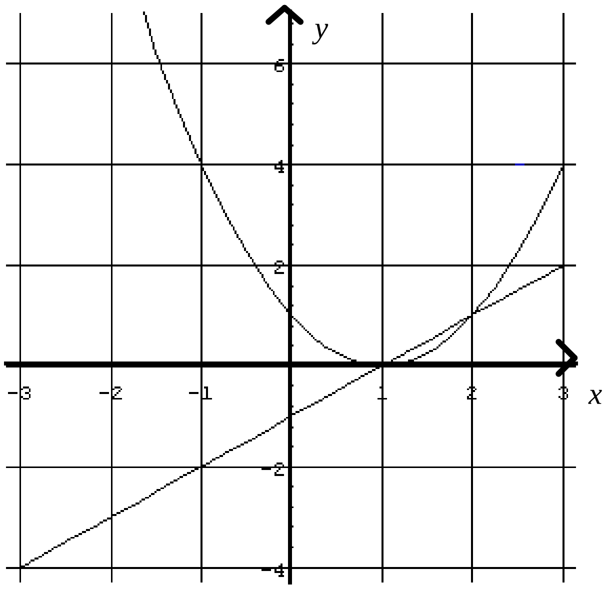
Vi ser, at den sidste ligning, 0=0, faktisk er overflødig, og at alle punkter (x,y), der opfylder ligningen

$$y = 3x + 8$$

også opfylder lignings-systemet.

Mængden af skærings-punkterne er her faktisk mængden af alle punkter på linien!

Eksempel



Vi vil nu finde skæringspunkterne mellem linien med ligningen

$y = x - 1$

og parablen med ligningen

$y = x^2 - 2x + 1$

Figuren viser, at der er to skæringspunkter, nemlig (1,0) og (2,1).

Vi finder disse koordinater ved at løse et passende ligningssystem:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow. \quad \begin{cases} y = x - 1 \\ x - 1 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow.$$

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ -x^2 + 3x - 2 = 0 \end{cases}$$

Den nederste andengradsligning har diskriminanten

$$d = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2) = 9 - 8 = 1$$

og dermed de to løsninger for en andengradsligning

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-3 \pm 1}{-2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

Dvs x=2 eller x=1. Indsættes disse x-værdier i den øverste ligning i ligningssystemet fås de tilsvarende y-værdier og det ses, at ligningssystemets løsninger (1,0) og (2,1). Dette er altså koordinaterne til skæringspunkterne.

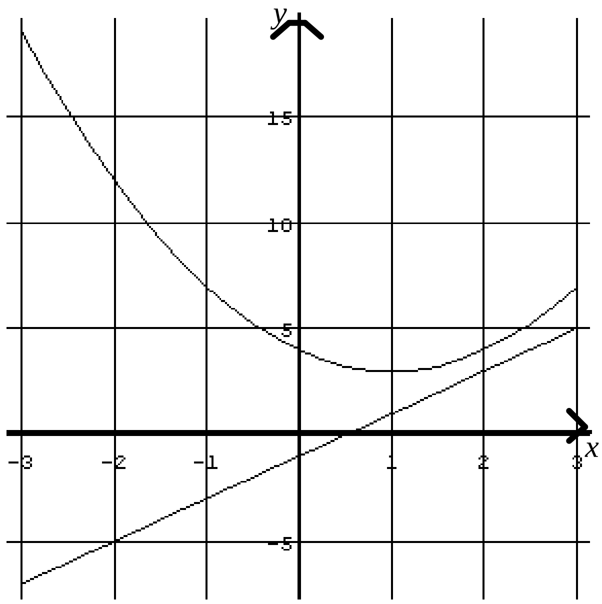
Eksempel

Vi vil finde eventuelle skæringspunkter mellem linien med ligningen

$$-4x+2y+2=0$$

og parablen med ligningen

$$y=x^2-2x+4$$



Figuren til venstre antyder, at der nok ikke er nogle skæringspunkter, og dette viser sig også at være tilfældet:

$$\begin{cases} -4x+2y+2=0 \\ y=x^2-2x+4 \end{cases} \Rightarrow. \qquad \begin{cases} y=2x-1 \\ y=x^2-2x+4 \end{cases} \Rightarrow.$$

$$\begin{cases} y=2x-1 \\ 2x-1=x^2-2x+4 \end{cases} \Rightarrow. \qquad \begin{cases} y=2x-1 \\ x^2-4x+5=0 \end{cases}$$

Den nederste andengradsligning har diskriminanten

$$d=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 5=15-20=-4,$$

og denne ligning og dermed hele ligningssystemet har ingen løsninger.

I det sidste eksempel viser vi, hvorledes man kan finde skæringspunkter mellem en linie og en cirkel:

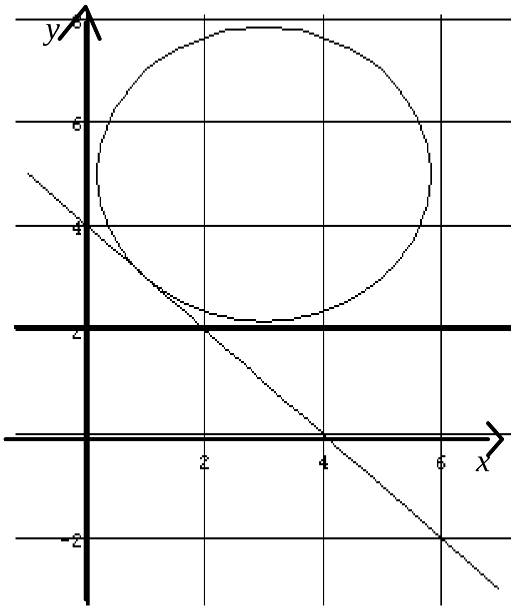
Eksempel

Cirklen med ligningen

$$x^2+y^2-6x-10y+26=0$$

har centrum (3,5) og radius $\sqrt{8}$ - dette bedes læseren selv kontrollere efter! Vi søger skæringspunkter mellem ovenstående cirkel og linien med ligningen

$$y=-x+4$$



Figuren antyder, at der kun er et skæringspunkt, og at linien derfor er tangent til cirklen. Vi efterprøver dette:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 10y + 26 = 0 \\ y = -x + 4 \end{cases} \Rightarrow .$$

$$\begin{cases} x^2 + (-x+4)^2 - 6x - 10(-x+4) + 26 = 0 \\ y = -x + 4 \end{cases} \Rightarrow .$$

$$\begin{cases} x^2 + x^2 - 6x - 8x + 16 + 10x - 40 + 26 = 0 \\ y = -x + 4 \end{cases} \Rightarrow .$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 4x + 2 = 0 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

Andengradsligningen har diskriminanten

$$d = (-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16 - 16 = 0$$

og der er altså kun en løsning til denne ligning, nemlig

$$x = \frac{-(-4)}{2 \cdot 2} = 1$$

Sættes x=1 i den nederste ligning, så ses at ligningssystemets eneste løsning er talparret (1,3).

Dette betyder, at cirklen og linien skærer (eller rettere rører) hinanden i punktet (1,3). Dette passer også med figuren!

Opgaver

1.L Beregn samtlige skæringspunkter (med 2 dec) mellem kurverne nedenunder. Der er enten tale om parabler, linier eller cirkler:

a)	$3x+4y=7$	og	$3x+4y=13$
b)	$3x+4y=7$	og	$3x+4y=14$
c)	$x-7y+14=0$	og	$x^2+y^2-8x+2y=8$
d)	$x^2+y^2+4x-8y=5$	og	$13x+7y=11$
e)	$y=-\frac{1}{2}x^2-6x-16$	og	$y=2x+14$

3.11 Opgaver

1.M Vis, at linierne med ligningerne

$$x+2y-10=0 \qquad \text{og} \qquad 2x-y=10$$

er orthogonale.

2.M Linien *m* går gennem *P*=(8,3) og *Q*=(5,-4). Find en ligning for linien *n*, som går gennem *R*=(2,5), og som er orthogonal med *m*.

3.M Afgør om linierne *AB* og *AC* er orthogonale, når punkterne *A*, *B* og *C* er givet ved *A*=(12,9), *B*=(41,56) og *C*=(-6,38).

4.M Linierne *m* og *n* har ligningerne

$$m: 3x-4y=2 \quad \text{og} \quad n: kx+7y=12$$

a) Bestem tallet *k*, således at *m* og *n* er orthogonale.
b) Bestem tallet *k*, således at *m* og *n* er parallelle.

5.S En cirkel har centrum i punktet *C*=(5,2) og går gennem punktet *P*=(7,8).
a) Opskriv cirklens ligning.
b) Opskriv ligningen for diameteren *d* gennem *C* og *P*.
c) Opskriv ligningen for cirkeltangenten gennem *P*.
(Vink: cirkeltangenten står vinkelret på diameteren).
d) Find det andet skæringspunktet *Q* mellem diameteren *d*
e) Bestem ligningen for cirkeltangenten gennem *Q*.

6.M Bestem afstanden mellem punktet *A* og linien *m*, når
a) $A=(-3;5)$ og $m: 3x-7y=-4$
b) $A=(2;3)$ og $m: y=3x+2$
c) $A=(2;5)$ og $m: 10x-6y+20=0$
d) $A=(8;-3)$ og $m: y=-2x-24$
e) $A=(4;-2)$ og $m: 6x-2y+14=0$
f) $A=(6;-4)$ og $m: 4x-2y+4=0$

7.S Der er givet et punkt *P*=(6,9) og en linie *m* med ligningen $-x+2y-3=0$. Beregn koordinatsættet til spejlbilledet af *P* i linien *m* (Vink: Tegn situationen).

8.M En cirkel har centrum i punktet *C*=(-2,3), og den har en tangent med ligningen $y=\frac{1}{3}x-1$. Bestem en ligning for cirklen.

9.M Beregn samtlige skæringspunkter (med 2 dec) mellem kurverne nedenunder. Der er enten tale om parabler, linier eller cirkler:

a) $3x+y=24$ og $x^2-5x=y$

b) $x+y=x^2$ og $3x+4y=14$

c) $2x-7y-10=0$ og $x^2+y^2+5x+2y=50$

d) $x^2+y^2-6x+10y=-9$ og $x=3$

e) $y=-\frac{1}{3}x^2+3x+66$ og $y=5x+1$

10.M Find vinklerne i en trekant, hvis sider har ligningerne

$3x-2y=4$ $\quad 8x+3y=69$ $\quad x-2y=11$

11.M Løs følgende ligninger:

a) $12x^2+34x-3=0$ b) $-2x^2+23x+13=0$

c) $-2x^2+23x-13=0$ d) $x^2+6x+9=0$

e) $-x^2-3x-4=0$ f) $-x^2-4=0$

g) $-x^2+4x=0$ h) $12x^2-4x-2=0$

12.M I en beholder er der luft, og sammenhørende værdier af luftens temperatur og tryk er målt. Resultaterne fremgår af tabellen - temperaturen *T* er målt i ^{0}C og trykket *p* i mmHg.

T	0	12	27	36	49	71	88	100	114	137
p	680	714	750	770	805	860	870	935	970	1030

Ifølge teorien er *p* en lineær funktion af *T*, men pga. måleusikkerheder passer dette ikke helt.

a) Indtegn resultaterne ovenfor på et stykke mm-papir.

b) Bestem en forskrift for *p* som funktion af *T*.

Den temperatur, der svarer til trykket 0 mmHg, kaldes det absolutte nulpunkt.

c) Bestem ud fra forskriften det absolutte nulpunkt.

13.M En trekants sider er givet ved ligningerne:

$y=-3$ $\quad 3x-4y+5=0$ $\quad 3x+3y-10=0$

Find vinklerne i trekanten.

14.M Givet ligningerne $y=x^2+1$ og $y=x+2$

a) Tegn ligningernes grafiske billede

b) Find skæringspunkterne mellem kurverne

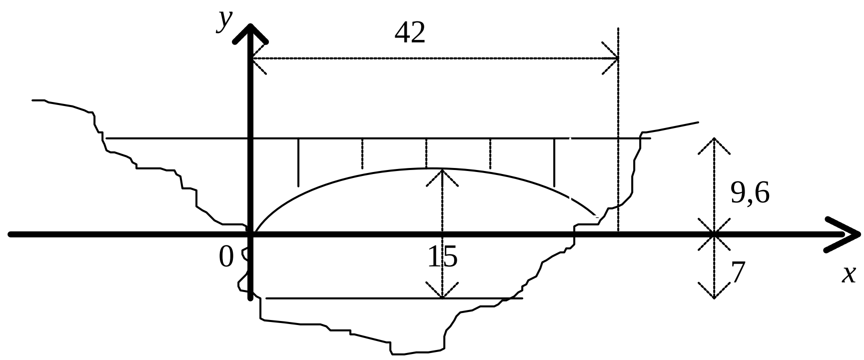
15.M Bestem centrumskoordinaterne og radius for følgende cirkler:

a) $y^2+x^2+36+15y-12x=0$

b) $x^2+y^2=15-4y+2x$

c) $x^2-6x=12-y^2+4y$

16.S



En bro er udformet som vist på figuren. Den krumme del skal have form som en parabel. Der ønskes beregnet en længde af alle de lodrette stænger. Det oplyses, at disse stænger er lige langt fra hinanden.

17.M To rette linier *l* og *m* skærer hinanden i *P*=(7,5)

a) Bestem ligninerne for linierne, når *l* går igennem *Q*=(0,8) og *m* står vinkelret på *l*.

b) Bestem de to liniers skæringspunkt med akserne.

c) Bestem ligningen for den linie, der går igennem *R*=(14,0) og er parallel med *y*-aksen.

d) Beregn arealet af den trekant, der begrænses af nævnte tre linier.

18.M Løs følgende ligninger:

a) $12x^2 - 4x - 2 = 0$	b) $30x^2 = x$
c) $3x^2 + 12 = 0$	d) $5,4x^2 + 1,65 = 0$
e) $6,1x^2 + 2,2x + 15 = 0$	f) $64x^2 - 2x = 15 - 3x^2 + 1$

19.S Bestem ligningen for parablen, som går gennem punkterne

P=(0;5), *Q*=(4;8), *R*=(10; 6)

20.M Givet parablen med ligningen $y = 2x^2 + 2x - 4$

a) Tegn parablen

b) Beregn skæringspunkter med *x*-aksen

c) Opskriv de to intervaller, hvor parablen ligger over *x*-aksen

d) Løs uligheden $0 < 2x^2 + 2x - 4$

21.M Givet parablen med ligningen $y = x^2 + 3x - 1$

a) Tegn parablen

b) Beregn skæringspunkter med *x*-aksen

c) Opskriv intervallet, hvor parablen ligger under *x*-aksen

d) Løs uligheden $0 > 2x^2 + 2x - 4$

22.M En bold kastes lodret op i luften med en starthastighed på 15 m/s. Boldens højde over jorden kan beskrives ved ligningen:

$y = 2,3 + 15x - 5x^2$ hvor y angiver meter over jorden og
x angiver tiden i sekunder

a) Hvor højt når bolden op?
b) Hvornår rammer bolden jorden?
c) Hvor længe er bolden højere oppe end et træ på 10m?

23.S Givet trekant *ABC* hvor *A*=(-4,2), *B*=(0,2) og *BC*´s midtpunkt er *M*=(1,4).
a) Bestem koordinaterne til *C*
b) Bestem en ligning for medianen fra *A* ned på *BC*
c) Bestem medianernes skæringspunkt *P*
d) Bestem $|AP|$ og $|PM|$ og $\frac{|AP|}{|AM|}$

24.S Bestem tallet *k*, så linierne med ligningerne:
$2x + y = 4$ og $kx + 3y = 10$
a) er parallelle
b) skærer hinanden i (1,2)
c) er ortogonale

25.M To flyvemaskiner A og B flyver i samme højde over en flyveplads klar til landing, mens de venter på landingstilladelse. Til tiden 0 sekunder befinder A sig 2000 m nord for B. A flyver mod syd med en fart på 300 m/s, og B flyver mod øst med en fart på 100 m/s. Bestem afstanden mellem flyene efter
a) 2 sekunder b) 6 sekunder c) *t* sekunder

26.S I et koordinatsystem er der givet to linier *l* og *m* med ligningerne:
$l: y = 2x - 1$ og $m: y = x$
a) Tegn linierne *l* og *m* i et koordinatsystem, og gør rede for, at de skærer hinanden i punktet (1,1).
b) Beregn den spidse vinkel mellem *l* og *m*.
c) Find ligningen for vinkelhalveringslinien for den spidse vinkel mellem *l* og *m*.

27. M To taxafirmaer A og B fastlægger deres takster forskelligt:
Firma A tager 7,00 kr. i startpenge og 7,50 kr. pr kørt km.
Firma B tager 12,00 kr. i startpenge og 35,0 kr. pr. kørt km.
Med $f(x)$ betegnes prisen for at køre x km med firma A. Med $g(x)$ betegnes prisen for at køre x km med firma B.
a) Angiv regneforskrifter for funktionerne *f* og *g*.
b) Løs uligheden $g(x) < f(x)$.
c) Hvad siger løsningen til uligheden om prisen på taxature med de to firmaer?

Et tredie firma C fastlægger taksten som: 7,00 kr i startpenge, 10,00 kr for den først kørte km og 6,00 kr for hver af de næste km.

d) Indtegn i et koordinatsystem prisen for en tur med firma C som funktion af antal kørte km.

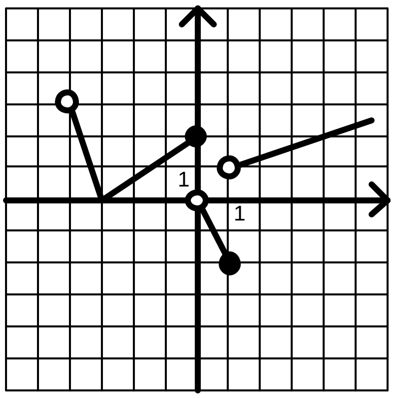
e) For hvor lange taxature er firma C det dyreste?

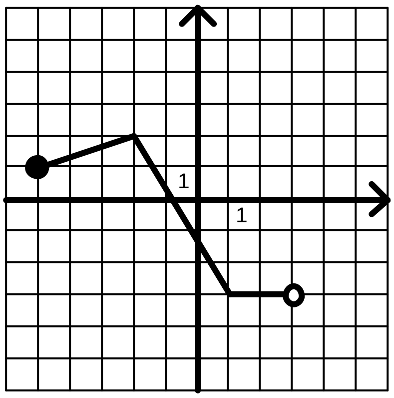
28.M Grafen for en lineær funktion *f* går gennem punkterne *A*=(-10,12) og *B*=(9,22).

1) Bestem en regneforskrift for *f*.

2) Undersøg, om punktet *C*=(7 ; 19) ligger på grafen for *f*.

29.M Figurerne viser graferne for to stykkevis lineære funktioner, *f* og *g*.
Find forskrifterne for *f* og *g*.





30. M I nedenstående citat fra *Politiken*, 18/9 1985 kan man læse om beskatningsreglerne for privatkørsel i firmabil, når der køres op til 10000 km årligt:

Efter de nye regler vil taksten pr. kilometer for en årlig kørsel på op til 10.000 km udgøre 1/50 promille af nyvognsprisen.
Den skal dog mindst være på 3 kr. pr. km og højst 8 kr.
Det vil sige, at alle biler, der koster under 150.000 kr, skal have taksten forhøjet til minimum 3 kr., hvorimod der højst skal betales 8 kr. pr. km for biler, der koster over 400.000 kr.

Bemærk: 1/50 promille = 1/50000

a) Tegn grafen for den funktion, der angiver taksten pr. kilometer som funktion af nyvognsprisen.

b) Bestem en forskrift for denne funktion.

31.M I Roskilde Kommune betaler beboerne for deres vandforbrug efter nedenstående bestemmelser. Ud over en fast afgift betales både en vandafgift og en vandledningsafgift, som begge afhænger af forbruget. I 1991 var taksterne:

Fast afgift:	91.50 kr.
Vandafgift:	5.20 kr. pr. 1000 liter vand.

Vandledningsafgift: 14.52 kr. pr. 1000 liter vand.

a) Bestem en regneforskrift for den funktion $f(x)$, som angiver den samlede udgift til vand, målt i kr., som funktion af vandforbruget x, målt i 1000 liter.

En familie brugte 172000 liter vand i 1990.

b) Beregn familiens samlede udgift til vand i 1991 ved uændret forbrug.

Familien vil gerne nedsætte den samlede vandudgift for 1991 til højst 2500 kr.

c) Hvilket vandforbrug måtte familien så højst have i 1991?

32.M En kunsthåndværker fremstiller en bestemt type krukker. Han vil levere 50 krukker pr. måned, hvis prisen sættes til 100 kr. stykket, og han vil levere 70 krukker pr. måned, hvis prisen sættes til 120 kr. stykket.Antallet af krukker, han leverer pr. måned, kaldes *udbudet*, og det antages, at udbudet er en lineær funktion af prisen pr. krukke for priser mellem 80 kr. og 120 kr.

a) Tegn på grundlag af dette grafen for udbudsfunktionen i et koordinatsystem.
b) Bestem en regneforskrift for denne funktion.

Efterspørgslen på krukkerne er også en funktion af prisen. Det antages, at denne funktion er givet ved:

$$E(x) = -0.7x + 128 \quad , \quad 40 \le x \le 140$$

c) Bestem den pris, for hvilken det gælder, at udbud og efterspørgsel er lige store.

33.M En *synodisk måned* er den tid, der går mellem to fuldmåner, eller, hvad der er det samme, Månens omløbstid omrking Jorden.
Idet Månen langsomt bremses op i sin rotation omrking Jorden, kan man forvente, at længden af den synodiske måned langsomt aftager gennem årmillionerne.
En måde at måle, hvorledes den synodiske måned aftager, er ved at betragte forstenede muslinger. En muslingeskal er nemlig opdelt i perioder svarende til en synodisk måned, og som igen er opdelt i dag-vækstlag. Ved at optælle det gennemsnitlige antal dag-vækstlag i de forstene muslinger kan man således finde ud af, hvorledes den synodiske måned har varieret gennem tiden.

I nedenstående tabel er angivet sammenhørende værdier af

t = forsteningens alder i mill. år

og

x = den synodiske måneds længde i dage.

t	0	18	40	46	72	205	300	340	380	510
x	29,2	29,4	29,6	29,8	29,9	29,7	30,1	30,4	30,5	31,6

a) Gør rede for, om man med rimelighed kan antage, at der er en lineær sammenhæng mellem x og t.

b) Ifølge nutidige astronomiske observationer aftager den synodiske måneds længde med 2 millisekunder pr. århundrede. Er dette i overensstemmelse med målingerne ovenfor?

34.M Man kommer engang i mellem ud for, at sammenhængen mellem to størrelser ikke er lineær; men at denne sammenhæng kan *transformeres* om til en lineær sammenhæng. Eksempelvis kan man undersøge et enzyms reaktionshastighed v som funktion af substratkoncentrationen c. (Et *enzym* er et protein, der virker som katalysator, typisk i en biologisk sammenhæng). Teoretiske overvejelser antyder, at sammenhængen mellem v og c er af formen

$$\frac{1}{v} = a\frac{1}{c} + b$$

altså en lineær sammenhæng mellem $\frac{1}{c}$ og $\frac{1}{v}$.

Nedenstående skema indeholder en række målinger af c og v:

c	137,0	99,5	67,6	26,2	13,6	10,0	7,9
v	22,0	20,5	19,0	12,5	9,0	7,0	6,0

a) Lav en tabel, som viser sammenhængen mellem $\frac{1}{c}$ og $\frac{1}{v}$.

b) Er der tale om en lineær sammenhæng mellem $\frac{1}{c}$ og $\frac{1}{v}$?

c) Bestem konstanterne a og b.

35.S I et koordinatsystem er en cirkel bestemt ved ligningen

$$x^2 + y^2 - 28x - 18y + 273 = 0$$

Bestem cirklens radius og koordinatsættet til dens centrum.

For ethvert reelt tal a fremstiller ligningen

$$y = ax + 1$$

en ret linie m_a.

Vis, at linien $m_{1/2}$ skærer cirklen.

Bestem tallet a, således at linien m_a skærer cirklen i to punkter, som ligger på en diameter i cirklen.

Bestem mængden af tal a, for hvilke m_a har punkter fælles med cirklen.

Facitliste

Kapitel 2

1: a) $y = x + 2$ b) $y = -\frac{1}{3}x + 3$ c) $y = x + 11$

d) $y = 3$ e) $y = 5x + 4$ f) $y = 8x - 32$

2: a) 63,43° b) 33,69° c) 45° d) 37,87°

e) 33,69° f) 18,48° g) 45° h) 101,31°

Kapitel 3

1: a) $-\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{8}$ c) ingen d) 125

Kapitel 4

1: b) $x = 0{,}025\frac{\text{cm}}{\text{g}} \cdot m$ c) Ja

Kapitel 5

1: a) $-\frac{41}{3}$ 5

3: $$f(x) = \begin{cases} 3x + 9, & x \le -2 \\ -2, & -2 < x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ -2, & 0 < x < 2 \\ -4, & x = 2 \\ -x + 5, & x > 2 \end{cases}$$

4: a) 16 b) 8 c) 0 d) 25 e) -25 f) 8

Kapitel 6

1: b) $\sqrt{34}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{41}$, $\sqrt{37}$, $\sqrt{85}$, $\sqrt{18}$

2: $|AB| = \sqrt{218}$, $|AC| = \sqrt{261}$, $|BC| = \sqrt{173}$, A=50,10°, B=70,45°, C=59,45°

Kapitel 7:

1: a) $\frac{21}{\sqrt{13}}$ b) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{34}{\sqrt{433}}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{26}}$ e) $\frac{42}{\sqrt{58}}$ f) $\frac{43}{\sqrt{53}}$

Kapitel 8

1: a) $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 4x + 8y + 4 = 0$ d) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$

2: a) Cirkel med centrum (2,3) og radius 1 b) Punktet (4,-4)

c) Cirkel med centrum $(-2, \frac{1}{2})$ og radius 3 d) Ingenting

e) Cirkel med centrum (-1,-1) og radius $\sqrt{3}$

Kapitel 9

1: a) -3 og -4 b) $-\frac{1}{2}$ c) ingen

d) 0 og 1 e) 3 og -3 f) 5 og -5

g) -4 og 1 h) ingen

2:

	x-akse	y-akse	toppunkt
a	ingen	(0,2)	(-0,75;0,875)
b	(0,0)	(0,0)	(0,0)
c	ingen	(0,-1)	(-0.5;-0,875)
d	(1,0)	(0,1)	(1,0)

3: a) $a>0$, $b<0$, $c<0$, $d>0$ b) $a>0$, $b>0$, $c>0$, $d<0$

c) $a>0$, $b>0$, $c<0$, $d>0$ d) $a>0$, $b=0$, $c<0$, $d>0$

e) $a<0$, $b<0$, $c>0$, $d>0$ f) $a>0$, $b<0$, $c<0$, $d>0$

Kapitel 10

1: a) ingen b) mange c) (0,2) og (7,3)

d) (0,8895 ; -0,0805) og (-3,8161 ; 8,6585)

e) (-10,-6) og (-6,2)

Kapiteloversigt

Den rette linie

$y = ax + b$	Ligningen for en linie.
$y = a(x - x_0) + y_0$	Ligningen for en linie gennem punktet (x_0, y_0).
$a = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$	Hældningen for en linie gennen punkterne (x_0, y_0) og (x_1, y_1).
$a = \tan v$	v er vinklen mellem linien og x-aksen.
$a_l \cdot a_m = -1$	Produktet af to vinkelrette linier med hældninger a_l og a_m

Afstandsformler

$\lvert AB \rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	Afstanden mellem punkterne $A = (x_1, y_1)$ og $B = (x_2, y_2)$
$\operatorname{dist}(P, l) = \dfrac{\lvert ax_1 + b - y_1 \rvert}{\sqrt{a^2 + 1}}$	

Afstanden mellem linien $l: \ y = ax + b$, og punktet $P = (x_1, y_1)$

Cirkler

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$	Ligningen for cirklen med centrum (a,b) og radius r.

Parabler

$y = ax^2 + bx + c \ , \ a \neq 0.$	Ligningen for en parabel.
$(0,c)$	Parablens skæring med y-aksen.
$T = \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{d}{4a}\right)$	Parablens toppunkt.
$(x, y) = \left(\dfrac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}, 0\right)$	Parablens skæring med x-aksen. Det kræver dog, at $d = b^2 - 4ac \ > 0$