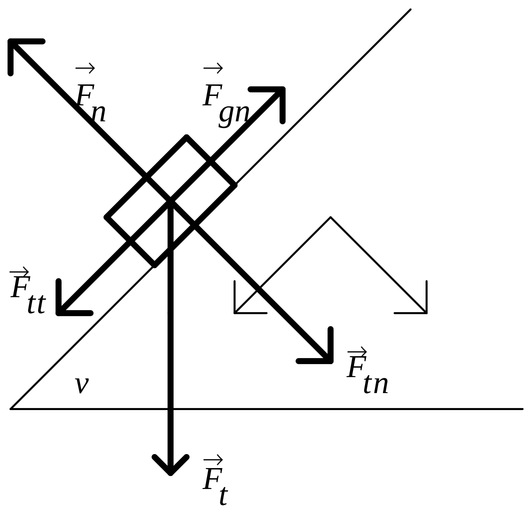
Matematikkens mysterier

- på et højt niveau

af

Kenneth Hansen

2. Plangeometri og vektorer



En klods på et skråplan:
Hvad er den resulterende kraft?

2. Plangeometri og vektorer

Indhold

2.1	Racerbilsspil	2
2.2	Vektorer	4
2.3	Nogle geometriske anvendelser	10
2.4	Koordinater for vektorer	14
2.5	Skalarproduktet	19
2.6	Tværvektor og determinant	28
2.7	Projektioner og opløsninger	35
2.8	Den rette linie	41
2.9	Opgaver	50
	Facitliste	54
	Kapiteloversigt	55

Anvendte symboler

Sætninger, definitioner og formler er mærket med

FS: sætningen findes i formelsamlingen

LS: lær selv formlen udenad - den findes (underligt nok) **ikke** i formelsamlingen, og du får sikkert brug for den til eksamen

2.1 Racerbilspil

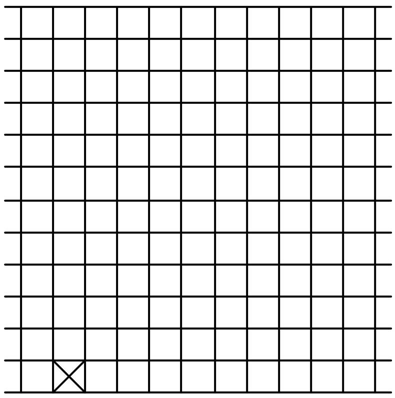
Reglerne for racerbilspillet er som følger:

1) Hver deltager har en bil.

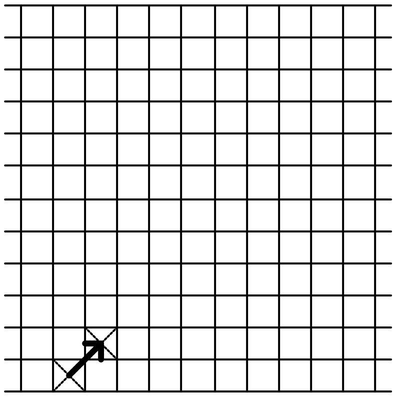
2) Spillepladen (banen) er et ternet stykke papir, hvorpå man vælger et startfelt og et målfelt. Endvidere skal man tegne nogle kurver, som er grænserne for banen.

3) Den spiller, som kommer først i mål, har vundet. En spiller, som rammer grænserne for banen, går ud af spillet.

4) Spillerne flytter deres brikker efter tur. For at illustere, hvorledes man flytter, giver vi et eksempel på en bils bevægelse:

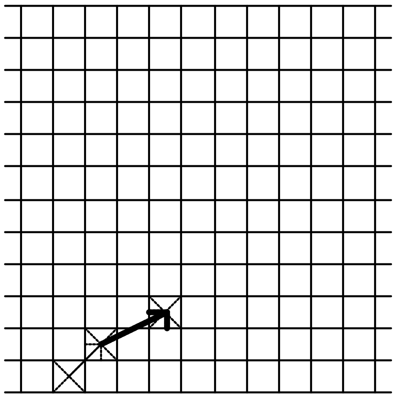


Til at starte med står bilen i feltet mærket med et kryds.

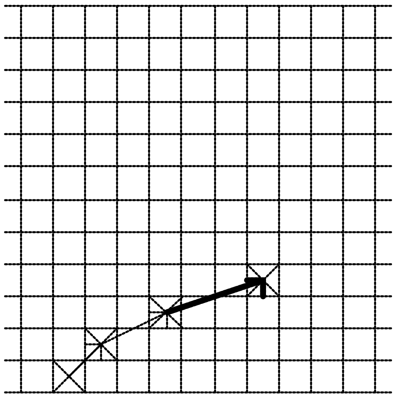


Den første spiller vælger nu en retning, som bilen skal bevæge sig i. Bilen bevæger sig et felt i denne retning. Man husker denne retning ved at tegne en pil.

På tegningen til højre har spilleren valgt at gå et felt skråt opad til højre.



Næste gang, det er spillerens tur, vælger han at gå et felt til højre. Hans bevægelse er da den første bevægelse (skråt op til højre) og den anden bevægelse (højre) *tilsammen*.



Denne gang har spilleren igen valgt at øge sin hastighed (den tykt optrukne pil) med et felt til højre.

Selve strategien i spillet er at opnå en tilpas stor hastighed, men uden at komme i karambolage med banegrænserne. Der er nemlig begrænsede muligheder for at bremse op (her må man vælge hastighedsændringer *modsat* bevægelsesretningen).

Endelig kan det nævnes, at man inden for fysikken kalder hastighedsændringen, som her er på et tern pr. runde, for *accelerationen*.

All I hear is your gear,
When my hand's on your grease gun,
Oh it's like a disease son,
I'm in love with my car, gotta feel for my automobile,
Get a grip on my boy racer rollbar,
Such a thrill when your radials squeal
Queen: I'm in love with my car

2.2 Vektorer

En *skalar* er en størrelse, eller et tal, som angiver en mængde eller en måling, f.eks. 7-tallet i '7 æbler', eller 5,2 i '5,2 kg mel'. (Der er i øvrigt ingen sammenhæng med den velkendte akvariefisk *scalara'en*).

En *vektor* derimod er en størrelse, som angiver både en mængde og en retning. F.eks. '7 km i nordøstlig retning' eller 'kraften er 7 N og er rettet nedad'.

Vektorer optræder i stort tal indenfor fysik. Følgende størrelser er faktisk vektorer:

kraft, hastighed, acceleration, elektrisk feltstyrke, ...

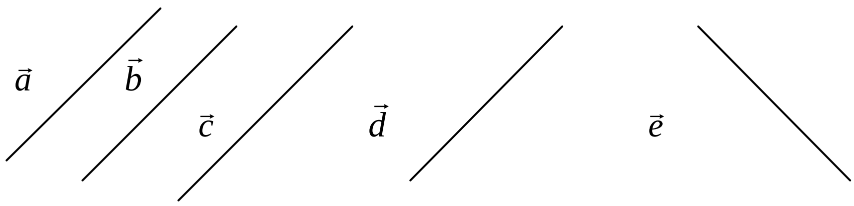
mens følgende kun er skalarer:

tid, tryk, masse, ladning, areal, ...

I racerbilsspillet betragtede vi forskellige vektorer: Hastighedsvektoren var den pil, der bestemte, hvor meget bilen flyttede sig fra runde til runde, og accelerationen var ændringen af hastigheden fra runde til runde.

Man betegner normalt en vektor som et bogstav med en lille pil over: $\vec{a}$ - man kan dog godt komme ud for, at man betegner en vektor med fed type: ***a***.

Groft sagt kan man sige, at en vektor er en pil. Vi siger, at to vektorer er ens, hvis de peger i samme retning og har samme længde. Kigger vi på nedenstående figur, så ses, at $\vec{a} = \vec{b}$, mens $\vec{a}$ ikke er lig $\vec{c}$, $\vec{d}$ eller $\vec{e}$.



Længden af vektoren $\vec{a}$ er et tal (eller en skalar) og betegnes med $|\vec{a}|$. På figuren er $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{d}| = |\vec{e}|$.

En speciel vektor er *nulvektoren*, $\vec{0}$. Den har længden 0 og ingen retning. Den tegnes som en prik. En vektor, som ikke er nulvektoren, kaldes en *egentlig vektor*.

To vektorer er *ensrettede*, hvis de peger i samme retning. På figuren er f.eks. $\vec{a}$ og $\vec{c}$ ensrettede. To vektorer er *modsat rettede*, hvis de peger i modsatte retninger. På figuren er $\vec{a}$ og $\vec{d}$ modsat rettede.
To vektorer kaldes *parallelle*, hvis de er ensrettede eller modsat rettede. På figuren er $\vec{a}$ og $\vec{c}$, og $\vec{a}$ og $\vec{d}$ parallelle. Vi betegner dette med $\vec{a} \parallel \vec{c}$ og $\vec{a} \parallel \vec{d}$

To vektorer kaldes *ortogonale* eller *vinkelrette*, hvis de står vinkelret på hinanden. $\vec{a}$ og $\vec{e}$ ovenfor er ortogonale - vi skriver $\vec{a} \perp \vec{e}$

Nulvektoren har ingen retning, så derfor kan den hverken være ensrettet, modsat rettet, parallel eller ortogonal med noget som helst.

Inspireret af vort racerbilsspil indfører vi endvidere de vigtige operationer: *addition* og *subtraktion* af vektorer samt *multiplikation* af en vektor med en skalar (den såkaldte *skalarmultiplikation*):

Definition 1

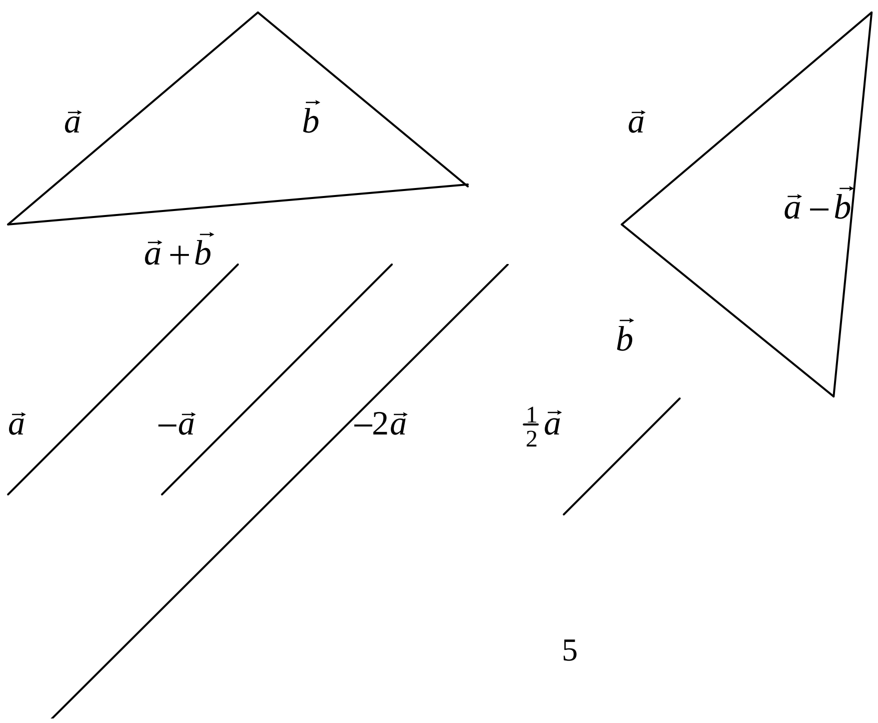
Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være vektorer og t et reelt tal. Så defineres:

a) $\vec{a}+\vec{b}$ som vektoren fra $\vec{a}$'s hale til $\vec{b}$'s hoved, når $\vec{b}$ er sat i "forlængelse" af $\vec{a}$.

b) $\vec{a}-\vec{b}$ som vektoren fra $\vec{b}$'s hoved til $\vec{a}$'s hoved, når halerne for $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er sammenfaldende.

c) $t\vec{a}$ som den vektor, der er $\begin{cases} \text{ensrettet med } \vec{a} & \text{for } t>0 \\ \text{modsat rettet } \vec{a} & \text{for } t<0 \\ \text{lig med } \vec{0} & \text{for } t=0 \end{cases}$, og som har længden $|t| \cdot |\vec{a}|$.

Her er det vist på sin plads med et par tegninger:



Der er et par dunkle punkter i denne definition - se opgave 2.5.

Der gælder følgende regneregler for regning med vektorer:

Sætning 2

Lad , og være vektorer, s og t reelle tal. Da gælder

a) b)

c) d)

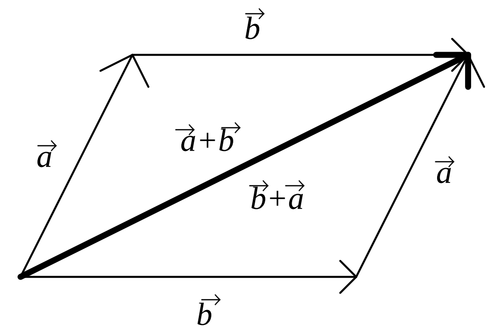
e) f)

g) h)

i) j)

Bevis:

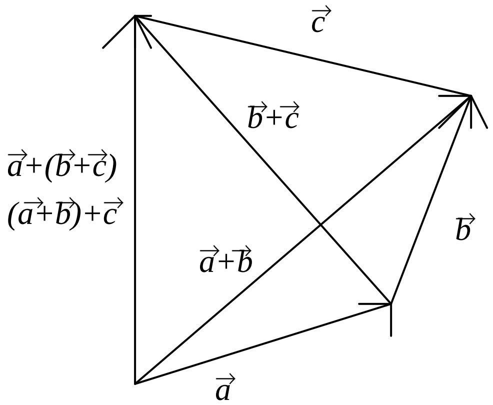
a) Denne regel kaldes ofte *parallelogramreglen*.



Årsagen hertil kan ses på tegningen, som i øvrigt også er beviset.

Diagonalen i parallelogrammet skabt af vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$, kan fortolkes som både som $\vec{a}+\vec{b}$ og som $\vec{b}+\vec{a}$.

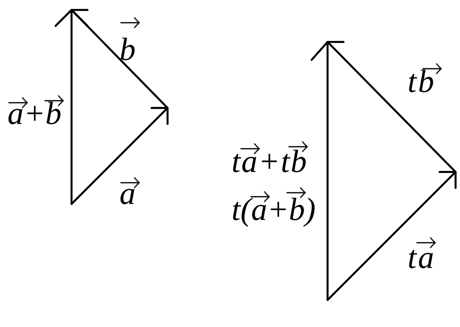
b) Igen udgør beviset en tegning:



På tegningen er vektorerne $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ sat i halen på hinanden. Sumvektorerne $\vec{a}+\vec{b}$ og $\vec{b}+\vec{c}$ konstrueres. Det ses, at vektorerne $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ og $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$ er identiske.

c) Dette udsagn er opfyldt, idet addition med nulvektoren ikke ændrer noget - nulvektorens "hoved" og "hale" er jo sammenfaldende.

d) Beviset i det tilfælde, hvor begge vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er egentlige vektorer, og $t>0$:



.
Bemærk, at trekanterne er proportionale med proportionalitetsfaktoren *t*.

e-h) Dette er udsagn om længderne af de indgående vektorer.

i-j) Disse kaldes ofte *trekantsulighederne*, idet de er reformuleringer af de gammelkendte udsagn om, at summen af længderne af de to sider i en trekant er større end længden af den tredie. Trekanterne her er naturligvis de trekanter, hvor siderne udgøres af vektorerne $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$ henholdsvis $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$

Ved geometriske anvendelser har man ofte brug for at tale om en vektor mellem to punkter:

Definition 3 (LS)

Lad A og B være to punkter. Vektoren startende i A og sluttende i B betegnes med $\overrightarrow{AB}$.

Vi har følgende sætning om sådanne vektorer:

Sætning 4 (LS)

ad A, B og C være punkter. Da gælder:

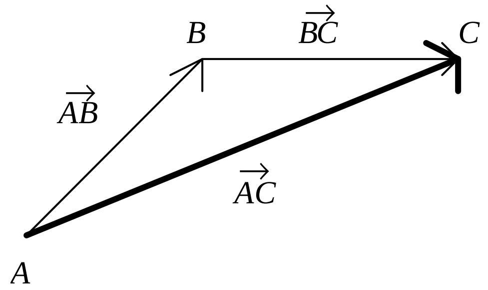
a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Regel a) kaldes ofte *indskudsreglen*.

Bevis:

a) Betragt nedenstående figur:



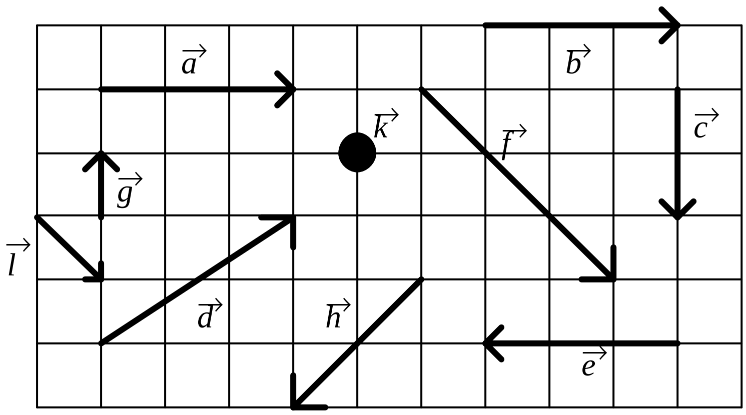
Denne figur viser faktisk, at indskudsreglen er en reformulering af definitionen af vektoraddition.

b) Dette følger umiddelbart af det faktum, at

$$\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$$

Opgaver

2.1 Betragt følgende vektorer:



Besvar følgende spørgsmål:

a) Hvilke to vektorer er ens?

b) Hvilken vektor er faktisk nulvektoren?

c) Hvilke vektorer er ensrettede med $\vec{c}$?

d) Hvilke vektorer er ortogonale med $\vec{c}$?

e) Opskriv tre par af ortogonale vektorer.

f) Er $\vec{a}$ og $\vec{e}$ ensrettede eller modsat rettede?

g) Hvilke vektorer er parallelle med $\vec{b}$?

h) Er $\vec{k}$ og $\vec{d}$ parallelle?

2.2 Overfør hver af vektorerne fra figuren i opgave 2.1 til ternet papir.
Tegn derefter følgende vektorer:

a) $\vec{a}+\vec{c}$ b) $\vec{d}+2\vec{e}$ c) $\vec{f}-\vec{h}$

d) $(\vec{a}-\vec{b})-\vec{c}$ e) $\vec{a}-(\vec{b}-\vec{c})$ f) $2\vec{e}+3\vec{f}-4\vec{g}$

2.3 Idet sidelængden af et tern på figuren sættes til 1, så skal længden af alle vektorerne $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}, \vec{g}, \vec{h}, \vec{k}$ og $\vec{l}$ angives.

2.4 Lad *A*, *B*, *C*,.. være punkter i planen. Reducér følgende udtryk mest muligt - brug sætning 4:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}$

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BA}$

d) $2\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{BA}$

2.5 Bevis, direkte ud fra definition 1, og uden brug af sætning 2, nedenstående udsagn:

a) $(\vec{a}+\vec{b})-\vec{b}=\vec{a}$

b) $(\vec{a}-\vec{b})+\vec{b}=\vec{a}$

c) $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\vec{b}$

d) $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$

e) $\vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a}$

2.6 Trekantsuligheden siger, at $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| \leq |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right|$. Hvad skal der gælde om vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$, for at lighedstegnet skal være opfyldt?

2.3 Nogle geometriske anvendelser

Vi vil i dette kapitel komme med nogle geometriske anvendelser af vektorer. Vi starter med følgende sætning:

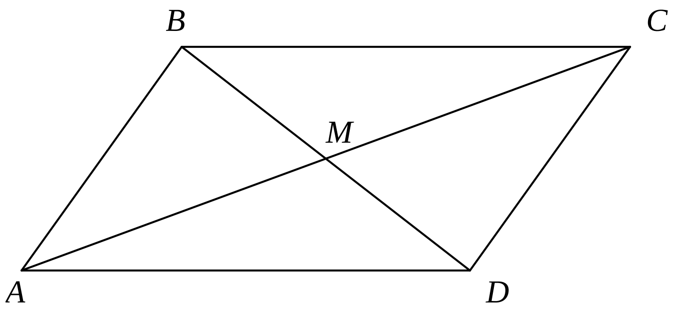
> **Sætning 5**
>
> I et parallelogram halverer diagonalerne hinanden.

Bevis:

Idet parallelogrammets vinkelspidser kaldes: *A*, *B*, *C* og *D*, og midtpunktet af liniestykket *AC* kaldes *M* (se figuren), så skal vi bevise

$$\overrightarrow{BD} = 2\,\overrightarrow{BM}$$

Dette betyder ikke blot, at *M* ligger på diagonalen *BD*, men at *M* også er midtpunktet for *BD*.



Idet *ABCD* er et parallelogram, så har vi, at

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \qquad \text{og} \qquad \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$$

Vi har nu:

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$ Indskudsreglen

$\Updownarrow$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$$ *ABCD* er parallelogram

$\Updownarrow$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA}$$ Indskudsreglen

$\Updownarrow$

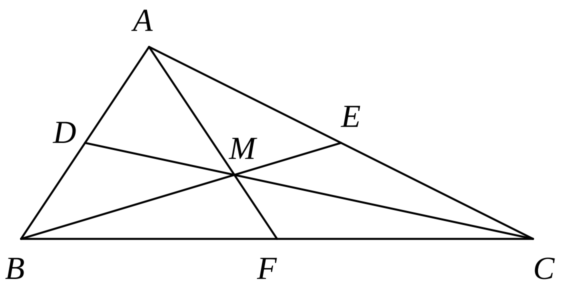
$$\overrightarrow{BM} = 2\,\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{AM} = 2\,\overrightarrow{BM} \qquad \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC}$$

En anden velkendt sætning, som let kan vises ved hjælp af vektorer er:

Sætning 6

I en trekant skærer medianerne hinanden i samme punkt, og dette punkt deler medianerne i forholdet 2:1

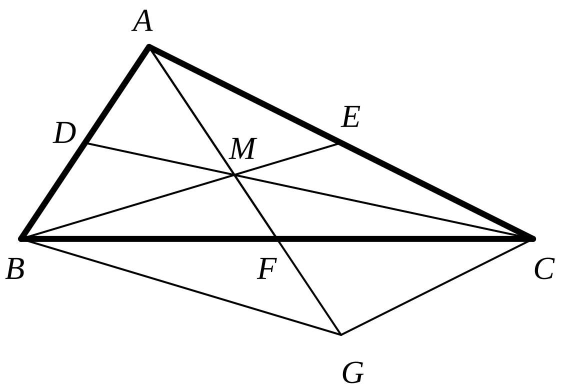
Bevis:



Sætningen er illustreret på tegningen til venstre.

Vi husker på, at medianen er defineret som linien fra en vinkelspids til midtpunktet på den modsatte side.

For at bevise sætningen laver vi en ny tegning:



D er midtpunktet af siden *AB*. *E* er midtpunktet af siden *AC*. Skæringspunktet for de to me-dianer *CD* og *BE* kaldes *M*. Liniestykket *AM* forlænges til punktet *G*, så længden $|MG|$ bliver lig længden $|AM|$. Endelig kaldes *AG*'s skæringspunkt med *BC* for *F*.

Vi vil bevise, at $|BF| = |FC|$

Dette er nemlig det samme som at sige:

1) Liniestykket *AMFG* er den tredie median.
2) Den tredie median går gennem samme punkt *M* som de andre medianer.
3) $|AM| = 2|MF|$ (viser vi til sidst).

Vi starter med at oversætte de forskellige oplysninger til vektorsprog. Idet *D* og *E* er midtpunkterne for siderne *AB* og *AC*, så gælder:

$$\vec{AD} = \vec{DB} \quad \text{og} \quad \vec{AE} = \vec{EC}$$

Måden, hvorpå vi konstruerede punktet G fortæller endvidere, at

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MG}$$

Først lad os bevise, at linierne BM og GC er parallelle, og at CM og BG er parallelle:

$$\begin{aligned}
& 2\,\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{ME} \\
\Leftrightarrow\ & 2\,\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CE} \\
\Leftrightarrow\ & 2\,\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CE} \\
\Leftrightarrow\ & 2\,\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CE} \\
\Leftrightarrow\ & 2\,\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{GC}
\end{aligned}$$

Dvs. $\overrightarrow{ME}$ og $\overrightarrow{GC}$ er parallelle.

$$\begin{aligned}
& 2\,\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MD} \\
\Leftrightarrow\ & 2\,\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BD} \\
\Leftrightarrow\ & 2\,\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BD} \\
\Leftrightarrow\ & 2\,\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{GB} \\
\Leftrightarrow\ & 2\,\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{GB}
\end{aligned}$$

Dvs. $\overrightarrow{MD}$ og $\overrightarrow{GB}$ er parallelle.

Vi ved nu, at $BGCM$ er et parallelogram, og under henvisning til sætning 5 kan vi konkludere, at diagonalernes midtpunkt, som jo er F, faktisk deler liniestykkerne BC og MG i to.

At F tvedeler BC, viser, at AF er den tredie median.

Og at F tvedeler MG viser, at

$$|AM| = |FG| = 2|MF|$$

Dvs. at punktet M deler medianen i forholdet 2:1.

Til sidst bør nævnes, at dette argument også kan laves på de to andre medianer, således at disse også deles af M i forholdet 2:1.

•

En konsekvens af sætning 6 er følgende sætning 7, som vil vise sig at være meget anvendelig, når vi får indført koordinater.

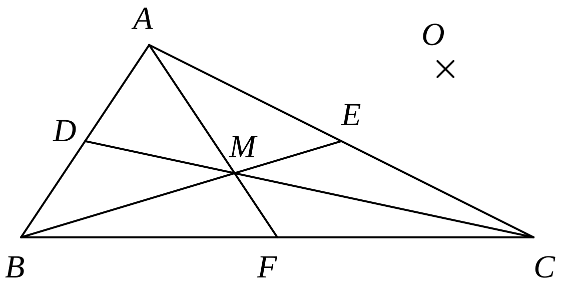
Sætning 7 fortækker endvidere, hvorfor medianernes skæringspunkt kaldes trekantens *tyngdepunkt* - anbringer man tre lige store lodder i hver af trekantens vinkelspidser, så findes ‘balancepunktet’ netop i medianernes skæringspunkt.

Sætning 7

Lad *ABC* være en trekant, og lad *O* være et punkt i planen. Det fælles skæringspunkt for medianerne i trekant *ABC*, kaldet *M*, opfylder da:

$$\overrightarrow{OM} = \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$

Bevis:



Betragt figuren, hvor de tre medianer er indtegnet, samt et tilfældigt punkt *O*.

Udover indskudsreglen bruger vi sætning 5 og det faktum, af *F* er midtpunktet af *BC*.

$$\tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = \tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MC})$$

$$\Updownarrow$$

$$\tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OM}+\tfrac{1}{3}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})$$

$$\Updownarrow$$

$$\tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OM}+\tfrac{1}{3}(2\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})$$

$$\Updownarrow$$

$$\tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OM}+\tfrac{1}{3}(\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{MC})$$

$$\Updownarrow$$

$$\tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OM}+\tfrac{1}{3}(\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC})$$

$$\Updownarrow$$

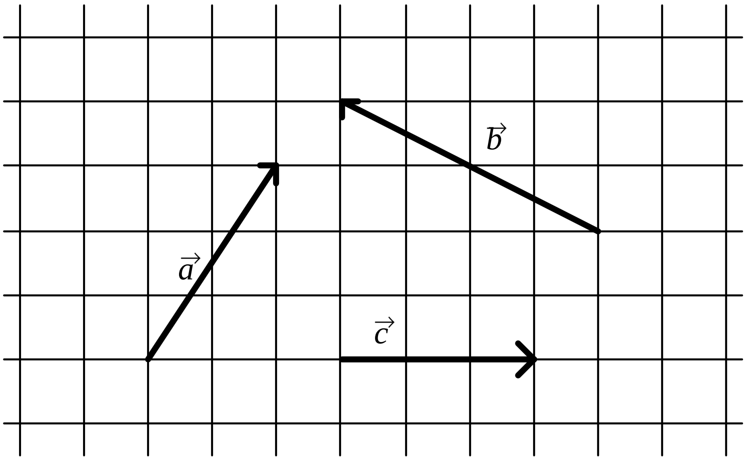
$$\tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OM}+\tfrac{1}{3}(\overrightarrow{FB}-\overrightarrow{FB})$$

$$\Updownarrow$$

$$\tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OM}$$

2.4 Koordinater for vektorer

Kig på følgende tegning:

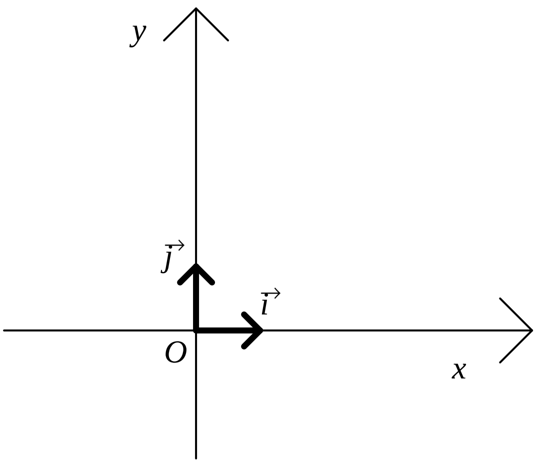


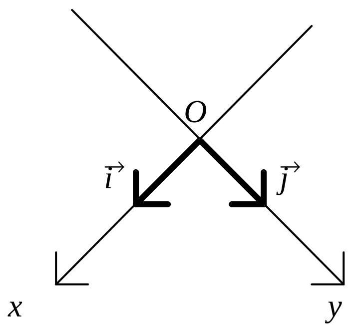
På tegningen er der angivet tre vektorer $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$. Disse kan beskrives som:

$\vec{a}$: 2 til højre og 3 op
$\vec{b}$: 4 til venstre og 2 op (eller -4 til højre og 2 op)
$\vec{c}$: 3 til højre og 0 op

Koordinatfremstillingen for en vektor er en videreførelse af denne lidt primitive beskrivelse af vektorer.

For at kunne lave koordinater må vi have et *koordinatsystem*. Et sådant består af et startpunkt (*origo*), som betegnes *O*, og to ortogonale vektorer af længde 1, kaldet $\vec{i}$ og $\vec{j}$. Af tekniske årsager sørger man for, at **vinklen fra** $\vec{i}$ **til** $\vec{j}$ er 90° og **mod urets retning.** Her er et par eksempler på koordinatsystemer:





Vi benytter næsten altid et koordinatsystem som det første.

Koordinatsættet til vektoren $\vec{a}$ defineres som de to tal a_1 og a_2, der opfylder

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$

Man skriver normalt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Denne notation skelner ganske fortrinligt mellem koordinatsættet til et punkt og koordinatsættet til en vektor.

Ser vi på vektorerne på tegningen på forrige side, så kan de beskrives ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bemærk, at

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vi er interesseret i at udtrykke vektoroperationerne *addition*, *subtraktion* og *skalarmultiplikation* ved hjælp af koordinater:

Sætning 8 (FS)

Lad $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ være vektorer, og lad t være en skalar.

Da gælder

a) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$

c) $t\vec{a} = \begin{pmatrix} ta_1 \\ ta_2 \end{pmatrix}$ d) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

Bevis:

a) $$\vec{a} + \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j}) + (b_1\vec{i} + b_2\vec{j}) = a_1\vec{i} + b_1\vec{i} + a_2\vec{j} + b_2\vec{j} =$$

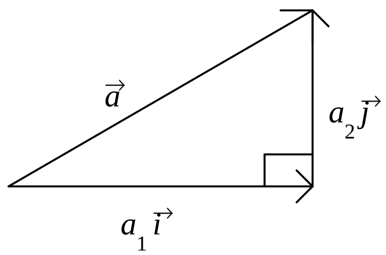
$$(a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

b) $$\vec{a} - \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j}) - (b_1\vec{i} + b_2\vec{j}) = a_1\vec{i} - b_1\vec{i} + a_2\vec{j} - b_2\vec{j} =$$

$$(a_1 - b_1)\vec{i} + (a_2 - b_2)\vec{j} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix}$$

c) $\quad t\vec{a} = t(a_1\vec{i} + a_2\vec{j}) = ta_1\vec{i} + ta_2\vec{j} = \begin{pmatrix} ta_1 \\ ta_2 \end{pmatrix}$

d)



Idet $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ og $\vec{i} \perp \vec{j}$, så kan vi lave en retvinklede trekant, hvori kateterne har længderne

$$|a_1\vec{i}| = |a_1| \text{ og } |a_2\vec{j}| = |a_2|$$

Numerisktegnene er nødvendige, idet koordinaterne a_1 og a_2 ikke nødvendigvis er positive. Hypotenusen får da ifølge Pythagoras' læresætning længden

$$|\vec{a}| = \sqrt{|a_1|^2 + |a_2|^2} = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}$$

Sammenhængen mellem koordinaterne for punkter og for vektorer fremgår af følgende definition og sætningen dertil.

Definition 9 (LS)

Lad A være et punkt i planen. *Stedvektoren* til A defineres som vektoren $\overrightarrow{OA}$, hvor O som sædvanligt er koordinatsystemets begyndelsespunkt.

Sætning 10 (LS)

Lad $A = (a_1, a_2)$ og $B = (b_1, b_2)$ være punkter i planen.

a) Stedvektoren $\overrightarrow{OA}$ til punktet A har koordinaterne $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$

Bevis:

a) Dette følger umiddelbart af definitionen af en vektors koordinater.

b) Ved brug af indskudsreglen og punkt a fås

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = -\vec{OA} + \vec{OB} = -\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

Fordelen ved at bruge koordinatbeskrivelsen af vektorer er, at lommeregnere og computere kan anvendes. F.eks. kan nævnes, at tegne- og grafik-programmer til computere i vid udstrækning benytter sig af den såkaldte vektorgrafik, der benytter vektorer til fremstilling af bl.a. tekniske tegninger. Til sidst nævner vi, at sætning 7 kan omformuleres til:

Sætning 11

Lad ABC være en trekant, hvor A, B og C har koordinaterne

$$A = (a_1, a_2)\ , B = (b_1, b_2)\ , C = (c_1, c_2)\ .$$

Medianernes fælles skæringspunkt M har da koordinaterne

$$M = \left(\tfrac{1}{3}(a_1 + b_1 + c_1)\ ,\ \tfrac{1}{3}(a_2 + b_2 + c_2)\right)$$

Bevis:

Vi ser straks, at sætning 11 egentligt er et udsagn om **stedvektorer**. Vi kan da finde punktet M's stedvektor

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(a_1 + b_1 + c_1) \\ \frac{1}{3}(a_2 + b_2 + c_2) \end{pmatrix}$$

Dette kan nu oversættes vha. sætning 10 til et udtryk for M's koordinater.

Opgaver

4.1 Vektorerne $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Bestem koordinatsættene til

a) $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ b) $-\vec{c} + 2\vec{a}$ c) $\vec{a} - \vec{c}$

d) $2\vec{a} - 3\vec{b}$ e) $\vec{b} - 2\vec{i}$ f) $3\vec{i} + 2\vec{j}$

4.2 Punkterne A, B, C og D er givet ved

$$A = (-5,-3)\ , B = (2,2)\ , C = (1,4)\ , D = (-3,-6)$$

Bestem koordinatsættene til

a)	$\overrightarrow{AB}$	b)	$\overrightarrow{AD}$	c)	$\overrightarrow{CC}$
d)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$	e)	$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$	f)	$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$

4.3 Bestem koordinaterne til vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$, givet at

$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\6\end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$$

4.4 Bestem tallet x, således at vektorerne $\begin{pmatrix}2\\x\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}-4\\6\end{pmatrix}$ er parallelle.

Er vektorerne ensrettede?

4.5 I parallelogrammet *ABCD* er punkterne *A*, *B* og *C* bestemt ved

$$A=(1,3) \;\;,\;\; B=(2,7) \;\;,\;\; C=(-3,4)$$

a) Bestem koordinaterne til punktet *D*.

b) Bestem koordinaterne til diagonalernes skæringspunkt, *M*.

4.6 I parallelogrammet *ABCD* gælder, at

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad A=(2,2)$$

a) Bestem koordinaterne for de to diagonal-vektorer $\overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{BD}$.

b) Bestem længderne af de to diagonaler i parallelogrammet.

c) Bestem koordinaterne til de tre punkter *B*, *C* og *D*.

4.7 Trekant *ABC* er bestemt ved

$$A=(4,8) \;\;,\;\; B=(-4,-6) \;\;,\;\; C=(-6,1)$$

a) Bestem sidelængderne i trekant *ABC*.

b) Bestem koordinatsættet til medianernes skæringspunkt *M*.

c) Bestem længderne af de tre medianer i trekanten.

d) Bestem punktet *D*, således at *ABCD* bliver et parallelogram.

2.5 Skalarproduktet

Vi vil nu undersøge, hvorledes man kan finde vinklen mellem to vektorer. Dette gøres ved brug af det såkaldte *skalarprodukt*:

> **Definition 12 (FS)**
>
> Lad v være vinklen mellem vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Da defineres *skalarproduktet* af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ som tallet
>
> $$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos v$$

Skalarproduktet kaldes nogen gange *prikproduktet* - pga. af prikken mellem vektorerne. Denne prik kan ikke udelades uden at skabe forvirring, idet der indenfor rumgeometrien forekommer endnu et produkt mellem vektorer - krydsproduktet.

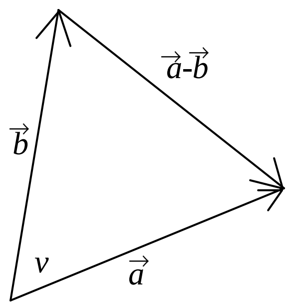
Bemærk, at skalarproduktet faktisk er en skalar, dvs. et tal, og at **definitionen af skalarproduktet er uafhængig af koordinatsystemet**. Man skal i øvrigt passe på med ikke at forveksle skalarproduktet med skalarmultiplikation.

Endelig kan bemærkes, at man ofte betegner vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ som $\angle(\vec{a},\vec{b})$.
Definitionen af skalarproduktet skrives da som $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\angle(\vec{a},\vec{b}))$

For at skalarproduktet skal kunne bruges til noget, er det nødvendigt at kunne beregne det på en anden måde end ved at bruge vinklen mellem vektorerne. Vi skynder os derfor at udtrykke det ved brug af vektorernes koordinater:

> **Sætning 13 (FS)**
>
> Lad $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Da er $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

Bevis:



Vi vil bruge cosinus-relationen på trekanten til højre. Denne trekants sider er $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{a}-\vec{b}$, og sidelængderne er derfor

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

$$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + (a_2-b_2)^2}$$

Cosinus-relationen fortæller nu

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos v$$

$$\Updownarrow$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

- ifølge definition 12 er sidste led jo lig med $-2\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Nu skal der regnes! Først indsætter vi sidelængderne kvadreret, så udregnes parenteserne på venstresiden, derefter går en masse led ud med hinanden, og målet er nået efter en division med -2 :

$$(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2 = a_1{}^2+a_2{}^2+b_1{}^2+b_2{}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_1{}^2+b_1{}^2-2a_1b_1+a_2{}^2+b_2{}^2-2a_2b_2 = a_1{}^2+a_2{}^2+b_1{}^2+b_2{}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\Updownarrow$$

$$-2a_1b_1-2a_2b_2=-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_1b_1+a_2b_2=\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Vi giver nogle anvendelser af skalarproduktet:

Regnede opgaver

Givet: Lad vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være givet ved $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$.

Beregn: Vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Løsning: Vi omskriver definitionen af skalarproduktet til

$$\cos v = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

, hvor v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Vi beregner

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot(-3)+4\cdot 1 = -3+4 = 1$$
$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2+4^2} = \sqrt{17}$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2+1^2} = \sqrt{10}$$

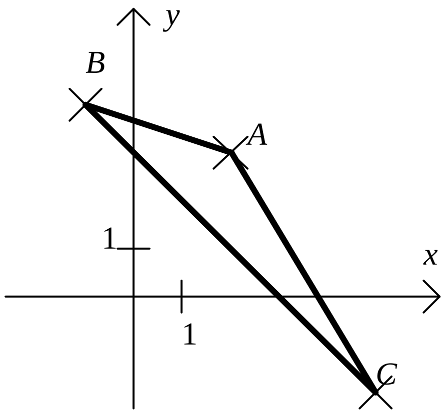
og får

$$\cos v = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{17}\sqrt{10}}$$

$$v = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}\sqrt{10}}\right) \approx 85{,}60^\circ .$$

Opgave: Lad $A = (2,3)$, $B = (-1,4)$, $C = (5,-2)$ være spidserne i en trekant. Beregn sidelængderne og vinklerne i trekant ABC

Løsning: Punkterne A, B og C er vist på figuren nedenfor. Vi starter med at finde koordinaterne for vektorerne $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ og $\overrightarrow{BC}$



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ -2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5-(-1) \\ -2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Sidelængderne i trekanten er da lig med længderne af disse vektorer

$$|AB| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 1} = \sqrt{10}$$

$$|AC| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{34}$$

$$|BC| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{6^2 + (-6)^2} = \sqrt{72} .$$

Vinklerne findes ved brug af skalarproduktet:

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(-3)3 + 1(-5)}{\sqrt{(-3)^2 + 1^2}\sqrt{3^2 + (-5)^2}} = \frac{-14}{\sqrt{10}\sqrt{34}}$$

Dvs. $A = \arccos\left(\frac{-14}{\sqrt{10}\sqrt{34}}\right) \approx 139{,}40^\circ$

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right|} = \frac{3 \cdot 6 + (-1)(-6)}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}\sqrt{6^2 + (-6)^2}} = \frac{24}{\sqrt{10}\sqrt{72}}$$

Dvs. $B = \arccos\left(\dfrac{24}{\sqrt{10}\sqrt{72}}\right) \approx 26{,}57°$

$$\cos C = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{(-3)\cdot(-6)+5\cdot 6}{\sqrt{(-3)^2+5^2}\sqrt{(-6)^2+6^2}} = \frac{48}{\sqrt{34}\sqrt{72}}$$

Dvs. $C = \arccos\left(\dfrac{48}{\sqrt{34}\sqrt{72}}\right) \approx 14{,}04°$.

Bemærk, at vi flittigt brugte, at $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ og tilsvarende for de to andre vektorer.

Følgende konsekvens af definitionen af skalarproduktet er ganske anvendelig:

Sætning 14 (FS)

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være egentlige vektorer, dvs. $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Da gælder

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

Bevis:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

$\Updownarrow$

$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos v = 0$ (hvor $v = \angle(\vec{a},\vec{b})$)

$\Updownarrow$

$\cos v = 0$ (idet $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$)

$\Updownarrow$

$v = 90° + z180°$ ($z \in \mathbf{Z}$)

$\Updownarrow$

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

Når man bruger denne sætning, da er det vigtigt, at man kontrollerer, at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ faktisk er egentlige vektorer. Vi giver et eksempel:

Eksempel

Opgave: Bestem de værdier af tallet t, for hvilke vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} t-1 \\ t^2-1 \end{pmatrix}$$

er orthogonale.

Løsning: Vi ser straks, at $\vec{a}$ altid er en egentlig vektor, idet andenkoordinaten 1 aldrig kan blive 0. $\vec{b}$ er derimod nulvektoren, når $t = 1$, idet begge koordinaterne så bliver 0. Vi skal da udelukke tilfældet $t = 1$.

Vi finder nu skalarproduktet:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t-1 \\ t^2-1 \end{pmatrix} = t \cdot (t-1) + 1 \cdot (t^2-1) = 2t^2 - t - 1$$

Dette skalarprodukt er netop nul, når $2t^2 - t - 1 = 0$

Dette er jo en andengradsligning med diskrimimanten

$$d = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$$

og rødderne

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Idet vi har udeladt løsningen $t = 1$, så fås resultatet:

$\vec{a}$ og $\vec{b}$ er orthogonale, netop når $t = -\frac{1}{2}$

Vi viser nu nogle regneregler for skalarproduktet:

Sætning 15 (FS)

Lad $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ være vektorer, t et reelt tal. Da gælder:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ b) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

c) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ d) $(t\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (t\vec{b}) = t(\vec{a} \cdot \vec{b})$

Bevis:

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\angle(\vec{a}, \vec{b})) = |\vec{b}||\vec{a}|\cos(\angle(\vec{b}, \vec{a})) = \vec{b} \cdot \vec{a}$

b) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos(\angle(\vec{a}, \vec{a})) = |\vec{a}|^2 \cos(0°) = |\vec{a}|^2 \cdot 1 = |\vec{a}|^2$

c) Her er vi nødt til at regne med koordinater. Vi betegner vektorernes koordinater med:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \ \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Vi får da:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \end{pmatrix} =$$

$$a_1(b_1+c_1) + a_2(b_2+c_2) = a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 =$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_1c_1 + a_2c_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$$

d) Her er vi igen nødt til at regne med koordinater. Vi anvender de samme koordinater som i beviset for c):

$$(t\vec{a})\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} ta_1 \\ ta_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = ta_1b_1 + ta_2b_2 = t(a_1b_1 + a_2b_2) =$$

$$t(\vec{a}\cdot\vec{b}) = a_1tb_1 + atb_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} tb_1 \\ tb_2 \end{pmatrix} = \vec{a}\cdot(t\vec{b})$$

Følgende sætning er en konsekvens af sætning 15:

Sætning 16 (LS)

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være vektorer. Da gælder:

a) $|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$

b) $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$

c) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$

Bevis:

a) $$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) + \vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} =$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

b) og c) bevises på stort set samme måde.

Eksempel

Givet: Om to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ oplyses følgende $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$ og $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{5}$

Find: Vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Svar: Vi bruger a) i sætningen ovenfor:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Ved indsættelse fås

$$\sqrt{5}^2 = 2^2 + 2^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

som giver

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -\tfrac{3}{2}$$

For vinklen v mellem de to vektorer gælder da

$$\cos v = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-\tfrac{3}{2}}{2\cdot 2} = -\tfrac{3}{8}$$

$$v = \arccos(-\tfrac{3}{8}) \approx 112{,}02^\circ \,.$$

Find: Længden af vektoren $\vec{a} + 2\vec{b}$

Svar: Lige på og hårdt:

$$|\vec{a}+2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |2\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\cdot(2\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} =$$
$$2^2 + 4\cdot 2^2 + 4\cdot(-\tfrac{3}{2}) = 14$$

Heraf ses, at $|\vec{a}+2\vec{b}| = \sqrt{14}$.

Nu undrer den **meget årvågne** læser sig nok over, hvorfor man ikke har et *vektorprodukt*, dvs. en operation, som vi passende kan kalde $*$, som til to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ tildeler en ny vektor $\vec{a}*\vec{b}$. Denne operation skulle gerne have de rigtige "multiplikative" egenskaber, dvs. følgende regler skal gælde:

a) $\vec{a}*\vec{b} = \vec{b}*\vec{a}$

b) $\vec{a}*(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}*\vec{b} + \vec{a}*\vec{c}$

c) $\vec{a}*\vec{b}$ afhænger ikke af koordinatsystemet, men kun af $\vec{a}$ og $\vec{b}$

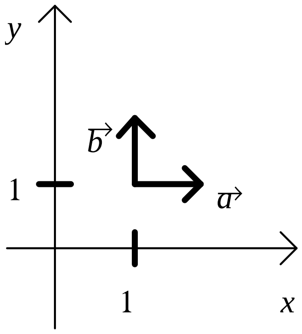
Det viser sig især at være egenskab c, som ikke virker. Vi giver et eksempel på en mulig operation, som **ikke** opfylder egenskab c, og som derfor er uanvendelig indenfor vektor-algebraen.

Eksempel

Operationen $*$ defineres som:

$$\vec{a}*\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1b_1 \\ a_2b_2 \end{pmatrix}, \text{ hvor } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ og } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Det er let at vise, at denne operation opfylder reglerne a) og b). Desværre er c) ikke opfyldt. Vi kan f.eks. beregne $*$ -produktet af nedenstående vektorer:

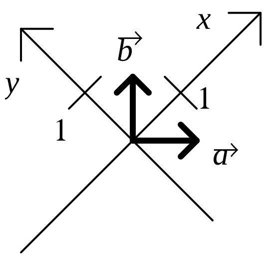


På figuren har $\vec{a}$ og $\vec{b}$ koordinaterne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Og $*$ -produktet bliver da:

$$\vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$



Nu vælger vi et andet koordinatsystem, som er drejet 45° i forhold til det gamle. Bemærk, at vi **ændrer overhovedet ikke på vektorerne**!

Vektorernes koordinater bliver da

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \cos(-45°) \\ \sin(-45°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} \cos(45°) \\ \sin(45°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

og vi får

$$\vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

som ikke er nulvektoren! Men lige såvel som $2 \cdot 2$ er 4 i både Italien og Brasilien, så skulle vores vektorprodukt også give det samme i begge koordinatsystemer! Vi må derfor forkaste vores forsøg på at lave et vektorprodukt.

Opgaver

5.1 Givet følgende vektorer:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Bestem tallene

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ b) $\vec{c} \cdot \vec{b}$ c) $\vec{a} \cdot \vec{c} - |\vec{b}|^2$

d) $\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c})$ e) $(2\vec{b} - 3\vec{c}) \cdot \vec{c}$ f) $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$

5.2 Givet vektorerne $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ som i opgave 5.1. Bestem vinklerne mellem

a) $\vec{a}$ og $\vec{b}$ b) $\vec{b}$ og $\vec{i}$ c) $\vec{a} + \vec{c}$ og $\vec{b} - \vec{c}$

5.3 Givet vektorerne $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ som i opgave 5.1. Bestem koordinaterne til

a) $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ b) $((2\vec{a} - 3\vec{b}) \cdot \vec{b})\vec{c}$

5.4 Trekant ABC er givet ved punkterne $A = (1;5)$ $B = (4;7)$ $C = (-3;-2)$
Bestem vinklerne i trekanten.

5.5 Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t - 1 \end{pmatrix}$$

Bestem tallet t, således at

a) $|\vec{a}| = 3$ b) $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er orthogonale

5.6 Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ opfylder $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ og $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$. Bestem

a) vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ b) længden af vektorerne $\vec{a} + \vec{b}$

c) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ d) $|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$

e) vinklen mellem vektorerne $\vec{a} + \vec{b}$ og $\vec{a} - \vec{b}$

5.7 Lad v være en vilkårlig vinkel, og betragt vektoren $\vec{e}_v = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}$.

a) Bevis, at vinklen mellem $\vec{e}_v$ og x-aksen er lig med v, og at $|\vec{e}_v| = 1$.

$\vec{e}_v$ kaldes *enhedsvektoren med retningsvinklen* v.

b) Bevis, at enhver egentlig vektor $\vec{a}$ kan skrives som $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{e}_v$ for en passende valgt vinkel v.

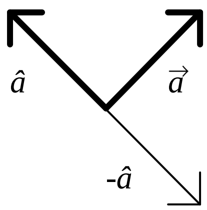
Denne vinkel v kaldes *retningsvinklen* for $\vec{a}$.

2.6 Tværvektor og determinant

Man er ofte interesseret i at finde en vektor, som står vinkelret på en given vektor. Dette er egentligt nemt nok; man drejer bare vektoren 90°. Her er dog et problem - der er to vektorer, som kan fremkomme på denne måde. For at fjerne denne tvetydighed definerer man følgende:

Definition 17 (FS)

Lad $\vec{a}$ være en vektor. *Tværvektoren til* $\vec{a}$, betegnet $\hat{a}$, defineres som den vektor, der fremkommer ved at dreje vektoren $\vec{a}$ 90° mod uret.



På figuren er vist de to muligheder for den roterede vektor, og det er indikeret, hvilken man vælger som $\hat{a}$.

Egentligt burde man skrive $\hat{\vec{a}}$, men af typografiske grunde udelader man ofte den lille vektorpil. Ved mere komplicerede udtryk sætter man ofte hatten efter udtrykket, således er $(\vec{a}+\vec{b})^\wedge$ tværvektoren til vektorsummen $\vec{a}+\vec{b}$.

Vi vil udlede en formel for tværvektoren $\hat{a}$ udtrykt ved $\vec{a}$'s koordinater. Vi bruger her et trick, som ofte anvendes indenfor vektor-algebra: Vi finder ud af, hvad tværvektor-operationen gør ved enhedsvektorerne $\vec{i}$ og $\vec{j}$, og vi beviser, at tværvektoren opfylder visse egenskaber - de såkaldte *linearitets-betingelser*. Disse to fakta kan så kombineres til den ønskede koordinatformel.

Vi starter med linearitets-egenskaberne:

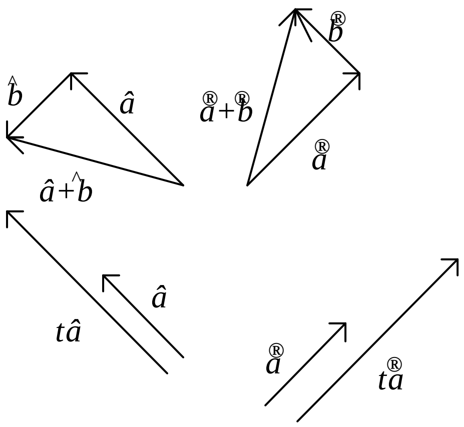
Sætning 18 (FS)

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være vektorer, og t et reelt tal. Da gælder:

a) $(\vec{a}+\vec{b})^\wedge = \hat{a}+\hat{b}$ b) $(t\vec{a})^\wedge = t\hat{a}$

Bevis:

Beviset er lettere tegnet end fortalt:



Denne figur illustrerer beviset for a). (Additionstrekanten og additions-trekanten drejet 90°)

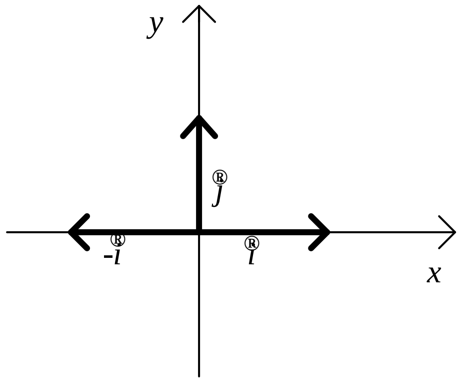
Denne figur illustrerer beviset for b).

Så kommer vi til udregningen af enhedsvektorernes tværvektorer:

Sætning 19

$$\hat{i} = \vec{j} \quad \text{og} \quad \hat{j} = -\vec{i}$$

Bevis:



Igen en tegning!

Vi kan nu få vores koordinatformel:

Sætning 20 (FS)

Lad $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$. Så er $\hat{a} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

Bevis:

$$\hat{a} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j})^\wedge = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} = a_1\vec{j} + a_2(-\vec{i}) = -a_2\vec{i} + a_1\vec{j} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Eksempel

Hvis $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, så er $\hat{a} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$. For at efterkontrollere, at de to vektorer faktisk er orthogonale, så kan vi beregne skalarproduktet

$$\vec{a} \cdot \hat{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3(-6) + 6 \cdot 3 = -18 + 18 = 0 .$$

Dette giver nul, så de to vektorer er orthogonale.

Tværvektoren bruges bl.a. til at definere den såkaldte *determinant*:

Definition 21 (FS)

Determinanten til vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ defineres som

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \hat{a} \cdot \vec{b}$$

Determinanten er på mange måder den onde stedbroder til skalarproduktet - hermed menes, at determinanten kan mange af de samme ting, og har mange af de samme egenskaber, som skalarproduktet, men på en lidt underlig måde.

Vi starter med at finde et koordinatudtryk for determinanten:

Sætning 22 (FS)

Lad $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Da er $\det(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

Bemærk, at man normalt bruger 2x2-skemaet ved opskrivning af determinanter:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 .$$

En god huskeregel er, at man skal gange "i et kryds" og huske minustegnet!

Bevis:

Vi har

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \hat{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = -a_2 b_1 + a_1 b_2 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Determinanten har følgende egenskaber:

Sætning 23

Lad $\vec{a}$, $\vec{b}$ og $\vec{c}$ være vektorer, og t et reelt tal. Så gælder:

a) $\det(\vec{a},\vec{b}) = -\det(\vec{b},\vec{a})$

b) $\det(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) = \det(\vec{a},\vec{b}) + \det(\vec{a},\vec{c})$

c) $\det(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = \det(\vec{a},\vec{c}) + \det(\vec{b},\vec{c})$

d) $\det(t\vec{a},\vec{b}) = \det(\vec{a},t\vec{b}) = t\det(\vec{a},\vec{b})$

Bevis:

a) Her er vi nødt til at regne i koordinater. Lad $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Så fås

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = a_1 b_2 - a_2 b_1 = -(b_1 a_2 + b_2 a_1) = -\det(\vec{b},\vec{a})$$

b) $\det(\vec{a},\vec{b}+\vec{c}) = \hat{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \hat{a}\cdot\vec{b} + \hat{a}\cdot\vec{c} = \det(\vec{a},\vec{b}) + \det(\vec{a},\vec{c})$

c) $\det(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b})^{\wedge}\cdot\vec{c} = (\hat{a}+\hat{b})\cdot\vec{c} = \hat{a}\cdot\vec{c} + \hat{b}\cdot\vec{c} = \det(\vec{a},\vec{c}) + \det(\vec{b},c)$

d) $\det(t\vec{a},\vec{b}) = t\hat{a}\cdot\vec{b} = t\det(\vec{a},\vec{b}) = \hat{a}\cdot t\vec{b} = \det(\vec{a},t\vec{b})$

En vigtig anvendelse af determinanten er følgende sætning, som bør sammenlignes med sætning 14:

Sætning 24 (FS)

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være egentlige vektorer. Da gælder:

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \text{ er parallel med } \vec{b}$$

Bevis:

Beviset er egentligt ganske simpelt - vi bruger sætning 14:

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \hat{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \hat{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \text{ er parallel med } \vec{b}$$

Vi har derfor følgende tommelfingerregel: Når man vil undersøge, om to vektorer er orthogonale, så finder man deres skalarprodukt, og når man vil undersøge, om to vektorer er parallelle, så finder man deres determinant.

Regnet opgave

Givet: Lad, for et reelt tal t, vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være givet ved:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} t^2 - 4 \\ t^2 - 3t + 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Find: De værdier for t, for hvilke

a) $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle, b) $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale.

Svar: Vi ser straks, at $\vec{b}$ altid er en egentlig vektor, og at $\vec{a}$ kun er nulvektoren netop når

$$t^2 - 4 = 0 \quad \text{og} \quad t^2 - 3t + 2 = 0$$

eller, ved løsning af andengradsligningerne, når:

$$(t = 2 \quad \vee \quad t = -2) \quad \wedge \quad (t = 1 \quad \vee \quad t = 2)$$

Dvs. kun når $t = 2$ har vi nulvektoren. Vi udelukker derfor dette tal fra de videre beregninger.

a) Vi finder determinanten:

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = \begin{vmatrix} t^2 - 4 & 2 \\ t^2 - 3t + 2 & 1 \end{vmatrix} = (t^2 - 4)\cdot 1 - (t^2 - 3t + 2)\cdot 2 = -t^2 + 6t - 8$$

Dette er jo en andengradsligning i t. Løses denne ses, at determinanten er nul, netop når

$$t = 4 \vee t = 2$$

Idet vi udelukkede værdien $t = 2$, ses, at vektorerne er parallelle netop når $t = 4$.

b) Vi finder nu skalarproduktet:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} t^2 - 4 \\ t^2 - 3t + 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2(t^2 - 4) + (t^2 - 3t + 2) = 3t^2 - 3t - 6$$

Igen opnås en andengradsligning i t, hvis rødder ses at være

$$t = 2 \vee t = -1$$

Idet vi udelukkede $t = 2$, ses, at vektorerne er orthogonale netop når $t = -1$

En anden anvendelse af determinanten er

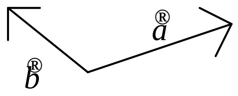
Sætning 25 (FS)

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være egentlige vektorer. Da gælder

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\sin v$$

hvor v er den *fortegnsbestemte vinkel* mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

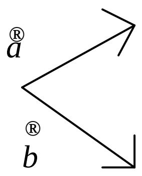
$v>0$



Den fortegnsbestemte vinkel mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ganske simpelt vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Dog er der den finesse, at vinklen regnes for positiv, hvis "$\vec{a}$ kommer før $\vec{b}$", dvs. hvis man kan komme fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ **ved højst at gå $180°$ i positiv omløbsretning**.

$v<0$



Ellers regnes v for negativ.

Bevis:

Lad w være vinklen mellem $\hat{a}$ og $\vec{b}$. Vi har da, at $w = 90° - v$, som gælder uanset beliggenheden for $\vec{a}$ og $\vec{b}$ (husk, at v regnes med fortegn!). Ved at bruge definition 12 fås

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = \hat{a}\cdot\vec{b} = |\hat{a}||\vec{b}|\cos w = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(90°-v) = |\vec{a}||\vec{b}|\sin v$$

Sætning 26 (FS)

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være egentlige vektorer. Da gælder:

a) arealet af parallelogrammet udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$$A = \left|\det(\vec{a},\vec{b})\right|$$

b) arealet af trekanten udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er:

$$T = \tfrac{1}{2}\left|\det(\vec{a},\vec{b})\right|$$

Bevis:

Dette følger af de velkendte formler for arealet af et parallelogram og af en trekant: Arealet af et parallelogrammet er produktet af sidelængderne $|\vec{a}|$ og $|\vec{b}|$ multipliceret med sinus til vinklen v.

Arealet af trekanten er det halve areal af parallelogrammets.

Eksempel

Arealet af trekanten udspændt af vektorerne $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ er

$$A = \tfrac{1}{2}\det\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\right) = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & -1\\2 & 4\end{vmatrix} = \tfrac{1}{2}(1\cdot 4 - 2\cdot(-1)) = 3$$

Opgaver

6.1 Lad vektorerne $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ være bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$$

Bestem

a) $\hat{a}$ b) $\hat{b}$ c) $(\vec{a}+\vec{b}-2c)^\wedge$

d) $\hat{a}\cdot\hat{b}$ e) $\det(\vec{c},\vec{b})$ f) $\vec{a}\cdot\vec{b}-\det(\vec{a},\vec{b})$

6.2 Bevis formlerne

a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \hat{a}\cdot\hat{b}$ b) $|\vec{a}| = |\hat{a}|$ c) $\vec{a}\cdot\hat{a} = 0$

d) $\det(\vec{a},\hat{a}) = |\vec{a}|^2$ e) $\det(\vec{a},\vec{b}) = \det(\hat{a},\hat{b})$

6.3 Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix}t-2\\t^2-4\end{pmatrix}$$

Bestem tallet t, således at

a) $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er orthogonale

b) $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle

2.7 Projektioner og opløsninger

Vi omtaler nu nogle anvendelser af skalarproduktet og determinanten. Vi starter med en generel løsningsformel for to ligninger med to ubekendte - den såkaldte *determinantformel*:

Sætning 27 (FS)

Lad følgende ligningssystem være givet

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

og lad D, D_x og D_y være determinanterne givet ved

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \; D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \; D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Hvis $D \neq 0$, så har ligningssystemet netop én løsning:

$$(x,y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right)$$

Bevis:

Vi indfører vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \; \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \; \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

og observerer, at ligningssystemet kan skrives som vektorligningen

$$\vec{a}x + \vec{b}y = \vec{c}$$

Endvidere ser vi, at

$$D = \det(\vec{a},\vec{b}) \;,\; D_x = \det(\vec{c},\vec{b}) \;,\; D_y = \det(\vec{a},\vec{c})$$

"Prikker" vi begge sider af vektorligningen med tværvektoren $\hat{a}$, så får vi

$$\hat{a}\cdot\vec{a}x + \hat{a}\cdot\vec{b}y = \hat{a}\cdot\vec{c}$$

Idet $\hat{a}\cdot\vec{a} = \vec{0}$ og $D \neq 0$, så har vi

$$\hat{a}\cdot\vec{b}y = \hat{a}\cdot\vec{c} \quad \Leftrightarrow \qquad y = \frac{\hat{a}\cdot\vec{c}}{\hat{a}\cdot\vec{b}} = \frac{D_y}{D}$$

Ved "prikning" med $\hat{b}$ af ligningen fås tilsvarende

$$\hat{b}\cdot\vec{a}x + \hat{b}\cdot\vec{b}y = \hat{b}\cdot\vec{c}$$

Idet $\hat{b}\cdot\vec{b} = 0$ og $D \neq 0$ samt brug af sætning 23 fås:

$$\hat{b}\cdot\vec{a}x = \hat{b}\cdot\vec{c} \quad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{\hat{b}\cdot\vec{c}}{\hat{b}\cdot\vec{a}} = \frac{\det(\vec{b},\vec{c})}{\det(\vec{b},\vec{a})} = \frac{-\det(\vec{c},\vec{b})}{-\det(\vec{a},\vec{b})} = \frac{D_x}{D}$$

Eksempel

Ligningssystemet

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$$

har determinanterne

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2(-3) - 4 \cdot 1 = -10$$

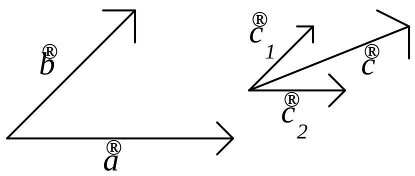
$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 6(-3) - 4(-2) = -18 + 8 = -10$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2) - 6 \cdot 1 = -4 - 6 = -10$$

Idet $D = -10 \neq 0$, så er ligningssystemets løsning:

$$(x, y) = (\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}) = (\frac{-10}{-10}, \frac{-10}{-10}) = (1,1)$$

En geometrisk version af denne løsningsformel er sætning 28, som dog kræver, at man ved, hvad en *opløsning* af to vektorer er for noget:



Opskrivningen af $\vec{c}$ som en sum af vektorer parallelle med henholdsvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ kaldes en *opløsning* af $\vec{c}$ efter $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Sætning 28

Lad $\vec{a}$ og $\vec{b}$ være egentlige vektorer, og antag at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ikke er parallelle. Så findes der for enhver vektor $\vec{c}$ to entydigt bestemte vektorer $\vec{c}_1$ og $\vec{c}_2$ opfyldende

$$\vec{c} = \vec{c}_1 + \vec{c}_2 \quad \text{og} \quad \vec{c}_1 \| \vec{a} \quad \text{og} \quad \vec{c}_2 \| \vec{b}$$

Bevis:

Idet $\vec{a}$ og $\vec{b}$ ikke er parallelle, så er $\det(\vec{a}, \vec{b}) \neq 0$, og ligningssystemet

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{c}$$

har netop en løsning (x_0, y_0). Sætter vi

$$\vec{c}_1 = x_0\vec{a} \quad \text{og} \quad \vec{c}_2 = y_0\vec{b}$$

så får vi den ønskede opløsning af vektoren $\vec{c}$.

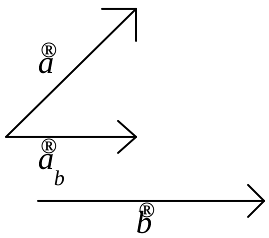
Bemærk, at vi faktisk får en formel for opløsningen fra sætning 27:

(29) $$\vec{c} = \frac{\det(\vec{c},\vec{b})}{\det(\vec{a},\vec{b})}\vec{a} + \frac{\det(\vec{a},\vec{c})}{\det(\vec{a},\vec{b})}\vec{b}$$

Vi kommer nu endelig til *projektionen* af en vektor på en anden vektor.

Definition 30 (FS)

Lad $\vec{b} \neq \vec{0}$. *Projektionen* af vektoren $\vec{a}$ på $\vec{b}$ betegnes $\vec{a}_b$ og defineres som den komponent af $\vec{a}$'s opløsning efter $\vec{b}$ og $\hat{b}$, som er parallel med $\vec{b}$.



I stedet for ordet *projektion* benytter man nogen gange det lidt mere komplicerede *ortogonal projektion*.

Vi vil udlede en formel for projektionen af en vektor:

Sætning 31 (FS)

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\vec{b}$$

Bevis:

Dette følger af formlen (29):

$$\vec{c} = \frac{\det(\vec{c},\vec{b})}{\det(\vec{a},\vec{b})}\vec{a} + \frac{\det(\vec{a},\vec{c})}{\det(\vec{a},\vec{b})}\vec{b}$$

Denne angiver vektoren $\vec{c}$'s opløsning efter vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Vi erstatter $\vec{c}$ med $\vec{a}$, $\vec{a}$ med $\vec{b}$ og $\vec{b}$ med $\hat{b}$, og vi får (hold tungen lige i munden)

$$\vec{a} = \frac{\det(\vec{a},\hat{b})}{\det(\vec{b},\hat{b})}\vec{b} + \frac{\det(\vec{b},\vec{a})}{\det(\vec{b},\hat{b})}\hat{b} .$$

Nu er

$$\det(\vec{a},\hat{b}) = -\det(\hat{b},\vec{a}) = -\hat{\hat{b}}\cdot\vec{a} = -(-\vec{b})\cdot\vec{a} = \vec{b}\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$\det(\vec{b},\hat{b}) = -\det(\hat{b},\vec{b}) = -\hat{\hat{b}}\cdot\vec{b} = -(-\vec{b})\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{b}$$

så vi får

$$\vec{a}_b = \frac{\det(\vec{a},\hat{b})}{\det(\vec{b},\hat{b})}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\vec{b}$$

hvilket giver den ønskede formel.

Eksempel

Givet: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Find: $\vec{a}_b$ og $\vec{b}_a$.

Svar:
$$\vec{a}\cdot\vec{a} = 1\cdot 1 + (-4)(-4) = 17$$
$$\vec{b}\cdot\vec{b} = 2\cdot 2 + 2\cdot 2 = 8$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot 2 + (-4)\cdot 2 = -6$$

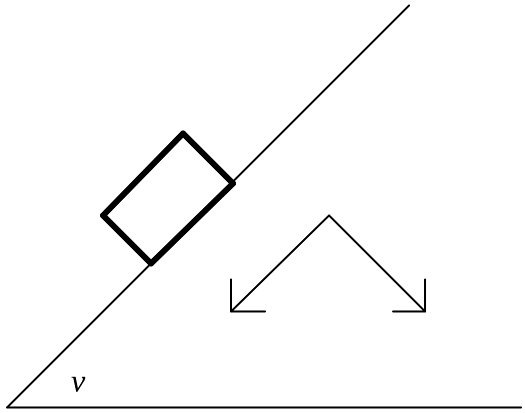
Vi har da

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\vec{b} = \frac{-6}{8}\vec{b} = \begin{pmatrix} -6\cdot 2/8 \\ -6\cdot 2/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$
$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a} = \frac{-6}{17}\vec{a} = \begin{pmatrix} -6\cdot 1/17 \\ (-6)\cdot(-4)/17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6/17 \\ 24/17 \end{pmatrix}$$

Opløsninger og projektioner anvendes mange steder, f.eks. indenfor kunst og arkitektur. Her giver vi en anvendelse fra fysikken:

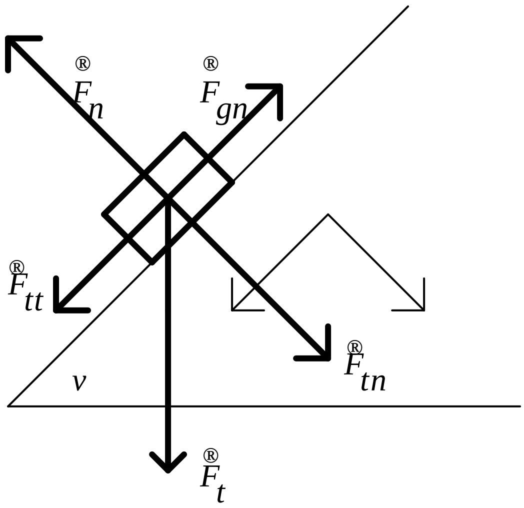
Eksempel

En klods med massen m befinder sig på et skråplan, som danner vinklen v med vandret. Hvilke kræfter virker på denne klods?



Umiddelbart ser man, at tyngdekraften $\vec{F}_t$ virker på klodsen. Denne har størrelsen mg og virker nedadrettet.

Det viser sig at være smart at opløse tyngdekraften efter de to vektorer på figurerne til venstre. Dvs. vi opløser i to komponenter, hvoraf den ene er parallel med skråplanet og den anden står vinkelret på skråplanet.



De to komponenter kaldes $\vec{F}_{tt}$ og $\vec{F}_{tn}$ - se figuren. Endvidere er der normalkraften $\vec{F}_n$, som er lige så stor og modsat rettet $\vec{F}_{tn}$. Denne er nødvendig, idet klodsen ellers ville kunne bevæge sig vinkelret igennem skråplanet, og det sker jo ligesom ikke.

Endelig er der en gnidningskraft $\vec{F}_{gn}$, som er modsat rettet $\vec{F}_{tt}$.

Opgaver

7.1 Løs følgende ligningssystemer vha. determinantmetoden:

a) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x + y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - 3y = 7 \\ -7x + 5y = 13 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 6x + 5y = 8 \\ -5x - 4y = 2 \end{cases}$

7.2 Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bestem projektionerne $\vec{a}_b$ og $\vec{b}_a$

7.3 Bevis formlerne

a) $(\vec{a} + \vec{b})_c = \vec{a}_c + \vec{b}_c$ b) $(t\vec{a})_c = t\vec{a}_c$

c) $|\vec{a}_c| = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}|}$

hvor $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er vilkårlige vektorer, $\vec{c}$ er en egentlig vektorer, og t er et reelt tal.

7.4 Vektorerne $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{c}$ er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Opløs $\vec{a}$ efter $\vec{b}$ og $\vec{c}$.

7.5 Sætning 27 gælder åbenbart ikke, hvis determinanten $D = 0$.

a) Hvorledes opfører vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ sig, når $D = 0$?

b) Hvad skal der gælde om $\vec{c}$, får at ligningssystemet har løsninger?

c) Formulér en mere generel sætning end sætning 27. Denne sætning skal tage tilfældet $D = 0$ med i betragtning.

d) Løs ligningssystemerne

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + 4y = 12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + 4y = 13 \end{cases}$$

2.8 Den rette linie

Vi vil i dette kapitel beskrive den rette linie ved brug af vektorer. Vi giver to forskellige beskrivelser af linien, nemlig ved en *ligning* og ved en såkaldt *parameterfremstilling*.

Vi starter med at minde læseren om, at ligningen for den rette linie er

$$Ax + By + C = 0$$

hvor tallene A og B ikke begge kan være nul samtidigt.

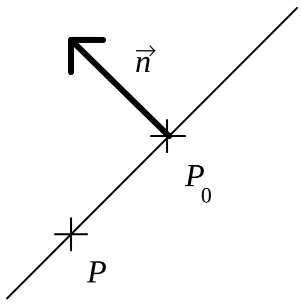
En måde at udlede denne formel på er følgende sætning:

Sætning 32 (FS)

Lad $P_0 = (x_0, y_0)$ være et punkt på linien, og lad $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ være en vektor vinkelret på linien. Så er liniens ligning

$$Ax + By + C = 0$$

Bevis:



Vi ser af tegningen, at punktet $P = (x, y)$ ligger på linien, hvis og kun hvis vektoren

$$\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

står vinkelret på vektoren $\vec{n}$.

Dette sker, når skalarproduktet er nul, altså skal der gælde

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Dette er ligningen hvis vi erstatter $-Ax_0 - By_0$ med tallet C.

Vektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ i sætning 32 kaldes for en *normalvektor* til linien.

Eksempel

Linien l gennem punktet $P=(1,1)$, og som står vinkelret på vektoren

$$v=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

har ligningen

$$2(x-1)+3(y-1)=0$$

eller

$$2x+3y-5=0$$

Bemærk, at normalvektoren ikke er entydigt bestemt. I ovenstående eksempel er f.eks. både

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$$

og faktisk en hvilken som helst vektor, der er proportional med den første vektor, er en normalvektor til linien. Det er derfor forkert at tale om normalvektor*en* til en linie.

Vi har følgende sammenhæng mellem normalvektorer og hældnings-koefficienter:

Sætning 33 (FS)

Lad linien l have hældningskoefficienten a En normalvektor til l er da:

$$\vec{n}_l=\begin{pmatrix}a\\-1\end{pmatrix}$$

Bevis:

Linien l har en ligning af formen:

$$y=ax+b.$$

Denne kan omskrives til:

$$ax-y+b=0$$

og sammenholdes med sætning 32 fås straks den ønskede normalvektor.

Følgende anvendelse af sætning 33 er meget nyttig:

Sætning 34 (FS)

Lad linierne l og m have hældningskoefficienterne a og b. Vi har da følgende udsagn::

$$l \text{ og } m \text{ er orthogonale} \quad \Leftrightarrow \quad ab = -1$$

Bevis:

Vi har, at l og m er orthogonale, netop når deres normalvektorer er orthogonale. Ifølge sætning 34 kan vi vælge normalvektorerne som

$$\vec{n}_l = \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{n}_m = \begin{pmatrix} b \\ -1 \end{pmatrix}$$

Disse er orthogonale, hvis og kun hvis deres skalarprodukt er nul, dvs.

$$\begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ -1 \end{pmatrix} = ab + 1 = 0$$

Denne ligning kan omformuleres til

$$ab = -1 ,$$

hvilket beviser sætningen.

Regnet opgave

Opgave: Find en ligning for den linie, som står vinkelret på linien med ligningen $y = 3x - 1$, og som går gennem punktet (1,4).

Løsning: Ud fra sætning 33 ses, at linien må have hældningskoefficienten

$$a = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

Liniens ligning er da

$$y = -\frac{1}{3}(x - 1) + 4$$

eller

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$$

Normalvektorer kan også bruges til at finde vinkler mellem linier:

Regnet opgave

Opgave: Find vinklen mellem linierne med ligningerne

$$2x - 2y + 9 = 0 \text{ og } y = 2x - 4 .$$

Løsning: Linierne har normalvektorerne $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Vi bruger skalarproduktet mellem disse vektorer til af finde vinklen v mellem vektorerne. Denne vinkel må da også være vinklen mellem linierne:

$$\cos v = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{2 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{8}\sqrt{5}}$$

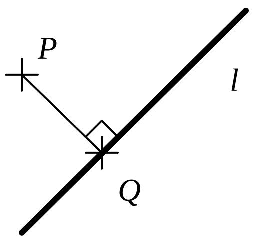
eller

$$v = \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{8}\sqrt{5}}\right) \approx 18{,}43^0$$

Endelig kan vi udlede en formel for afstanden mellem et punkt og en linie. Vi skal dog først definere denne afstand:

Definition 35 (FS)

Lad l være en linie og P et punkt i planen.
Afstanden mellem P og l, betegnet $\mathrm{dist}(P,l)$, defineres som den vinkelrette afstand mellem punktet P og l.
(Se tegningen nedenfor).

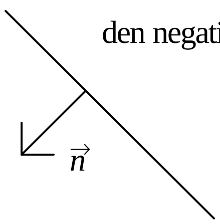


Idet Q er punktet på l, så PQ står vinkelret på L, så er afstanden fra P til L givet ved:

$$\mathrm{dist}(P,l) = |PQ|$$

En anden vigtig ting, som skal nævnes, inden vi beviser den lovede afstandsformel, er *positive* og *negative halvplaner:*

den negative halvplan



den positive halvplan

Har vi en linie l med en givet normalvektor $\vec{n}$, så deler denne linie planen op i to halvplaner. Disse kan skelnes fra hinanden ved at sige, at den positive halvplan er den halvplan, hvor $\vec{n}$ peger ind i. Den anden halvplan er så den negative halvplan.

Sætning 36 (FS)

Lad punktet $P=(x_1,y_1)$, og linien *l* have ligningen $l: Ax+By+C=0$. Afstanden mellem *P* og *l* er da givet ved

$$\operatorname{dist}(P,l)=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Endvidere gælder

a) $Ax_1+By_1+C>0 \iff P\in$ den positive halvplan.

b) $Ax_1+By_1+C<0 \iff P\in$ den negative halvplan.

c) $Ax_1+By_1+C=0 \iff P$ ligger på *l*.

Bemærk, at vi bruger normalvektoren $\vec{n}=\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$ til at bestemme, hvilken halvplan der er positiv.

Bevis:

Lad $P_0=(x_0,y_0)$ være et punkt på linien. Vi har da, at $\operatorname{dist}(P,l)$ netop er lig længden af projektionen af $\overrightarrow{P_0P}$ på $\vec{n}=\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$

Endvidere ses:

P ligger i den positiv halvplan, hvis $\overrightarrow{P_0P}_{\vec{n}}$ er ensrettet med $\vec{n}$

P ligger i den negativ halvplan, hvis $\overrightarrow{P_0P}_{\vec{n}}$ er modsat rettet med $\vec{n}$

Vi vil finde projektionen $\overrightarrow{P_0P}_{\vec{n}}$ ved brug af sætning 31:

$$\overrightarrow{P_0P}=\begin{pmatrix}x_1-x_0\\y_1-y_0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}x_1-x_0\\y_1-y_0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0)=Ax_1+B_1+C$$

hvor $C=-Ax_0-By_0$

Vi kan nu indsætte i formlen fra sætning 31:

$$\overrightarrow{P_0P}_{\vec{n}}=\frac{\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\vec{n}=\frac{Ax_1+By_1+C}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$$

Det ses, at nævneren i brøken altid er positiv, så det er fortegnet for tælleren $Ax_1 + By_1 + C$, som bestemmer, hvorvidt $\overrightarrow{P_0P}$ er ensrettet eller modsat rettet med $\vec{n}$. Skulle tælleren give 0, så ses det at P ligger på linjen! Dette beviser de tre sidste påstande i sætningen.

Finder vi længden af projektionen ovenfor, så fås

$$\text{dist}(P,l) = \left|\overrightarrow{P_0P}_{\vec{n}}\right| = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{|\vec{n}|^2}|\vec{n}| = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{|\vec{n}|} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

hvilket beviser sætningen.

Eksempel

Linien l har ligningen $3x + 4y + 3 = 0$. Endvidere haves punkterne $P = (2,1)$ og $Q = (5,-10)$. Vi kan da finde afstandene fra punkt til linien:

$$\text{dist}(P,l) = \frac{|3\cdot 2 + 4\cdot 1 + 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|13|}{\sqrt{25}} = \frac{13}{5}$$

$$\text{dist}(Q,l) = \frac{|3\cdot 5 + 4\cdot(-10) + 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-7|}{\sqrt{25}} = \frac{7}{5}$$

Endvidere ses, at indmaden i numerisktegnet får forskelligt fortegn for P og for Q. Dette betyder, at P ligger i den positive halvplan og Q i den negative halvplan. Kort sagt ligger P og Q på hver sin side af l.

En variant af sætning 36, som dog ikke kan klare lodrette linier, men som derimod står i formelsamlingen, er sætning 37:

Sætning 37 (FS)

Lad linien l have ligningen $y = ax + b$, og lad punktet P have koordinaterne (x_1, y_1). Da gælder:

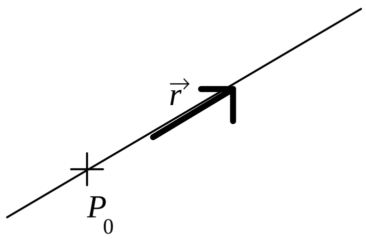
$$\text{dist}(P,l) = \frac{|ax_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

Bevis:

Dette udtryk kan fås fra sætning 36 ved at omskrive ligningen for l til $ax - y + b = 0$. Vi får da

$$\text{dist}(P,l) = \frac{|ax_1 - y_1 + b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \frac{|ax_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

En anden måde at beskrive en linie på er ved hjælp af en *parameterfremstilling*:



Lad P_0 være et punkt på linien, og lad $\vec{r}$ være en vektor parallel med linien - en såkaldt *retningsvektor*.

Et punkt P, som ligger på linien, må da opfylde, at $\overrightarrow{P_0P}$ er proportional med $\vec{r}$, dvs. der findes et tal t, så at

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{r} \ .$$

Vi kan da finde et udtryk for P's koordinater (eller rettere for P's stedvektor):

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{r}$$

Kalder vi P's koordinater for (x, y), P_0's koordinater for (x_0, y_0), og sætter vi $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$,

så får vi *parameterfremstillingen for l*:

(38) $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

t kaldes *parameteren*, og den er altså en ubekendt, som kan antage alle mulige værdier.

Inspirationen til parameterfremstillingen kommer fra fysik. Her forestiller man sig, at t er tiden. Punktet P er så positionen for en partikel, der bevæger sig jævnt langs en ret linie, efterhånden som tiden t ændrer sig.

Som ved normalvektorer gælder der, at en retningsvektor for en linie ikke er entydigt bestemt - enhver vektor, som er proportional med den oprindelige retningsvektor er ligeledes en retningsvektor.
Omskrivningen mellem ligning og parameterfremstilling foregår således:

Eksempel

Linien *l* har ligningen $4x - 2y - 8 = 0$. Vi vil finde en parameterfremstilling for *l*.

Først finder vi et punkt på *l*:

Sætter vi y lig nul, så ses, at $x = 2$, hvilket betyder, at (2,0) ligger på linien.

Så finder vi en retningsvektor til *l*. Den finder vi ved at tage tværvektoren til liniens normalvektor

$$\vec{n} = \hat{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}^{\wedge} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Og dermed kan vi finde en parameterfremstilling for *l*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vi kan more os med at omskrive denne parameterfremstilling til en ligning for *l*

Først finder vi et punkt på linien:

Sætter vi $t = 0$ så giver parameterfremstillingen punktet (2,0)

Så finder vi en normalvektor til linjen ved at tage tværvektoren til retningsvektoren:

$$\vec{n} = \hat{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}^{\wedge} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vi kan finde en ligning for *l*:

$$-4(x-2) + 2(y-0) = 0$$

eller

$$-4x + 2y + 8 = 0$$

Bemærk, at dette **ikke** er den oprindelige ligning for *l*.

Regnet opgave

Givet: Linien *l* har ligningen: $2x + y - 3 = 0$

Linien m har parameterfremstillingen: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Find: Skæringspunktet mellem *l* og m.

Svar: Vi tager udtrykkene for koordinaterne fra parameterfremstillingen

$$x = 1 - 2t \quad \text{og} \quad y = 3 + 5t$$

Disse sætter vi ind i l's ligning. Dette giver en ligning for parameteren *t*

$$2(1-2t) + (3+5t) - 3 = 0$$

eller

$$2 - 4t + 3 + 5t - 3 = 0$$

Løsningen ses at være $t = -2$. Dette svarer til skæringspunktet:

$$(x,y) = (1-2t, 3+5t) = (1-2\cdot(-2), 3+5\cdot(-2)) = (5,-7)$$

Skal man finde skæringspunktet mellem to linier, hvor man kun kender begges parameterfremstilling, så er det normalt bedst at lave den ene parameterfremstilling om til en ligning og derpå benytte ovenstående metode.

Opgaver

8.1 a) Bestem en parameterfremstilling for linien gennem (1;1) og (2;3)

b) Bestem en ligning for linien parallel med vektoren $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, og som går gennem punktet (-2,4)

c) Bestem vinklen mellem de to linier ovenfor.

d) Bestem skæringspunktet mellem de to linier.

8.2 Linien l og punkterne P og Q er bestemt ved

$$l: 2x+y+4=0 \qquad P=(2;-1) \qquad Q=(0;-5)$$

a) Bestem afstanden fra l til P og til Q.
b) Gør rede for, at P og Q ligger på hver sin side af l.
c) R er spejlbilledet til P under spejlingen i l.
Bestem koordinaterne til R.

8.3 Bevis, at vinklen v mellem linierne l og m med hældningerne a og b kan findes ved formlen

$$\cos v = \frac{ab+1}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}}$$

2.9 Opgaver

9.1 I en regulær sekskant $ABCDEF$ er sidelængden 1, centrum er punktet $O=(0{,}0)$, og et af sekskantens hjørner befinder sig i punktet $A=(1{,}0)$.

a) Skitsér sekskanten i et koordinatsystem.

b) Bestem koordinaterne til punkterne B, C, D, E og F.

c) Bestem koordinaterne til punktet P, som opfylder

$$\overrightarrow{OP}=2\,\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}-\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{CO}$$

d) Vis, at

$$\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DE}-(\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DB})=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{FB}-2\,\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{FA}$$

9.2 Lad vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ opfylde

$$|\vec{a}|=4 \qquad |\vec{b}|=3 \qquad \text{og} \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=6$$

a) Bestem vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

b) Bestem længden af vektoren $\vec{a}+\vec{b}$.

c) Bestem vinklen mellem vektorerne $\vec{a}+\vec{b}$ og $\vec{a}-\vec{b}$.

9.3 Lad vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ opfylde

$$|\vec{a}|=5 \qquad |\vec{b}|=2 \qquad \text{og} \qquad \angle(\vec{a},\vec{b})=60^\circ$$

a) Bestem $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

b) Bestem $\det(\vec{a},\vec{b})$.

c) Bestem længderne af vektorerne $2\vec{a}+3\vec{b}$ og $3\vec{a}-2\vec{b}$.

d) Bestem en af vinklerne mellem vektorerne $2\vec{a}+3\vec{b}$ og $3\vec{a}-2\vec{b}$.

e) Bestem arealet af parallelogrammet udspændt af vektorerne $2\vec{a}+3\vec{b}$ og $3\vec{a}-2\vec{b}$.

9.4 Lad vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ opfylde

$$|\vec{a}|=4 \qquad |\vec{b}|=3 \qquad \text{og} \qquad \angle(\vec{a},\vec{b})=30^\circ$$

Bestem arealet af trekanten udspændt af vektorerne $\vec{a}+2\vec{b}$ og $\vec{b}-\vec{a}$.

9.5 Lad vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ opfylde

$$|\vec{a}+\vec{b}|=4 \qquad |\vec{a}|=2 \qquad \text{og} \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=-\tfrac{5}{2}$$

Bestem længden af $\vec{b}$

9.6 Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er, for ethvert reelt tal t, bestemt ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} t-3 \\ t^2-9 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Bestem de værdier af t, for hvilke

a) $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale,

b) $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle,

c) arealet af parallelogrammet udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er mindre end 5, og

d) længden af projektionen $\vec{a}_{\vec{b}}$ er lig 4.

9.7 Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestem de værdier af tallet t, for hvilke vektorerne $\vec{a} + t\vec{b}$ og $2\vec{a} + 4\vec{b}$ er

a) ortogonale,

b) parallelle.

c) For hvilke af løsningerne i b) er de to vektorerne ensrettede?

9.8 Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestem de værdier af tallet t, således at $\left|\vec{a} + t\vec{b}\right| = 5$.

9.9 I planen er punktet A og vektoren $\vec{a}$ bestemt ved

$$A = (1,3) \qquad \text{og} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Punkterne B og C opfylder, at

$$\overrightarrow{AB} = 3\vec{a} \qquad \text{og} \qquad \overrightarrow{AC} = 2\vec{a} - 3\hat{a}.$$

a) Bestem sidelængderne i trekant ABC.

b) Bestem koordinaterne til punkterne B og C.

c) Bestem samtlige vinkler i trekant ABC.

9.10 Gør rede for, at punkterne $A = (3,5)$ og $B = (8,4)$ ligger på samme side af linien l med ligningen $l : x + 2y - 2 = 0$.

9.11 Indenfor vektor-algebraen kaldes en funktion, som afbilder en vektor over i en vektor, for en *operator*. F.eks. er tværvektor-operationen en operator.
Vi skal i denne opgave se lidt nærmere på nogle operatorer, hvoraf tværvektor-operatoren er et specialtilfælde, nemlig de såkaldte *rotationer*..

Lad v være en vilkårlig vinkel. Operatoren, som tager en vektor $\vec{a}$ og drejer den v grader imod urets retning, kaldes R_v, og den fremkomne vektor betegnes naturligvis $R_v(\vec{a})$.

a) Find en anden skrivemåde for $R_{90°}(\vec{a})$.

Vi skal nu finde et koordinatudtryk for disse rotationer. Fremgangsmåden er den samme som for sætning 20 (og sætningerne 18 og 19).

b) Gør rede for, R_v opfylder linearitetsegenskaberne

$$R_v(\vec{a}+\vec{b}) = R_v(\vec{a}) + R_v(\vec{b})$$

og

$$R_v(t\vec{a}) = t\,R_v(\vec{a})\,.$$

c) Bevis, at

$$R_v(\vec{i}\,) = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \end{pmatrix},$$

og find et tilsvarende udtryk for $R_v(\vec{j}\,)$.

d) Bevis endelig, at

$$R_v\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos v - y\sin v \\ x\sin v + y\cos v \end{pmatrix}.$$

e) Stemmer dette overens med sætning 20?

Disse rotationer kan bruges til mange sjove ting:

f) Bevis, at $R_{v+w}(\vec{a}) = R_w(R_v(\vec{a}))$. (Vink: Tolk udsagnet geometrisk)

g) Benyt d) og f) til at bevise *additionsformlerne*:

$$\cos(v+w) = \cos v\cos w - \sin v\sin w$$

og

$$\sin(v+w) = \sin v\cos w + \cos v\sin w$$

9.12 Denne opgave er en fortsættelse af 9.11.

Vi skal nu betragte spejlningsoperatoren S_v, hvor v er en vilkårlig vinkel. $S_v(\vec{a})$ defineres som den vektor, der opnås ved at *spejle* vektoren $\vec{a}$ i den linie, som går gennem (0,0) og som danner vinklen med x-aksen.

Bestem et koordinatudtryk for S_v.

9.13 a) Bestem skæringspunktet mellem linierne l og m givet ved:

$$l:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad m:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$$

b) Bestem afstanden fra linien n til punktet A, når

$$n:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad A=(9,4)$$

9.14 Linien l har ligningen $5x+3y-1=0$.
Bestem en ligning for linierne m og n opfyldende

a) $l \perp m$ og m går gennem punktet $(8,-3)$,

b) $l \parallel n$ og n går gennem punktet $(8,-3)$.

9.15 Find ligningen for de linier gennem punktet $(0,0)$, som danner vinklen $60°$ med linien $l: 3x-4y+6=0$.

9.16 Lad linierne l og m være givet ved ligningerne

$$l: x-2y+6=0 \qquad \text{og} \qquad m: x-2y-4=0$$

a) Bestem afstanden mellem l og m.

b) Bestem en ligning for den anden linie n, hvis afstand til l er lig afstanden mellem l og m.

c) Hvordan finder man generelt afstanden mellem to parallelle linier?
- og hvad er afstanden mellem to linier, som skærer hinanden?

Facitliste

2.1: a) $\vec{a}$ og $\vec{b}$ b) $\vec{k}$ c) ingen d) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{e}$

e) $\vec{a}, \vec{c}$; $\vec{f}, \vec{h}$; $\vec{e}, \vec{g}$ f) modsat rettede g) $\vec{a}$ og $\vec{e}$ h) nej

2.3: $3, 3, 2, \sqrt{13}, 3, \sqrt{18}, 1, \sqrt{8}, 0, \sqrt{2}$ **2.4:** a) $\overrightarrow{AF}$ b) $\overrightarrow{AC}$ c) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB}$ d) $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CB}$

2.6: de to vektorer skal være ensrettede (eller nulvektoren)

4.1: a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 13 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 7 \\ -6 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

4.2: a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 13 \\ 12 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -5 \\ -8 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}$

4.3: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ **4.4:** $x = -3$ nej, de er modsat rettede

4.5: a) $(-4,0)$ b) $(-1, \frac{7}{2})$

4.6: a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $|AC| = \sqrt{26}$ $|BD| = \sqrt{34}$

c) $B = (4,6)$ $C = (-1,7)$ $D = (-1,3)$

4.7: a) $|AB| = \sqrt{260}$ $|BC| = \sqrt{53}$ $|AC| = \sqrt{149}$ b) $(-2,1)$

c) $m_a = \sqrt{\frac{765}{4}}$ $m_b = \sqrt{\frac{45}{4}}$ $m_c = 6$ d) $(-2,15)$

5.1: a) -16 b) 7 c) 4 d) -9 e) -427 f) 0

5.2: a) 143,13° b) 161,57° c) 172,87° **5.3:** a) $\begin{pmatrix} 0 \\ -112 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 \\ -434 \end{pmatrix}$

5.4: A=153,43° B=18,43° C=8,13° **5.5:** a) $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$ b) $-\frac{2}{3}$

5.6: a) 48,19° b) $\sqrt{21}$ c) 5 d) 5 e) 60,79°

6.1: a) $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -12 \\ 10 \end{pmatrix}$ d) 1 e) 4 f) 9 **6.3:** a) $-\frac{8}{5}$ b) $\frac{1}{2}$

7.1: a) $(1,-1)$ b) $(-1,4)$ c) $(-74,-10)$ d) $(-42,52)$

7.2: $\begin{pmatrix} 15/13 \\ 10/13 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5/4 \\ 5/4 \end{pmatrix}$ **7.4:** $\vec{a} = \vec{b} + \frac{5}{3}\vec{c}$

7.5 a) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ b) $\vec{c} \parallel \vec{a}$ d) $\{(6-2t, t) \mid t \in \mathbf{R}\}$ ingen løsninger

8.1: a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $x + y - 2 = 0$ c) 71,57 ° d) (1;1)

8.2: a) $\operatorname{dist}(P,l) = \frac{7}{\sqrt{5}}$ $\operatorname{dist}(Q,l) = \sqrt{5}$ c) $(-\frac{4}{5} ; -\frac{12}{5})$

Kapiteloversigt

Regneregler for vektorer

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ $\qquad$ $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$ $\qquad$ $t(\vec{a}+\vec{b})=t\vec{a}+t\vec{b}$

$(s+t)\vec{a}=s\vec{a}+t\vec{a}$ $\qquad$ $(st)\vec{a}=s(t\vec{a})=t(s\vec{a})$

$\left|\vec{a}\pm\vec{b}\right|\le|\vec{a}|+\left|\vec{b}\right|$

$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

Koordinatudtryk

$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix}$ $\qquad$ $\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\end{pmatrix}$ $\qquad$ $t\vec{a}=\begin{pmatrix}ta_1\\ta_2\end{pmatrix}$

for $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}x_2-x_1\\y_2-y_1\end{pmatrix}$ for $P=(x_1,y_1)$ og $Q=(x_2,y_2)$

Tværvektor

$(\vec{a}+\vec{b})\hat{}=\hat{a}+\hat{b}$ $\qquad$ $(t\vec{a})\hat{}=t\hat{a}$ $\qquad$ $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}^{\wedge}=\begin{pmatrix}a_2\\-a_1\end{pmatrix}$

Længde, skalarprodukt og determinant

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos v$

$\det(\vec{a},\vec{b})=\hat{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin v$

v er den (fortegnsbestemte) vinkel mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff \vec{a}\perp\vec{b}$ $\qquad$ forudsat $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$

$\det(\vec{a},\vec{b})=0 \iff \vec{a}\parallel\vec{b}$ $\qquad$ forudsat $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ $\qquad$ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

$(t\vec{a})\cdot\vec{b}=t(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(t\vec{b})$ $\qquad$ $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

$\det(\vec{a},\vec{b})=-\det(\vec{b},\vec{a})$

$\det(\vec{a},\vec{b}+\vec{c})=\det(\vec{a},\vec{b})+\det(\vec{a},\vec{c})$ $\qquad$ $\det(t\vec{a},\vec{b})=t\det(\vec{a},\vec{b})=\det(\vec{a},t\vec{b})$

$A=\left|\det(\vec{a},\vec{b})\right|$ $\qquad$ Arealet af parallelogrammet udspændt af $\vec{a}$ og $\vec{b}$

$|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \qquad \det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

for $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Projektioner og opløsninger

$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases}$ har løsningen $(x, y) = \left(\dfrac{D_x}{D}, \dfrac{D_y}{D} \right)$ forudsat $D \neq 0$, hvor

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

Den rette linie

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ ligningen for linien gennem (x_0, y_0) med normalvektor $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ parameterfremstilling for linien gennem (x_0, y_0) med normalvektoren $\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$

$a_l \cdot a_m = -1$ produktet af to vinkelrette linier med hældningerne a_l og a_m

$\text{dist}(P, l) = \dfrac{|ax_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$ Afstanden mellem linien l: $y = ax + b$, og punktet $P = (x_1, y_1)$