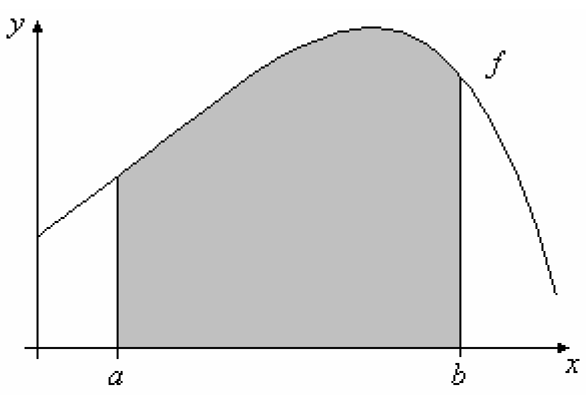
Matematikkens mysterier
- på et højt niveau

af

Kenneth Hansen

1. Integralregning



Hvad er arealet af den skraverede punktmængde?

1. Integralregning

Indhold

Anvendte symboler

Sætninger, definitioner og formler er mærket med

FS: sætningen findes i formelsamlingen

LS: lær selv formlen udenad - den findes (underligt nok) **ikke** i formelsamlingen, og du får sikkert brug for den til eksamen

1.1 Stamfunktioner og det ubestemte integral

Lad os se det i øjnene med det samme: Integralregning går i høj grad ud på at arbejde med stamfunktioner... Vi starter derfor med et kort resumé af, hvad en stamfunktion egentlig er for noget:

Definition 1

En *stamfunktion* til funktionen f er en funktion F som opfylder

$$F'(x) = f(x).$$

Man bruger normalt notationen $\int f(x)\,dx$ for en stamfunktion til f.

En funktion, som har en stamfunktion, kaldes *integrabel*.

Det lidt mystiske symbol $\int$ kaldes et *integraltegn*. Det har form som et langstrakt S, og naive sjæle kunne fristes til at tro, at S'et kom fra det første bogstav i ordet *stamfunktion*. Dette er dog ikke tilfældet; S'et kommer fra det latinske ord *Summa*, som betyder *sum*. Symbolet blev indført af Leibniz omkring 1675. Funktionen f kaldes i øvrigt *integranden*.

Bemærk, at dx'et også hører med til integraltegnet. Det viser sig at være et ganske nyttigt symbol og ikke bare, som man umiddelbart ville tro, af ornamental karakter.

Der er desværre et lille problem omkring stamfunktioner. Vi illustrerer det i det følgende eksempel:

Eksempel

Idet $(\sin x)' = \cos x$, har vi, at $\int \cos x\,dx = \sin x$.

Men der gælder også, at $(\sin x + 3)' = \cos x$, så vi har $\int \cos x\,dx = \sin x + 3$.

Faktisk vil enhver funktion af formen $\sin x + k$, hvor k er et reelt tal, være en stamfunktion til $\cos x$.

Det ser ud til, at integralet ikke er særligt veldefineret. Og det er det sådan set heller ikke - man taler om det *ubestemte* integral. Følgende sætning viser, at det dog er rimeligt let at få styr på dette ubestemte integralet.

Sætning 2

Lad f være en funktion, som er defineret på **intervallet** *I*, og lad F_1 og F_2 være to stamfunktioner til *f* på *I*. Så findes et reelt tal *k*, således at

$$F_1(x) = F_2(x) + k \text{ for alle } x \in I.$$

Bevis:

Vi differentierer funktionen *G* givet ved $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$ og får

$$G'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

G har altså differentialkvotienten 0, og idet *G* er defineret på et interval *I*, så må *G* være en konstant funktion, dvs. der findes et reelt tal *k*, således at $G(x) = k$.
Men dette betyder, at

$$k = G(x) = F_1(x) - F_2(x)$$

$$\Downarrow$$

$$F_1(x) = F_2(x) + k.$$

Sætning 2 betyder, at man normalt kan tillade sig at skrive

$$\int \cos x\,dx = \sin x + k$$

Det er dog ikke altid, at man tager *k*'et med - f.eks. udelades *k*'et normalt i integraltabeller og formelsamlinger.

I beviset for sætning 2 benyttes det, at funktionerne alle er defineret på et **interval**. Sætningen gælder ikke, hvis definitionsmængden ikke er et interval. Dette skyldes, at sætningen

$$G'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad G(x) = \text{konstant}$$

ikke gælder, når definitionsmængden for funktionen *G* ikke er et interval. Man skal altså passe meget på, hvis definitionsmængden ikke er et interval.

Eksempel

Vi har, at

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Dette betyder umiddelbart, at

$$\int -\frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x} + k$$

Men her skal man passe på, fordi k faktisk *ikke* er en konstant! Eksempelvis er begge nedenstående funktioner stamfunktioner til funktionen $-\frac{1}{x^2}$:

$$F(x)=\begin{cases} x^{-1}, x>0 \\ x^{-1}, x<0 \end{cases} \qquad \text{og} \qquad G(x)=\begin{cases} x^{-1}+3, x>0 \\ x^{-1}+4, x<0 \end{cases}$$

Dette skyldes, at integrandens definitionsmængde er $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, som **ikke** er et interval, og at vi derfor kan ændre 'konstanten' k på hver af de to sammenhængskomponenter i definitionsmængden uafhængigt af hinanden.

Vi afslutter dette kapitel med at give et par eksempler på, hvilke slags opgaver, man kan blive udsat for i forbindelse med stamfunktioner og det ubestemte integral:

Regnede opgaver

Opgave: Find den stamfunktion til funktionen $f(x)=e^x$, hvis graf går gennem punktet $(1,1)$

Løsning:

$$F(x)=\int e^x\,dx=e^x+k$$

hvor vi altså blot skal finde k. Opgaveformuleringen fortæller os, at $F(1)=1$, hvilket ved indsættelse giver

$$1=F(1)=e^1+k=e+k$$

$$\Downarrow$$

$$k=1-e$$

Den søgte stamfunktion er derfor

$$F(x)=e^x+1-e$$

Opgave: Find den stamfunktion til funktionen $g(x)=\frac{1}{x}$, hvis graf har linien med ligningen $y=x+3$ som tangent.

Løsning: Den søgte stamfunktion betegner vi med G. Vi starter med at finde røringspunktet x_0 til tangenten. Idet linien har hældningen 1, og $G'(x_0)=g(x_0)$ netop er tangenthældningen i x_0, ses, at

$$g(x_0)=\frac{1}{x_0}=1 \quad\Leftrightarrow\quad x_0=1$$

Man skal nu passe lidt på, idet definitionsmængden for g ikke er et interval. Vi har jo, at $\mathrm{Dm}(g)=]-\infty;0[\cup]0;\infty[$ - altså to disjunkte intervaller, og den stamfunktion, vi skal finde, har kun mening i ét interval. Vi indskrænker os derfor til det interval, som indeholder $x_0 = 1$, dvs. til intervallet $]0;\infty[$. Her gælder da

$$G(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + k, \; x > 0$$

og det er nu en smal sag at finde k. $G(1) = 1 + 3 = 4$, idet tangentens røringspunkt $(1, 1+3) = (1, 4)$ gerne skulle ligge på grafen for G. Vi får da, at

$$4 = G(1) = \ln 1 + k = 0 + k = k$$

og den søgte stamfunktion bliver

$$G(x) = \ln x + 4, \; x > 0$$

Opgave: Bevis, at $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + k$.

Løsning: Dette er nemt nok; vi differentierer bare højresiden og ser, om vi får integranden på venstresiden:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(x \cdot \ln x - x + k) = \\
&\frac{d}{dx}(x \ln x) - \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(k) = \\
&\frac{d}{dx}(x) \cdot \ln x + x \cdot \frac{d}{dx}(\ln x) - 1 + 0 = \\
&1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 + 0 = \\
&\ln x
\end{aligned}$$

Bemærk, at der altid gælder, at

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$$

Dette følger jo af definitionen af stamfunktionen.
Hvis man skal bevise en integralformel, så er det altså en god idé at differentiere!

Et spørgsmål, vi skal vende tilbage til senere, er: **Hvilke funktioner er integrable?** Det er lidt svært at give et fyldestgørende svar på dette spørgsmål, men allerede nu kan vi afsløre, at funktioner, som er kontinuerte, også er integrable. Faktisk er stykkevis kontinuerte funktioner, dvs. funktioner, der er skrevet som en gaffelforskrift, og hvor de enkelte delfunktioner er kontinuerte, også integrable funktioner.

Opgaver

1.1 I den blå formelsamling (*Matematisk formelsamling, Matematisk linie, Højt niveau*) findes der på side 30 en hel række formler for forskellige stamfunktioner, f.eks.

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + k$$

Bevis (en delmængde af) disse formler.

1.2 Bestem den stamfunktion til $f(x) = 4x^3$, hvis graf går gennem (1,3).

1.3 Bestem den stamfunktion G til $g(x) = \sqrt{x}$, som opfylder at $G(1)=2$.

1.4 Bestem den stamfunktion til $h(x) = x$, som har linien med ligningen $y = -x + 1$ som tangent.

1.5 Bestem de stamfunktioner til $k(x) = 3x^2$, som har linien med ligningen $y = 3x + 2$ som tangent.

1.6 Bestem den stamfunktion L til funktionen $l(x) = \dfrac{1}{x^2}$, som opfylder at $L(1) = 2$.
Husk at medtage den rigtige definitionsmængde!

1.7 Bestem stamfunktionen M til $m(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ opfyldende $M(-2) = 1$.

1.8 Bevis, f.eks. ved at differentiere, at funktionen F bestemt ved

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ \frac{1}{2}x^2 & , x > 0 \end{cases}$$

er en stamfunktion til funktionen $f(x) = |x|$. (Du skal bruge tretrinsraketten direkte for at kunne differentiere F i punktet $x = 0$)

1.2 Regneregler for det ubestemte integral

I denne sektion vil de forskellige regneregler og teknikker indenfor integralregningen blive præsenteret. Dels er der nogle simple regler, og dels er der de vigtige metoder *partiel integration* og *integration ved substitution*.

Sætning 3 (FS)

Lad f og g være integrable funktioner, og lad s og t være reelle tal. Da gælder følgende regneregler:

a) $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

b) $\int (f(x)-g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

c) $\int s\cdot f(x)\,dx = s\cdot \int f(x)\,dx$

d) $\int (s\cdot f(x)+t\cdot g(x))\,dx = s\cdot \int f(x)\,dx + t\cdot \int g(x)\,dx$

Bevis:

Beviserne for alle fire regler er alle af den samme surdej, så vi nøjes med at bevise regel a). Strategien er den, at vi differentierer højresiden og ser, om vi får integranden på venstresiden:

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\right) =$$
$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) + \frac{d}{dx}\left(\int g(x)\,dx\right) = f(x)+g(x)$$

Dette er jo netop integranden på venstresiden, og dette beviser reglen.

Vi brugte differentiationsreglen

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$

og regel a) kan da også betragtes som en omformulering af denne regel.

Eksempler

a) $\int (-12x+5)\,dx = -12\int x\,dx + 5\int dx = -12\cdot\frac{x^2}{2} + 5\cdot x + k = -6x^2 + 5x + k$.

Her benyttes den lidt underlige notation $\int dx = \int 1\,dx$.

b) $\int (2x^3 - 3x^2 + 4x + 9)\,dx = 2\cdot\frac{x^4}{4} - 3\cdot\frac{x^3}{3} + 4\cdot\frac{x^2}{2} + 9x + k =$

$$\frac{x^4}{2} - x^3 + 2x^2 + 9x + k$$

c) $$\int (4x^{-1} + 2x^{-2} + \frac{1}{\sqrt{x}})\,dx = 4\ln x + 2\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + 2\sqrt{x} + k =$$

$$4\ln x - \frac{2}{x} + 2\sqrt{x} + k$$

Integration af produktfunktioner er ikke helt enkel. Det samme gælder ved differentiation, hvor vi husker, at den noget komplicerede regel gælder:

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Reglen, vi finder, kaldes *partiel integration* eller *delvis integration*, fordi integrationen ikke umiddelbart føres til ende, men ordnes i dele.

Sætning 4 (Partiel integration) (FS)

Lad f og g være integrable funktioner, og antag endvidere, at g er differentiabel. Da gælder

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx = F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx$$

hvor F er en stamfunktion til f.

Bevis:

Vi differentierer højresiden:

$$\frac{d}{dx}\left(F(x)\cdot g(x) - \int F(x)\cdot g'(x)\,dx\right) =$$

$$\frac{d}{dx}\left(F(x)\cdot g(x)\right) - \frac{d}{dx}\left(\int F(x)\cdot g'(x)\,dx\right) =$$

$$F'(x)\cdot g(x) + F(x)\cdot g'(x) - F(x)\cdot g'(x) =$$

$$F'(x)\cdot g(x) \;=\; f(x)\cdot g(x)$$

Idet vi opnår integranden på venstresiden, er sætningen bevist.

Når man benytter partiel integration er det en god idé at skrive alle mellemregningerne ud; den bitre erfaring viser, at fortegnsfejl er meget hyppige. Endvidere skal man lave det rigtige valg af, hvilken af faktorerne i integranden, man vil differentiere. Endelig er det en god idé at gøre prøve - dette sker ved at differentiere facittet og se, om man får den oprindelige integrand.

Advarsel

En vigtig ting at bemærke, er at man **ikke bare kan integrere produktvist**. Formlen

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx$$

gælder ikke! (- og det er jo derfor, man er nødt til at bruge den bøvlede metode kaldet partiel integration...)

Regnede opgaver

Opgave: Beregn integralet $\int x\cdot e^x\,dx$.

Løsning: Idet integranden er et produkt, kunne man forestille sig, at man skulle bruge partiel integration. Vi vælger i første forsøg

$$f(x) = x \text{ og } g(x) = e^x$$

Vi får da, at

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \text{ og } g'(x) = e^x$$

Partiel integration giver da

$$\int x\cdot e^x\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot e^x - \int \frac{x^2}{2}\cdot e^x\,dx$$

hvilket vi ikke blev meget klogere af - integranden blev faktisk mere kompliceret end før.

Nå, men vi prøver så med

$$f(x) = e^x \text{ og } g(x) = x$$

Dette giver

$$F(x) = e^x \text{ og } g'(x) = 1$$

og vi får

$$\int x\cdot e^x\,dx = x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx =$$

$$xe^x - e^x + k$$

Opgave: Beregn integralet $\int x^2 e^x\,dx$.

Løsning: Belært af vore dyrt lærte erfaringer differentierer vi nu x^2:

$$\int x^2 e^x\,dx = x^2 e^x - \int 2xe^x\,dx =$$

$$x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + k =$$

$$x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + k$$

hvor vi brugte resultatet fra den sidste opgave.

Opgave: Beregn integralet $\int x^3 e^x\,dx$.

Løsning: Denne gang differentierer vi faktoren x^3:

$$\int x^3 e^x\,dx = x^3 e^x - \int 3x^2 e^x\,dx =$$

$$x^3 e^x - 3(x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x) + k =$$

$$x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x + k$$

Morale: **Hvis den ene faktor er en potens af x (eller et polynomium), så er det denne faktor, der skal differentieres.**

Dette er dog en sandhed med modifikationer, som næste eksempel viser:

Opgave: Bestem integralet $\int x \cdot \ln x\,dx$.

Løsning: Det viser sig her at være smart at differentiere faktoren $\ln x$:

$$\int x \cdot \ln x\,dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,dx =$$

$$\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + k$$

Vi slutter af med en lidt underlig anvendelse af partiel integration:

Opgave: Bestem integralet $\int \ln x\,dx$.

Løsning: Vi opfatter integranden som et produkt af $\ln x$ og den konstante funktion 1. Vi differentierer $\ln x$ og integrerer 1-tallet:

$$\int 1 \cdot \ln x\,dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx =$$

$$x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + k$$

Det er vist på sin plads at påpege her, at man ofte fusker lidt med integrationskonstanten k. F.eks. er udregningen

$$\tfrac{1}{2}\int \cos x\, dx = \tfrac{1}{2}\sin x + k$$

forkert! Den rigtige udregning er faktisk

$$\tfrac{1}{2}\int \cos x\, dx = \tfrac{1}{2}(\sin x + k) = \tfrac{1}{2}\sin x + \tfrac{1}{2}k$$

Men alligevel skriver man oftest k i stedet for $\frac{1}{2}k$. Dette skyldes, at k jo er en **ukendt** konstant, og det er derfor ligegyldigt, om den ganges med $\frac{1}{2}$. Oftest bestemmes k slet ikke, eller man bestemmer k efter integrationen ved indsættelse af nogle talværdier.

En anden vigtig integrationsmetode er *integration ved substitution*, som viser sig at være integrationsvarianten af reglen for differentiation af sammensatte funktioner:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Sætning 5 (Integration ved substitution) (FS)

Lad f og g være integrable funktioner, og antag endvidere, at g er differentiabel. Så

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x)) + k$$

hvor F er en stamfunktion til f.

Bevis:

Beviset er ganske simpelt; vi differentierer højresiden og skulle gerne få integranden på venstresiden:

$$\frac{d}{dx}(F(g(x)) + k) = F'(g(x)) \cdot g'(x) + 0 = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

I praksis anvender man ikke sætning 4 direkte. I stedet (mis-)bruger man $\frac{dy}{dx}$-notationen:

Lader vi y være $y = f(x)$ så kan vi opfatte $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ som en kvotient - hvad det altså ikke er. Vi kan gange igennem med dx og får $dy = f'(x)dx$

Anvender vi denne regneregel i forbindelse med integraltegnets dx, kan integration ved substitution foretages næsten automatisk.

Eksempel

Vi vil beregne $\int 2\cos(2x)\,dx$:

Vi sætter y lig den indre funktion: $y = 2x$

Så er

$$dy = y'(x)dx = 2dx$$

og integralet kan nu omskrives

$$\int 2\cos(2x)\,dx = \int \cos(2x)\cdot 2dx = \int \cos(y)dy =$$

$$\sin(y) + k = \sin(2x) + k$$

Alternativt kunne man skrive

$$\int 2\cos(2x)dx = \int \cos(2x)\,d(2x) = \int \sin(2x) + k$$

hvor man i det andet integral opfatter integrationsvariablen som $2x$.

Man bruger traditionelt symbolet t i stedet for y i den første metode.

Regnede opgaver

Opgave: Bestem integralet $\int \sin(2x+4)\,dx$.

Løsning: Vi sætter $t = 2x + 4$ og får $dt = 2dx$

$$\int \sin(2x+4)\,dx = \int \sin t \cdot \frac{1}{2}dt =$$

$$\frac{1}{2}(-\cos(t)) + k = -\frac{1}{2}\cos(2x+4) + k$$

Opgave: Bestem integralet $\int 2x\cdot(x^2+4)^6\,dx$.

Løsning: Vi sætter $t = x^2 + 4$ og får $dt = 2xdx$

$$\int 2x\cdot(x^2+4)^6 dx = \int t^6 dt = \frac{1}{7}t^7 + k = \frac{1}{7}(x^2+4)^7 + k$$

Opgave: Bestem integralet $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$.

Løsning: Vi sætter $t = \sin x$ og får $dt = \cos x\,dx$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{t^2} dt = -\frac{1}{t} + k = -\frac{1}{\sin x} + k$$

Opgave: Beregn $\int \frac{x}{x+1} dx$.

Løsning: Her sættes $t = x + 1$, og $dt = dx$. Det er normalt en god idé at forhindre sammenblanding af de to integrationsvariable x og t indenfor samme integrand, men her kan det ikke umiddelbart undgås:

$$\int \frac{x}{x+1} dx = \int \frac{x}{t} dt$$

Men husker vi på, at $t = x + 1 \Leftrightarrow x = t - 1$, får vi

$$\int \frac{x}{x+1} dx = \int \frac{t-1}{t} dt = \int (1 - \frac{1}{t})\, dt =$$

$$t - \ln|t| + k = x + 1 - \ln|x+1| + k$$

Vi har nu en hel masse metoder til at finde ubestemte integraler. Hvilken metode skal man anvende for et givet integral? Følgende tommelfingerregler gælder

1) Hvis integranden indeholder en sammensat funktion, så prøv først med substitution. Sæt t lig indmaden af den sammensatte funktion.

2) Hvis integranden er en kvotient, så prøv igen substitution. Sæt t lig nævneren i kvotienten.

3) Hvis integranden er en rational funktion (dvs. en polynomiumsbrøk), så kan man enten lave polynomiers division for at simplificere integranden, eller man kan i enkelte tilfælde benytte den såkaldte *stambrøksmetode* - se opgave 2.5 og 2.6 nedenfor.

4) Hvis integranden er et produkt, og der ikke er sammensatte funktioner på færde, så kan man prøve partiel integration. Som den faktor, som bliver differentieret, er det bedst at vælge $\ln x$ eller x^n.

Opgaver

2.1 Bestem følgende integraler:

a) $\int (8x - 6)\, dx$ b) $\int (-3x^3 + 4x + 5)\, dx$

c) $\int (2x^3 - 5x^2 - 2x - 4) dx$ d) $\int (5x^{-2} + 4x^{-3} + 2x^2)\, dx$

e) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})\, dx$ f) $\int (x \cdot \sqrt{x} + 4x \cdot \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x})\, dx$

g) $\int (\sin x + 2\cos x)\,dx$

h) $\int (1 + \tan^2 x + 2x)\,dx$

i) $\int (\frac{5}{x^2} + \cos x + \frac{1}{\cos^2 x})\,dx$

j) $\int (3e^x + e^{3x})\,dx$

k) $\int (\cos 2x + \sin 3x + 2\sqrt{x})\,dx$

l) $\int (4^x + \frac{3}{\sqrt{x}})\,dx$

m) $\int (3\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}})\,dx$

n) $\int (e^x + x^e)\,dx$

o) $\int (x^3 + 4x^2)\,dx$

p) $\int (x + x^{-2})\,dx$

q) $\int (\frac{1}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x})\,dx$

r) $\int (x^{1/3} + 2x^{-1/3})\,dx$

2.2 Bestem følgende integraler. Brug partiel integration.

a) $\int x \cdot \sin x\,dx$

b) $\int x \cdot \cos x\,dx$

c) $\int x^2 \cdot \sin x\,dx$

d) $\int x^2 \cdot \cos x\,dx$

e) $\int x^2 \cdot \ln x\,dx$

f) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

g) $\int (\ln x)^2\,dx$ (Vink: Omskriv til $\int \ln x \cdot \ln x\,dx$)

2.3 Bestem følgende integraler. Brug integration ved substitution.

a) $\int (4x-1)^6\,dx$

b) $\int (x+5)^3\,dx$

c) $\int \frac{1}{(8x-3)^2}\,dx$

d) $\int 2x \cdot \sqrt{x^2+3}\,dx$

e) $\int 2x \cdot \sin(x^2)\,dx$

f) $\int x \cdot e^{x^2}\,dx$

g) $\int 3x^2 \cdot \frac{1}{(x^3+1)^4}\,dx$

h) $\int \cos x \cdot \sin^2 x\,dx$

i) $\int \sin x \cdot e^{\cos x}\,dx$

j) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+1}\,dx$

k) $\int (3x^2+4x+2)(x^3+2x^2+2x+6)^{12}\,dx$

2.4 Bestem følgende ubestemte integraler:

a) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

b) $\int xe^{-x}\,dx$

c) $\int x\sqrt{x-2}\,dx$

d) $\int x \cdot \sin(4x^2)\,dx$

e) $\int \sqrt{x+2}\,dx$

f) $\int (x+1)e^{x^2+2x}\,dx$

g) $\int (x+1)^2 e^{3x}\,dx$

h) $\int (3-x)\sin(3x)\,dx$

i) $\int x \cdot \sin(8x)\,dx$

j) $\int (1+\tan^2 x)\cdot\cos(\tan x)\,dx$

k) $\int x^2 \ln(x^3)\,dx$

l) $\int \ln(x^2)\,dx$

m) $\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}}dx$

n) $\int x\cdot e^{3-x^2}\,dx$

o) $\int \frac{(\ln x)^5}{x}dx$

p) $\int x^2 \sin(x^3-1)\,dx$

q) $\int \frac{x}{(1-x)^4}dx$

r) $\int x^{-3/2}\ln x\,dx$

s) $\int \frac{4x-x^3}{x^4-8x^2-6}dx$

t) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\,dx$

2.5 Vi vil i denne og den følgende opgave skitsere nogle metoder til integration af rationale funktioner (polynomiumsbrøker).

a) Vis, ved brug af polynomiers division, at

$$\frac{x^2-x+1}{x+1}=x-2+\frac{3}{x+1}$$

b) Brug resultatet fra a) til at bestemme det ubestemte integral

$$\int \frac{x^2-x+1}{x+1}dx$$

Husk at angive definitionsmængderne!

c) Benyt en tilsvarende metode til at bestemme integralerne

$$\int \frac{2x^2+x+1}{x+3}dx \qquad \text{og} \qquad \int \frac{x^3+x^2+x+1}{x+1}dx$$

Den her skitserede metode er naturligvis kun anvendelig, når tælleren i den rationale funktion har højere grad end nævneren.

2.6 a) Bevis, at

$$\frac{2x+1}{x^2+x-6}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+3}$$

b) Bestem

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x-6}dx$$

Omskrivningen i a) af den rationale funktion kaldes en *opsplitning i stambrøker*. Man kan vise, at hvis tællerpolynomiet har lavere grad end nævneren, og hvis det er muligt at faktorisere nævnerpolynomiet i førstegradspolynomier, så kan man finde en opsplitning i stambrøker.

c) Bestem tallene *a* og *b*, således at

$$\frac{3x+7}{x^2+4x+3} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+3}$$

og bestem integralet

$$\int \frac{3x+7}{x^2+4x+2}\,dx$$

d) Bestem rødderne i polynomiet $x^3 - 3x - 2$ (der er en dobbeltrod!)
Bestem derefter tallene *a*, *b* og *c*, således at

$$\frac{4x^2-3x-1}{x^3-3x-2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{x-2}$$

og bestem integralet

$$\int \frac{4x^2-3x-1}{x^3-3x-2}\,dx$$

1.3 Det bestemte integral

I modsætning til det ubestemte integral er det bestemte integral et tal. Definitionen er som følger:

Definition 6 (FS)

Lad f være en integrabel funktion i intervallet I, og lad $a, b \in I$. *Det bestemte integral* er tallet defineret ved

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

hvor F er en vilkårlig stamfunktion til f.

Bemærk, at $\int_a^b f(x)\,dx$ ikke afhænger af, hvilken stamfunktion $F(x)$ man vælger. Ifølge sætning 3 afviger to sådanne stamfunktioner nemlig kun fra hinanden med en konstant k. Så vælger vi i stedet stamfunktionen $F_1(x) = F(x) + k$, fås

$$\int_a^b f(x)\,dx = F_1(b) - F_1(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$$

hvilket viser, at k'et kan ignoreres.

Det er også af samme årsag, at f skal være integrabel i et **interval**. Vender vi tilbage til eksemplet fra sektion 1, side 3, så kunne man komme til at lave følgende beregninger:

$$\int_{-1}^{1} -\frac{1}{x^2}dx = F(1) - F(-1) = \frac{1}{1} - \frac{1}{-1} = 1 - (-1) = 2$$

og

$$\int_{-1}^{1} -\frac{1}{x^2}dx = G(1) - G(-1) = (\frac{1}{1} + 3) - (\frac{1}{-1} + 4) = 4 - 3 = 1$$

Dette viser, at integralet $\int_{-1}^{1} -\frac{1}{x^2}dx$ ikke er veldefineret, og faktisk er at betragte som **meningsløst**. Igen skyldes dette, at integranden ikke er defineret på hele **intervallet** [-1;1].

Eksempel

I praksis foregår udregningen af bestemte integraler som følger:

$$\int_1^3 2x\,dx = \left[x^2\right]_1^3 = 3^2 - 1^1 = 9 - 1 = 8$$

hvor symbolet $\left[F(x)\right]_a^b$ betyder $F(b) - F(a)$.

Et par andre bestemte integraler er

$$\int_5^{10} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_5^{10} = \ln 10 - \ln 5 = \ln \frac{10}{5} = \ln 2$$

og

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_{-\pi}^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos(-\pi)) =$$

$$-(-1) - (-(-1)) = 0$$

- det kan vist godt betale sig at passe på fortegnene her!

Nedenstående regel a) kaldes ofte *indskudsreglen*:

Sætning 7 (FS)

Lad f være integrabel i intervallet I, og lad $a, b, c \in I$. Så gælder:

a) $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

b) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Bevis:

Lad F være en vilkårlig stamfunktion til f på I. Beviset for a) er da

$$\int_a^c f(x)\,dx = F(c) - F(a) = F(c) - F(b) + F(b) - F(a) =$$

$$F(c) - F(b) + F(b) - F(a) = (F(c) - F(b)) + (F(b) - F(a)) =$$
$$\int_b^c f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$$

og for b) fås

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Alle regnereglerne fra sidste kapitel kan uden videre overføres til det bestemte integral:

Sætning 8 (FS)

Lad *f* og *g* være integrable funktioner i intervallet *I*, lad $a, b \in I$, og lad *s* og *t* være reelle tal. Så gælder

a) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

b) $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

c) $\int_a^b s\cdot f(x)\,dx = s\cdot\int_a^b f(x)\,dx$

d) $\int_a^b (s\cdot f(x)+t\cdot g(x))\,dx = s\cdot\int_a^b f(x)\,dx + t\cdot\int_a^b g(x)\,dx$

Bevis:

Beviserne følger direkte af sætning 3. Vi nøjes derfor kun med at skrive beviset for a) ud i detaljer:

Ifølge sætning 3, a), gælder, at

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = F(x)+G(x)$$

hvor *F* og *G* er stamfunktioner til henholdsvis *f* og *g*. Dette betyder, at

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \left[F(x)+G(x)\right]_a^b =$$
$$(F(b)+G(b))-(F(a)+G(a)) =$$
$$(F(b)-F(a))+(G(b)-G(a)) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Sætning 9 (Partiel integration) (FS)

Lad *f* og *g* være integrable funktioner i intervallet *I*, *g* differentiabel i *I* og $a, b \in I$. Da gælder

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \left[F(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx$$

hvor *F* er en stamfunktion til *f*.

Bevis:

Fra sætning 4 vides, at

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

Bruger vi definitionen af det bestemte integral, så fås:

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)g(x)dx = \\
&\left[F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx\right]_a^b = \\
&\left[F(x)g(x)\right]_a^b - \left[\int F(x)g'(x)\,dx\right]_a^b = \\
&\left[F(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx
\end{aligned}$$

Eksempel

$$\int_1^5 xe^{2x}\,dx = \left[x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\right]_1^5 - \int_1^5 1\cdot\frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}xe^{2x}\right]_1^5 - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_1^5 =$$
$$(\frac{1}{2}\cdot 5\cdot e^{10} - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot e^{2}) - (\frac{1}{4}e^{10} - \frac{1}{4}e^{2}) = \frac{9}{4}e^{10} - \frac{1}{4}e^{2}$$

Endvidere gælder følgende sætning:

Sætning 10 (Integration ved substitution) (FS)

Lad f og g være integrable funktioner på intervallet I, g differentiabel på I. og $a, b \in I$. Så

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \left[F(g(x))\right]_a^b = \left[F(t)\right]_{g(a)}^{g(b)}$$

hvor F er en stamfunktion til f.

Bevis:

Fra sætning 5 vides, at

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + k$$

Dette betyder, at

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \left[F(g(x)) + k\right]_a^b = \\
&(F(g(b)) + k) - (F(g(a)) + k) =
\end{aligned}$$

$$F(g(b)) - F(g(a)) = [F(g(x))]_a^b =$$
$$F(g(b)) - F(g(a)) = [F(t)]_{g(a)}^{g(b)}$$

I praksis udføres integration ved substitution dog på følgende måde:

Eksempel

Integralet $\int_2^3 2x \cdot e^{x^2}\, dx$ skal beregnes. Vi sætter $t = x^2$ og observerer:

$$dt = 2x\,dx$$
$$t = 9 \text{ for } x = 3$$
$$t = 1 \text{ for } x = 2$$

Derfor fås, at

$$\int_2^3 2x \cdot e^{x^2}\, dx = \int_4^9 e^t\, dt = \left[e^t\right]_4^9 = e^9 - e^4$$

Det er ekstremt vigtigt, at man husker at ændre grænserne, når man ændrer integrationsvariablen!

Regnede opgaver

Opgave: Beregn integralet $\int_0^2 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$.

Løsning: Vi bruger integration ved substitution:

$$t = e^x + 1, \text{ så } e^x = t - 1$$
$$dt = e^x dx$$
$$x = 2 \Rightarrow t = e^2 + 1$$
$$x = 0 \Rightarrow t = 2$$

Derfor

$$\int_0^2 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx = \int_2^{e^2+1} \frac{t - 1 - 1}{t} dt =$$
$$\int_2^{e^2+1} (1 - \frac{2}{t})\, dt = [t - 2\ln t]_2^{e^2+1} =$$
.
$$e^2 + 1 - 2\ln(e^2 + 1) - 2 + 2\ln 2 =$$
$$e^2 - 1 - 2\ln\frac{e^2 + 1}{2}$$

Opgave: Beregn integralet $\int_1^e \frac{1}{x}\cos(\ln x)\, dx$

Løsning: Vi sætter

$$t = \ln x$$

og får

$$dt = \frac{1}{x}dx$$

$$x = e \Rightarrow t = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow t = 0$$

Derfor

$$\int_1^e \frac{1}{x}\cos(\ln(x))\,dx = \int_0^1 \cos t\,dt =$$

$$\left[\sin t\right]_0^1 = \sin 1 - \sin 0 = \sin 1$$

Opgave: Beregn integralet $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$

Løsning: Her skal man bruge partiel integration:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \left[\ln x \cdot 2\sqrt{x}\right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\cdot 2\sqrt{x}\,dx =$$

$$2\cdot \ln e \cdot \sqrt{e} - 2\cdot \ln 1 \cdot \sqrt{1} - \int_1^e \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$2\sqrt{e} - 0 - \left[4\sqrt{x}\right]_1^e = 4 - 2\sqrt{e}$$

Opgave: Lad f være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} x^{-1} & 0 < x < 2 \\ x/4 & x \geq 2 \end{cases}$$

Beregn $\int_1^3 f(x)\,dx$.

Løsning: Vi får ved brug af indskudsreglen:

$$\int_1^3 f(x)\,dx = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x}dx + \int_2^3 \frac{x}{4} =$$

$$\left[\ln x\right]_1^2 + \left[\frac{x^2}{8}\right]_2^3 = \ln 2 - \ln 1 + \frac{9}{8} - \frac{4}{8} = \ln 2 + \frac{5}{8}$$

Opgaver

3.1 Bestem værdien af følgende integraler:

a) $\int_{-2}^{1} (3x^2 + 2x + 1)\,dx$ b) $\int_{-1}^{-1/2} \frac{1}{x^2}\,dx$ c) $\int_4^8 -x\,dx$

d) $\int_1^4 (x^2 - x + 1)\,dx$ e) $\int_0^1 e^{2x}\,dx$ f) $\int_3^9 \frac{1}{x}\,dx$

g) $\int_{-2}^3 (4 + x)\,dx$ h) $\int_1^5 x^4\,dx$ i) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$

3.2 En funktion f opfylder

$$\int_1^5 f(x)\,dx = 1 \quad , \quad \int_2^3 f(x)\,dx = 3 \quad , \quad \int_3^5 f(x)\,dx = 1 \quad \text{og} \quad \int_3^7 f(x)\,dx = -4$$

Beregn følgende integraler vha. indskudsreglen:

a) $\int_1^3 f(x)\,dx$ b) $\int_2^5 f(x)\,dx$ c) $\int_2^7 f(x)\,dx$

d) $\int_5^7 f(x)\,dx$ e) $\int_1^2 f(x)\,dx$ f) $\int_1^7 f(x)\,dx$

3.3 Beregn følgende integraler. Brug partiel integration

a) $\int_1^2 x^3 \ln x\,dx$ b) $\int_{-1}^1 (x+1)e^x\,dx$ c) $\int_0^3 xe^{3x}\,dx$

d) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x\,dx$ e) $\int_0^{2\pi} x \cdot \sin x\,dx$ f) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

3.4 Beregn følgende integraler vha. integration ved substitution.

a) $\int_{5/3}^2 3(3x-5)^{17}\,dx$ b) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$

c) $\int_1^3 (4-2x)\sin(4x - x^2)\,dx$ d) $\int_5^{13} x\sqrt{x^2 - 25}\,dx$

e) $\int_{\sqrt{3}}^2 ((x^2-3)^{17} - (x^2-3)^{12})x\,dx$ f) $\int_3^5 x\sqrt{x^2 - 9}\,dx$

g) $\int_0^{\pi/2} e^{(\sin x)^2} \cdot \cos x \cdot \sin x\,dx$ h) $\int_1^{e^{\pi/2}} \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$

3.5 Beregn nedenstående bestemte integraler.

a) $\int_1^3 x^2 e^{x^3}\,dx$ b) $\int_1^3 x^2 e^x\,dx$

c) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\sin x)\cos x\,dx$ d) $\int_{-1}^0 x(x+1)^8\,dx$

e) $\int_1^e (\ln x)^2\,dx$ f) $\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2 + \cos x}\,dx$

3.6 Givet: $\int_1^5 f(x)dx = 2$ og $\int_1^5 (f(x) - g(x))dx = 1$

Find: $\int_1^5 2g(x)dx$

3.7 Givet: $\int_0^3 (f(x) - 2g(x))dx = 6$ og $\int_0^3 (2f(x) + g(x))dx = 12$

Find: $\int_0^3 f(x)dx$ og $\int_0^3 2g(x)dx$

3.8 Givet: $\int_1^5 (f(x) - g(x))dx = 2$ og $\int_1^5 (f(x) + 2g(x))dx = 6$

Find: $\int_1^5 g(x)dx$

3.9 Bestem følgende integraler. (Brug indskudsreglen på strategisk vigtige steder).

a) $\int_{-3}^3 |x|dx$ b) $\int_{-2}^6 |2x-4|\,dx$ c) $\int_{-2\pi}^{2\pi} |\sin x|dx$

1.4 Den geometriske betydning af integralet - arealbestemmelse

Vi vil her præsentere den vigtigste anvendelse af integralet, nemlig til beregning af arealer. Hovedsætningen er:

Sætning 11 (FS)

Lad f være en kontinuert, ikke-negativ funktion på intervallet I, og lad $a, b \in I$ med $a \leq b$. Da gælder, at

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{arealet af}$$

$\{(x,y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Sætningen siger altså, at $\int_a^b f(x)\,dx$ er lig arealet af det skraverede område nedenfor:

Bevis:

Beviset for denne sætning er lidt langt, så vi deler det op i tre skridt:

1) Definition af *arealfunktionen A*.
2) Bevis for, at $A'(x) = f(x)$.
3) Oversættelse af 2) til et bestemt integral.

1) For simpelheds skyld anvender vi notationen

$$P(x_1, x_2) = \{(x,y) \mid x_1 \leq x \leq x_2, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Arealfunktionen A defineres nu ved:

$$A(x_0) = \text{arealet af punktmængden } \; P(a, x_0), \text{for } x_0 \geq a$$

Bemærk, at $A(x)$ kun er defineret for $x \geq a$.
Bemærk endvidere, at $A(a) = 0$, idet $A(a)$ er arealet af "stregen"
$(a,y) \,\big|\, 0 \leq y \leq f(a)$.

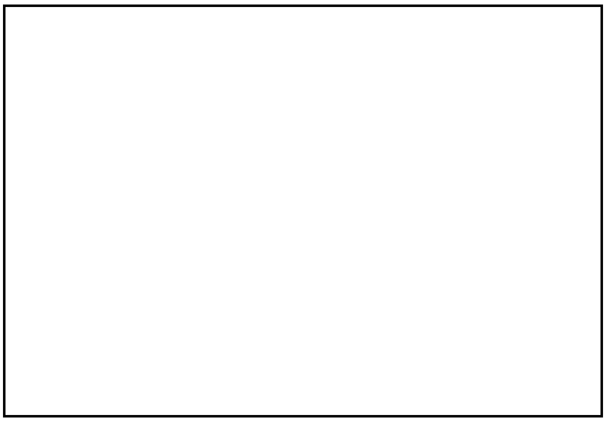
2) Vi skal differentiere arealfunktionen $A(x_0)$, og dette gøres ved at beregne grænseværdien

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h}$$

ud fra geometriske betragtninger. Der er 4 tilfælde at betragte:

I: $h > 0$ og f er voksende for $x \geq x_0$
II: $h < 0$ og f er voksende for $x \leq x_0$
III: $h > 0$ og f er aftagende for $x \geq x_0$
IV: $h < 0$ og f er aftagende for $x \leq x_0$

Vi nøjes med at kigge på tilfælde I - resten af tilfældene behandles stort set ens.
Betragt nedenstående figur:



Det skraverede område har arealet

$$A(x_0 + h) - A(x_0)$$

og dette område kan spærres inde mellem de to kasser, som har arealerne

$$f(x_0 + h) \cdot h$$

og

$$f(x_0) \cdot h.$$

Vi har altså uligheden

$$f(x) \cdot h \leq A(x_0 + h) - A(x_0) \leq f(x_0 + h) \cdot h$$

som ved division med h giver

$$f(x_0) \leq \frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h} \leq f(x_0+h)$$

Bemærk, at vi har antaget, at $h > 0$, og dette betyder, at ulighedstegnene **ikke** skal vendes.

Lader vi nu h gå imod 0 fra højre, og husker vi på, at idet f er kontinuert, så er $\lim_{h \to 0^+} f(x_0+h) = f(x_0)$, så får vi uligheden

$$f(x_0) \leq \lim_{h \to 0^+} \frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h} \leq f(x_0)$$

Sammenholdes dette med det tilsvarende udsagn for $h < 0$, ses, at A er differentiabel i x_0,og at $A'(x_0) = f(x_0)$.

3) Fra 2) har vi, at $\int f(x)\,dx = A(x)+k$ for et eller andet reelt tal k. Specielt har vi, at

$$\int_a^b f(x)\,dx = (A(b)+k)-(A(a)+k) = A(b)-A(a)$$

og idet $A(a)=0$ ses, at $\int_a^b f(x)\,dx = A(b)$, hvilket beviser sætningen.

Eksempel

Funktionen f er givet ved

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^2 .$$

Arealet A af punktmængden givet ved

$$\left\{(x,y) \middle| 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \tfrac{1}{2}x^2\right\}$$

kan nu findes ved udregning af nedenstående integral:

$$A = \int_1^2 \tfrac{1}{2}x^2\,dx = \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{6}-\frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

Det følger faktisk af sætning 11, at enhver kontinuert (ikke-negativ) funktion er integrabel. For en sådan funktion kan vi jo definere arealfunktionen, og beviset for sætning 11 viser så, at denne arealfunktion faktisk er en stamfunktion til den oprindelige funktion. Dette argument kan let udvides til alle kontinuerte funktioner, og også til stykkevis kontinuerte funktioner.

Nu er sætning 11 ikke særligt anvendelig i dens nuværende form - dels findes der funktioner, som antager negative værdier, dels er man normalt interesseret i arealet mellem to funktionsgrafer. Dette råder følgende sætning bod på:

Sætning 12 (FS)

Lad *f* og *g* være kontinuerte funktioner på intervallet *I*, antag at der gælder, at $f(x) \geq g(x)$ for $x \in I$, og lad $a, b \in I$. Da er arealet af punktmængden

$$\{(x,y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

lig integralet $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$.

Bevis:

For at kunne bruge sætning 11 skal både *f* og *g* være ikke-negative overalt i intervallet *I*. Det behøver de ikke at være, så vi benytter et trick for at gøre dem det:

Idet både *f* og *g* er kontinuerte på det lukkede interval *I*=[*a*;*b*], så har de begge en mindsteværdi på dette interval. Vælg et tal *k*, således at *k* er større end numerisk-værdien af begge mindsteværdier.

Da vil funktionerne $f(x)+k$ og $g(x)+k$ begge være ikke-negative på intervallet $I = [a,b]$, og arealet af punktmængden

$$\{(a,b) \mid a \leq x \leq b, g(x)+k \leq y \leq f(x)+k\}$$

vil være lig arealet af den oprindelige punktmængde. Vi har kort sagt skubbet den oprindelige figur *k* opad:

Det søgte areal er nu differensen mellem arealerne af punktmængderne

$$A = \{(a,b) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)+k\}$$

og

$$B = \{(a,b) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq g(x) + k\}$$

- se figuren:

Ergo, det oprindelige areal er lig

$$\int_a^b (f(x)+k)\,dx - \int_a^b (g(x)+k)\,dx =$$

$$\int_a^b ((f(x)+k)-(g(x)+k))\,dx = \int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$$

hvilket beviser sætningen.

Regnede opgaver

Opgave: Graferne for funktionerne $f(x) = x^2$ og $g(x) = x$ afgrænser en punktmængde, som har et areal. Beregn dette areal.

Løsning: Vi skynder os at skitsere de to grafer. Det ses, f.eks. ved at løse ligningen

$$f(x) = g(x)$$

eller ved aflæsning på grafen, at den søgte punktmængde ligger mellem linierne $x = 0$ og $x = 1$, og man kan kontrollere dette ved at se, at

$$f(0) = 0 = g(0) \text{ og } f(1) = 1 = g(1)$$

Endvidere ses, at $g(x) \geq f(x)$ for $x \in [0;1]$

Det søgte areal er altså lig

$$\int_0^1 (g(x) - f(x))\,dx = \int_0^1 (x - x^2)\,dx =$$

$$\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Opgave: På figuren er vist graferne for funktionerne $f(x) = \cos x$ og $g(x) = \sin x$. Beregn arealet af området begrænset af kurverne med ligningerne $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ og $x = \pi$.

Løsning: Det ses af grafen, at

$$f(x) \geq g(x) \text{ for } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{og} \quad g(x) \geq f(x) \text{ for } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi$$

Vi kan således ikke umiddelbart anvende sætning 12, men må splitte området op i to dele. Arealet kan således som

$$\int_0^{\pi/4} (f(x) - g(x))\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (g(x) - f(x))\,dx =$$

$$\int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi} (\sin x - \cos x))\,dx =$$

$$[\sin x - (-\cos x)]_0^{\pi/4} + [(-\cos x) - \sin x]_{\pi/4}^{\pi} =$$

$$[\sin x + \cos x]_0^{\pi/4} + [-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^{\pi} =$$

$$\sin\tfrac{\pi}{4} + \cos\tfrac{\pi}{4} - (\sin 0 + \cos 0) + (-\cos\pi - \sin\pi) - (-\cos\tfrac{\pi}{4} - \sin\tfrac{\pi}{4}) =$$

$$\tfrac{\sqrt{2}}{2} - (-\tfrac{\sqrt{2}}{2}) - (0-(-1)) + (-(-1)-0) - ((-\tfrac{\sqrt{2}}{2}) - \tfrac{\sqrt{2}}{2}) =$$
$$\sqrt{2} - 1 + 1 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Atter en gang kan det vist betale sig at holde øje med fortegnene!

Bemærk, at hvis vi i stedet uden videre beregnede integralet

$$\int_0^{\pi} (f(x) - g(x))\,dx$$

så ville vi **ikke** få det rigtige resultat. Værdien af dette integral ville nemlig være lig det første delareal **minus** det andet delareal.

Alternativt kunne man beregne integralet

$$\int_0^{\pi} |f(x) - g(x)|\,dx$$

som uden videre ville give det rigtige areal. Problemet er bare, at man, for at få styr på integranden, er nødt til at splitte integralet op efter fortegnet for 'indmaden' $f(x) - g(x)$ - og gør man dette, så får man netop udregningen ovenfor!

Eksempel

Vil man finde arealet af punktmængden

$$\left\{(x,y) \,\middle|\, 0 \le x \le 1, -\sqrt{x} \le y \le 0\right\},$$

som er tegnet ovenfor, da skal man opfatte punktmængden om området mellem graferne for funktionerne $g(x) = 0$ og $f(x) = x$. Man skal derfor beregne integralet

$$A = \int_0^1 (0 - (-\sqrt{x}))\,dx = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx = \left[\tfrac{2}{3} x\sqrt{x}\right]_0^1 = \tfrac{2}{3}$$

Eksempel

Vil man finde arealet af det skraverede område mellem sinuskurven og x-aksen ovenfor, så skal man beregne to integraler - man skal nemlig opsplitte området ved den lodrette linie med ligningen $x = \pi$. Beregningerne bliver:

$$A = \int_0^{\pi} (\sin x - 0)\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (0 - \sin x)\, dx = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} + \left[\cos x\right]_{\pi}^{2\pi} =$$
$$-\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi = 4$$

Generelt kan det betale sig at glemme sætning 11 og opfatte alle arealberegninger som tilfælde af sætning 12. Situationen i sætning 11 skal da opfattes som, at man skal finde arealet af området afgrænset af grafen for f og x-aksen, som er grafen for nulfunktionen.

Opgaver

4.1 Skitsér følgende punktmængder og beregn deres areal:

a) $\{(x,y) \mid 2 \le x \le 3, 0 \le y \le 6x\}$

b) $\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le e^x\}$

c) $\{(x,y) \mid -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 6x^2\}$

d) $\{(x,y) \mid 0 \le x \le 4, 0 \le y \le \sqrt{x}\}$

e) $\{(x,y) \mid -2 \le x \le -1, 0 \le y \le -4x\}$

f) $\{(x,y) \mid 0 \le x \le 9, 0 \le y \le e^{x/3}\}$

4.2 Skitsér og bestem arealerne af områderne begrænset af de nedenstående kurver:

a) $y = 5 - 3x^2$, x-aksen, y-aksen og x=1

b) $x = -2$, $x = 2$, $y = 2x^2$ og $y = 8$

c) $x = -1$, $x = 2$, $y = e^{2x}$ og $y = e^{-x}$

d) $y = 2x^2 + x - 1$ og $y = 3 - x$

e) $y = 2x^2$ og $y = x^3 - 3x$

4.3 Bestem tallet *c*, således at området begrænset af kurverne med ligningerne

$$y = x^2 \qquad \text{og} \qquad y = 4$$

opdeles i to lige store områder af den vandrette linie med ligningen $y = c$.

4.4 Betragt funktionen *f* med forskriften $f(x) = x \cdot e^{-x}$.

a) Tegn grafen for *f*.

Af grafen for *f* fremgår det, at $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$. Dette kan uden bevis benyttes i det følgende.

Arealet af punktmængden

$$\{(x, y) \mid 0 \le x \le t \ , 0 \le y \le f(x) \}$$

betegnes A_t. Her betegner *t* er reelt, positivt tal.

b) Beregn et udtryk for A_t som funktion af *t*.

Man kan bevise, at punktmængden

$$\{(x, y) \mid 0 \le x \ , 0 \le y \le f(x) \}$$

har et areal. Dette areal betegnes som A_∞.

c) Bestem værdien af A_∞.

1.5 Numerisk integration

De tidligere udviklede metoder og regneregler for integration er ganske udmærkede, men kommer nu og da til kort. For eksempel kan nævnes:

Man kommer nu og da ud for at skulle integrere en funktion, som det viser sig at være ganske vanskeligt at nedskrive en stamfunktion til. F.eks. skal man indenfor sandsynlighedsregningen beregne integraler af formen

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$$

men det kan man bare ikke. Integranden er ganske skikkelig; det er en kontinuert og dermed integrabel funktion; men man kan ikke opskrive en stamfunktion ved brug af de sædvanlige funktioner.

Man kan også komme ud for at skulle integrere en funktion, hvor man kun kender enkelte funktionsværdier, f.eks. fra en tabel eller fra eksperimentelle målinger. Hvordan kan man integrere en funktion, når man ikke kender funktionens forskrift?

Endelig kan man komme ud for at skulle beregne integraler i massevis - hver for sig kan integralerne nok være ganske simple, men det tager alligevel tid at beregne f.eks. en million af dem. Derfor vil man gerne finde metoder, hvormed en lommeregner eller en computer kan beregne integraler.

Det viser sig, at man bliver nødt til at regne en tilnærmelse (approximation) til det ønskede integral ud. Der findes forskellige metoder til dette, og tilsammen kaldes de *numerisk integration*.

Vi vil omtale hele 5 metoder til numerisk integration. De har alle det tilfælles, at man erstatter den måske ret komplicerede integrand med en simpel funktion, som ligger tæt på integranden. Det er da barnemad for en 3.g'er at integrere den simple funktion. Det viser sig endvidere, at tolker man integralet som et areal, så kan approximationerne nemt visualiseres geometrisk.

Vi vil approximere integralet $\int_a^b f(x)\,dx$, og vi starter med de såkaldte *venstresummer*. Ideen ved både venstre-, højre- og midtsummer er at erstatte integranden f med en stykkevis konstant funktion.

I første omgang kunne man finde på at erstatte f med den konstante funktion v_1 givet ved $v_1(x) = f(a)$. Af figuren ses, at $\int_a^b f(a)\,dx = (b-a)\cdot f(a)$. Dette tal betegnes V_1 - den 1. *venstresum*. (Bemærk, at $f(a)$ er et tal!)

En lidt bedre approximation kunne opnås, hvis vi delte intervallet [a ; b] op i to lige store stykker, $[a\,;x_1]$ og $[x_1\,;b]$, hvor

$$x_1 = a + \frac{b-a}{2}$$

er midtpunktet mellem a og b. Vi tilnærmer da f med den stykkevis konstante funktion v_2 med forskriften

$$v_2(x) = \begin{cases} f(x_0) & , \quad x_0 \le x < x_1 \\ f(x_1) & , \quad x_1 \le x \le x_2 \end{cases}$$

hvor vi har skrevet x_0 og x_2 i stedet for a og b.

Integralet af denne tilnærmede funktion betegnes V_2 og er lig

$$V_2 = \int_{x_0}^{x_2} v_2(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} v_2(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} v_2(x)dx =$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x_0)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x_1)dx = (x_1 - x_0)\,f(x_0) + (x_2 - x_1)\,f(x_1) =$$

$$\frac{b-a}{2} f(x_0) + \frac{b-a}{2} f(x_1) = \frac{b-a}{2}(f(x_0) + f(x_1))$$

og ud fra figuren anes, at V_2 ligger tættere på $\int_a^b f(x)\,dx$ end V_1.

Videre kan vi dele [*a*; *b*] op i tre stykker, $[x_0 ; x_1], [x_1 ; x_2]$ og $[x_2 ; x_3]$, hvor

$$x_i = a + \frac{b-a}{3} i \, , i = 0,1,2,3$$

(vis selv dette!) og vi tilnærmer så *f* med den stykkevis konstante funktion v_3

$$v_3(x) = \begin{cases} f(x_0), x_0 \le x < x_1 \\ f(x_1), x_1 \le x < x_2 \\ f(x_2), x_2 \le x \le x_3 \end{cases}$$

Vi får da, efter en kort udregning,

$$V_3 = \int_a^b v_3(x)dx = \frac{b-a}{3}(f(x_0) + f(x_1) + f(x_2))$$

Hele generelt definerer vi den *n'te venstresum* V_n ved

Definition 13 (FS)

$$V_n = \frac{b-a}{n}(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}))$$

Generelt skulle V_n gerne være en approximation til integralet $\int_a^b f(x)dx$, og jo større *n* bliver, jo bedre skulle approximationen være.

Ser man på figuren nedenfor, så ser man, at det enkelte led $\frac{b-a}{n} f(x_i)$ geometrisk set er arealet af den *i*'te strimmel med højden $f(x_i)$ og bredden $\frac{b-a}{n}$.

I stedet for konsekvent at approximere f i et interval med funktionsværdien i venstre endepunkt, så kunne man bruge funktionsværdien i højre endepunkt. Som figuren nedenfor viser, får vi *højresummen*

Definition 14 (FS)

$$H_n = \frac{b-a}{n}(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n))$$

(Bemærk ændringen - ved højresummer starter man med x_1 og ender ved x_n)

Endelig kunne man finde på at bruge funktionsværdien i midtpunktet af intervallet. Dette midtpunkt betegnes m_i og er lig

$$m_i = x_i + \frac{x_i - x_{i-1}}{2} = a + \frac{b-a}{n} \cdot (i + \frac{1}{2}) \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, n$$

(vis selv dette!) Vi får da *midtsummen*

Definition 15 (FS)

$$M_n = \frac{b-a}{n}(f(m_1) + f(m_2) + \ldots + f(m_n))$$

Eksempel

Vi vil beregne integralet $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ vha. de numeriske metoder; men først beregner vi det eksakt:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = \left[\ln x\right]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0{,}6931472\ldots$$

Vi starter med at sætte $n = 1$ og får

$$V_1 = \frac{2-1}{1}\cdot(\frac{1}{1}) = 1$$

$$H_1 = \frac{2-1}{1}\cdot(\frac{1}{2}) = 0{,}5$$

$$M_1 = \frac{2-1}{1}\cdot(\frac{1}{1{,}5}) \approx 0{,}6666667\ldots$$

hvilket ikke er overvældende præcist. Vi prøver videre:

$$V_2 = \frac{2-1}{2}\cdot(\frac{1}{1}+\frac{1}{1{,}5}) \approx 0{,}8333333\ldots$$

$$H_2 = \frac{2-1}{2}\cdot(\frac{1}{1{,}5}+\frac{1}{2}) \approx 0{,}5833333\ldots$$

$$M_2 = \frac{2-1}{2}\cdot(\frac{1}{1{,}25}+\frac{1}{1{,}75}) \approx 0{,}6857143\ldots$$

og for sjovs skyld

$$V_5 = \frac{2-1}{5}(\frac{1}{1}+\frac{1}{1{,}2}+\frac{1}{1{,}4}+\frac{1}{1{,}6}+\frac{1}{1{,}8}) \approx 0{,}7678571\ldots$$

$$H_5 = \frac{2-1}{5}(\frac{1}{1{,}2}+\frac{1}{1{,}4}+\frac{1}{1{,}6}+\frac{1}{1{,}8}+\frac{1}{2{,}0}) \approx 0{,}6678571\ldots$$

$$M_5 = \frac{2-1}{5}(\frac{1}{1{,}1}+\frac{1}{1{,}3}+\frac{1}{1{,}5}+\frac{1}{1{,}7}+\frac{1}{1{,}9}) \approx 0{,}6919079\ldots$$

Den procentvise afvigelse af den bedste approximation, M_5, fra integralets eksakte værdi $\ln 2$ er $0,2\%$ - ikke en voldsom nøjagtighed, når man tænker på det regnearbejde, der skal gøres.

Det ses, at både, venstre-, højre- og midtsummer ikke er særligt præcise. Vi vil derfor søge at finde metoder, som giver en større nøjagtighed med mindre regnearbejde.

Ved både venstre-, højre- og midtsummer approximerer man integranden med en stykkevis konstant funktion. En mere raffineret metode er at anvende en stykkevis lineær funktion. Dette giver anledning til de såkaldte *trapez-summer*.

Vi kræver, at grafen for denne stykkevis lineære funktion t_n skal bestå af liniestykker, som går gennem punkterne

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots (x_n, f(x_n))$$

For at finde en forskrift for t_n koncentrerer vi os om det *i*'te interval $\left[x_i ; x_{i+1}\right]$. t_n opfylder da, at

$$t_n(x_i) = f(x_i) \quad \text{og} \quad t_n(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$$

Vi kan umiddelbart skrive forskriften for t_n i dette interval op:

$$t_n(x) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \cdot (x - x_i) + f(x_i), x \in \left[x_i ; x_{i+1}\right]$$

Som grafen viser, så giver t_n en god approximation til *f*. Vi er interesseret i at finde integralet af t_n, som altså er approximationen til integralet for *f*:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} t_n(x)\,dx =$$

$$\left[\frac{1}{2}(x-x_i)^2\cdot\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}+f(x_i)\cdot x\right]_{x_i}^{x_{i+1}} =$$

$$\frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)^2\,\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}+f(x_i)\cdot x_{i+1}-0-f(x_i)\cdot x_i =$$

$$\frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)(f(x_{i+1})-f(x_i))+f(x_i)(x_{i+1}-x_i) =$$

$$\frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)(f(x_{i+1})+f(x_i)) =$$

$$\frac{b-a}{2n}(f(x_i)+f(x_{i+1}))$$

og ved brug af indskudsreglen fås

$$\int_a^b t_n(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} t_n(x)\,dx =$$

$$\int_{x_0}^{x_1} t_n(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} t_n(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} t_n(x)\,dx =$$

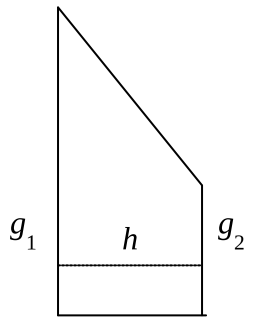
$$\frac{b-a}{2n}(f(x_0)+f(x_1))+\frac{b-a}{2n}(f(x_1)+f(x_2))+\ldots+\frac{b-a}{2n}(f(x_{n-1})+f(x_n)) =$$

$$\frac{b-a}{2n}(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n))$$

Dette integral betegnes T_n - den *n*'te *trapezsum*:

Definition 16 (FS)

$$T_n = \frac{b-a}{2n}(f(x_0)+2f(x_1)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n))$$



Denne formel er i øvrigt *meget* lettere at udlede geometrisk: T_n er nemlig summen af arealerne af de små trapez'er på figuren. Hver trapez har højden

$$h = x_{i+1} - x_i = \tfrac{b-a}{n}$$

og de to grundlinier er

$$g_1 = f(x_i) \qquad \text{og} \qquad g_2 = f(x_{i+1})$$

Bruger vi formlen for arealet af et trapez, fås, at det *i*'te trapez har arealet

$$\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{b-a}{n}(f(x_i) + f(x_{i+1}))$$

og adderes disse arealer, fås formlen i definition 16

Der er en simpel sammenhæng mellem venstre- og højresummer og trapezsummer:

Sætning 17 (FS)

$$T_n = \frac{1}{2}(V_n + H_n)$$

Bevis:

$$T_n = \frac{b-a}{2n}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) =$$
$$\frac{b-a}{2n}(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})) + \frac{b-a}{2n}(f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(x_n)) =$$
$$\frac{1}{2}V_n + \frac{1}{2}H_n = \frac{1}{2}(V_n + H_n)$$

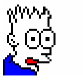
Eksempel

Fortsætter vi regnerierne fra det sidste eksempel ses, ved brug af sætning 17, at

$$T_1 = 0{,}75, T_2 \approx 0{,}7083333\ldots \text{ og } T_5 \approx 0{,}7178571\ldots$$

Den procentvise afvigelse af T_5 fra integralets eksakte værdi $\ln 2$ er $3{,}6\%$.

Generelt vil trapez-summen give en væsentligt bedre approximation end midt-summen. Alligevel er approximationen ikke god nok, så vi går et trin videre og omtaler den formel, alle anvender i praksis, nemlig *Simpson's formel*.



I denne formel approximerer man integranden f med et 'stykkevist andengrads-polynomium', dvs. med parabelbuer.

Vi udelader de gustne detaljer her, men henviser i stedet til opgave 5.5 nedenfor. Faktisk er Simpson-summer et udmærket emne at skrive 3. års opgaver om.

Definition 18

$$S_n = \frac{b-a}{2n}\big(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+ \\ 4f(x_3)+2f(x_4)+\ldots+ \\ 4f(x_{n-1})+f(x_n)\big)$$

Eksempel

Vi afslutter med at beregne Simpson-summer for integralet fra det sidste eksempel.

$$S_1 = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1}+4\frac{1}{1{,}5}+\frac{1}{2}\right) = 0{,}6944444\ldots$$

$$S_2 = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{1}+4\frac{1}{1{,}25}+2\frac{1}{1{,}5}+4\frac{1}{1{,}75}+\frac{1}{2}\right) = 0{,}693254\ldots$$

Allerede den anden Simpson-sum giver en afvigelse fra integralets 'sande' værdi på kun $0{,}02\%$ - dette er væsentligt bedre end den noget mere komplicerede trapezsum T_5.

Opgaver

5.1 Bevis formlen

$$S_n = \frac{1}{3}(T_n + 2M_n)$$

5.2 a) Vis, at $\int_1^5 \frac{1}{x}\,dx = \ln 5$

b) Approximér $\ln 5$ ved at udregne $V_{10}, H_{10}, M_{10}, T_{10}$ og S_{10}.

c) Bestem de procentvise afgivelser af resultaterne i b) fra integralets eksakte værdi

5.3 Funktionen *f* er voksende og kontinuert. Nedenstående funktionsværdier oplyses:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1,5	2,5	3	4,5	6

a) Bestem den trapezsum, som benytter alle tabellens oplysninger.

b) Gør rede for, at

$$11 \leq \int_1^5 f(x)dx \leq 16$$

5.4 Lad *f* være en voksende funktion.

a) Bevis, at $V_n \leq H_n$.

b) Gør rede for, at

$$V_n \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq H_n$$

og

$$V_n \leq M_n \leq H_n$$

c) Bevis, at

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - M_n \right| \leq H_n - V_n$$

d) Vis, at

$$H_n - V_n = \frac{f(b) - f(a)}{n}$$

og gør rede for, at

$$M_n \to \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{for} \quad n \to \infty$$

5.5 Simpson's formel

Formålet med denne opgave er at udlede Simpson's formel.

Vi har en funktion *f* på intervallet [a,b], og vi vil beregne $\int_a^b f(x)\,dx$.
Strategien er at approximere *f* med et stykkevist andengradspolynomium, kaldes s_n.

Vi starter med at finde et udtryk for s_n på intervallet $\left[x_i, x_{i+1}\right]$.

a) Gør rede for, at

$$s_n(x) = \alpha(x - m_i)^2 + \beta(x - m_i) + \gamma$$

er et andengradspolynomium. Tallene α, β og γ bestemmes senere.

Vi kræver, at s_n falder sammen med grafen for *f* i tre punkter, nemlig i x_i, m_i og x_{i+1}. Vi har altså tre betingelser, s_n skal opfylde:

$$s_n(x_i) = f(x_i)\ ,\ s_n(m_i) = f(m_i) \text{ og } s_n(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$$

b) Bevis, at

$$x_{i+1} - m_i = \tfrac{b-a}{2n} \qquad \text{og} \qquad x_i - m_i = -\tfrac{b-a}{2n}$$

c) Tallene α, β og γ i forskriften for s_n skal nu findes. Brug de tre betingelser ovenfor og vis, at

$$\alpha = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(m_i) + f(x_i)}{2\delta^2}$$

$$\beta = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{2\delta}$$

$$\gamma = f(m_i)$$

hvor vi har anvendt forkortelsen $\delta = \tfrac{b-a}{2n}$

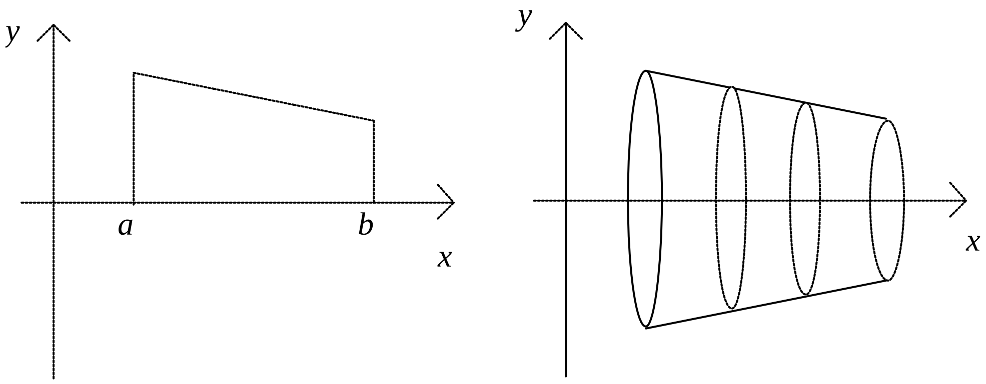
d) Bevis, at

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} s_n(x)dx = \frac{b-a}{6n}\left(f(x_{i+1}) + 4f(m_i) + f(x_i)\right)$$

e) Udled formlen i definition 18 ved brug af indskudsreglen.

1.6 Omdrejningslegemer

Et *omdrejningslegeme* er et legeme, som er opstået ved at dreje en kurve omkring x-aksen. Eksempler på omdrejningslegemer er kugler, cylindre, kegler og paraboloider.
På figuren er vist, hvorledes en simpel lineær graf ved rotation om x-aksen giver et omdrejningslegeme - en såkaldt *keglestub*.



Vi vil vise en vigtig formel til beregning af *rumfanget* af omdrejningslegemer:

Sætning 25 (FS)

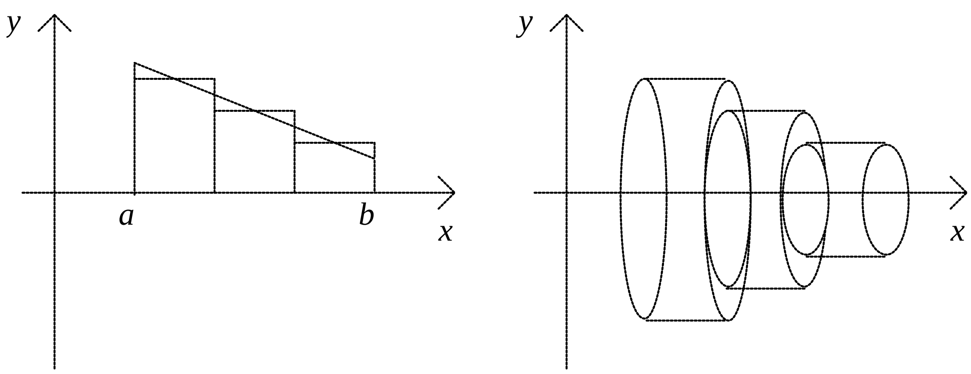
Lad f være en differentiabel funktion på intervallet $[a;b]$. Da er volumenet af omdrejningslegemet dannet ved rotation af punktmængden

$$\{(x,y) | a \le x \le b, 0 \le y \le |f(x)|\}$$

lig integralet $\int_a^b \pi (f(x))^2 \, dx$

Bevis:

Vi deler intervallet $[a;b]$ op i n stykker og erstatter f med en stykkevis konstant funktion - i øvrigt den samme funktion, som vi brugte i midtsumsberegningerne:



Laver vi omdrejningslegemet hørende til denne stykkevis konstante funktion, så fås den samling cylindre, som figuren til højre viser. Bruger vi de samme betegnelser som i formlen for midtsummen, så er volumenet af cylindrene til sammen lig

$$\frac{b-a}{n}\cdot(\pi\cdot f(m_1)^2+\pi\cdot f(m_2)^2 \ldots + \pi\cdot f(m_n)^2)$$

idet volumenet af en enkelt cylinder med radius *r* og højden *h* er $\pi\cdot hr^2$, og den *i*'te cylinder har radius $f(m_i)$ og højden $\frac{b-a}{n}$.

Vi observerer, at summen er en midtsum for integralet $\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx$, og lader vi nu *n* gå imod uendelig, så nærmer den stykkevis konstante funktions omdrejningslegene sig det oprindelige omdrejningslegeme. Samtidigt hermed nærmer midtsummen ovenfor sig til integralet.

Eksempel

En *paraboloide* er omdrejningslegemet for grafen givet ved $y=\sqrt{x}$ (eller rettere legemet, som opstår ved at rotere parablen med ligningen $y=x^2$ om *y*-aksen). Vi finder volumenet af paraboloiden med højden *h* (dvs. det legeme, som opstår ved at rotere punktmængden

$$\{(x,y)\,|\,0\le x\le h, 0\le y\le\sqrt{x}\}$$

Vi får, at

$$V=\int_0^h \pi(\sqrt{x})^2\,dx=\pi\cdot\int_0^h x\,dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h=\pi\frac{h^2}{2}$$

Eksempel

En kugle med radius *r* kan omfattes som omdrejningslegemet fremkommet ved at rotere punktmængden

$$\left\{(x,y)\,\middle|\,-r\le x\le r, 0\le y\le\sqrt{r^2-x^2}\right\}$$

omkring *x*-aksen.

Vi kan nu beregne voluminet *V* af denne kugle:

$$V=\pi\int_{-r}^{r}(\sqrt{r^2-x^2})^2dx=\pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)dx=\pi\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}=$$

$$\pi((r^3-\tfrac{1}{3}r^3)-(-r^3+\tfrac{1}{3}r^3))=\tfrac{4}{3}\pi r^3$$

hvilket jo er det fra folkeskolen velkendte udtryk!

Eksempel

Vi roterer punktmængden

$$\{(a,b) \mid 1 \le x \le 2\,,\ x \le y \le x^2 + 2\}$$

omkring x-aksen og ønsker at beregne volumenet af det herved fremkomne legeme. Dette legeme, som ligner et deformeret rør, kan opfattes som differensen mellem omdrejningslegemerne frembragt ved at rotere grafen for funktionerne

$$f(x) = x^2 + 2 \quad \text{og} \quad g(x) = x$$

Volumenet er da differensen af volumerne af de to omdrejningslegemer:

$$V = V_f - V_g =$$
$$\int_1^2 \pi(f(x))^2\,dx - \int_1^2 \pi(g(x))^2\,dx = \int_1^2 \pi(x^2+2)^2\,dx - \int_1^2 \pi x^2\,dx =$$
$$\int_1^2 \pi(x^4 + 4x^2 + 4)\,dx - \int_1^2 \pi x^2\,dx = \pi\left[\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3} + 4x\right]_1^2 - \pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$
$$\pi\left(\left(\tfrac{32}{5} + \tfrac{32}{3} + 8\right) - \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{4}{3} + 4\right) - \left(\tfrac{8}{3} - \tfrac{1}{3}\right)\right) = \frac{87\pi}{5}$$

Bemærk, at det er en **grov fejl** at tro, at volumenet at skallen ovenfor er lig

$$\int_1^2 \pi(f(x) - g(x))^2\,dx$$

Forskellen på de to udtryk er indmaden; indmaden i det korrekte udtryk er

$$f(x)^2 - g(x)^2$$

mens indmaden i det forkerte udtryk er

$$(f(x) - g(x))^2 = f(x)^2 + g(x)^2 - 2f(x)\cdot g(x)$$

Opgaver

6.1 Beregn volumenerne af de omdrejningslegemer, der opstår ved rotation af nedenstående punktmængder om x-aksen:

a) $\{(x,y) \mid 2 \le x \le 3, 0 \le y \le 6x\}$

b) $\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le e^x\}$

c) $\{(x,y) \mid -1 \le x \le 1, 0 \le y \le 6x^2\}$

d) $\{(x,y) \mid 0 \le x \le 4, 0 \le y \le \sqrt{x}\}$

e) $\{(x,y) \mid -2 \le x \le -1, 0 \le y \le -4x\}$

f) $\{(x,y) \mid 0 \le x \le 9, 0 \le y \le e^x\}$

6.2 Beregn volumenerne af de omdrejningslegemer, der opstår ved rotation af punktmængderne begrænset af kurverne nedenfor, omkring x-aksen.

a) $y = 5 - 3x^2$, x-aksen, y-aksen og $x = 1$

b) $x = -2$, $x = 2$, $y = 2x^2$ og $y = 8$

c) $x = -1$, $x = 2$, $y = e^{2x}$ og $y = e^{-x}$

d) $y = 2x^2 + x - 1$ og $y = 3 - x$

e) $y = 2x^2$ og $y = x^3 - 3x$

6.3 Betragt punktmængden $M = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 16, 0 \le y \le \sqrt[4]{x}\}$

Beregn volumenet af følgende tre omdrejningslegemer:

a) M roteres om x-aksen.

b) M roteres om y-aksen

c) M roteres om linien med ligningen $y = 2$.

6.4 a) Voluminet af en kegle med højden h og grundfladeradius r er $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. Bevis dette.

b) Voluminet af en cylinder med højden h og grundfladeradius r er $\pi r^2 h$. Bevis dette.

1.7 Olieproduktion

Vi giver i denne sektion en anvendelse af integralregning i det 'virkelige' liv.

I året 1974, hvor oliekrisen startede, brugte hele verden ca. 22 milliarder tønder råolie. Siden dengang er olieforbruget vokset med ca. 9 % pr. år.
Verdens oliereserver var i 1974 estimeret til at være ca. 625 milliarder tønder olie.

a) Hvor meget olie er der forbrugt fra 1974 til i dag (1993)?
b) Hvornår ville oliereserverne i 1974 være sluppet op? (Det forudsættes, at man ikke har fundet nye reserver.)

Vi starter med at opstille et funktionsudtryk f for verdens årlige olieforbrug. Lader vi tiden t være 0 i år 1974, så har vi åbenbart sammenhængen

$$f(t) = 22 \cdot 1{,}09^t \quad \text{(i milliarder tønder olie).}$$

Det totale forbrug fra 1974 ($t = 0$) til 1993 ($t = 19$) er da summen

$$f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + \ldots + f(19)$$

Dette er bøvlet at regne ud, så vi observerer, at summen faktisk er en venstresum for integralet $\int_0^{20} f(t)\,dt$, (bemærk, at den øvre grænse er 20, idet vi skal have hele 1993 med), og vi nøjes da med at regne integralet ud:

$$\int_0^{20} 22 \cdot 1{,}09^t\,dt = \left[22 \cdot \frac{1{,}09^t}{\ln 1{,}09}\right]_0^{20} = \frac{22}{\ln 1{,}09}(1{,}09^{20} - 1{,}09^0) \approx 1175{,}4$$

Det totale forbrug er da 1175,4 milliarder tønder olie.

For at besvare det sidste spørgsmål betegner vi med $F(s)$ verdens totale olieforbrug fra år 0 (1974) til år s. Vi finder $F(s)$:

$$F(s) = \int_0^s f(t)\,dt = \left[22 \cdot \frac{1{,}09^t}{\ln 1{,}09}\right]_0^s = \frac{22}{\ln 1{,}09}(1{,}09^s - 1)$$

og for at finde, hvornår olie ville slippe op, sætter vi $F(s)$ lig oliereserverne i 1974, nemlig 625. Denne ligning løses:

$$F(s) = 625 \Leftrightarrow \frac{22}{\ln 1{,}09}(1{,}09^s - 1) = 625 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow s = 14{,}4$$

Verdens oliereserver skulle altså være sluppet op 14 år efter 1974, dvs. engang i 1988! Det vakte bekymring dengang, og fik sammen med de hastigt voksende oliepriser lande som f.eks. Norge og England til at intensivere deres olieefterforskning.

1.8 Kinematik

Den oprindelige anvendelse af integralregningen kom fra kinematikken, som er studiet af genstandes bevægelse. Kinematikkens grundbegreber skulle være velkendte fra fysikundervisningen, men vi repeterer dem alligevel kort:

En genstands position til tiden t beskrives ved tallet $s(t)$ - den såkaldte *stedfunktion*. Idet s er en funktion af t, tager vi højde for, at genstanden kan bevæge sig.

Genstandens *hastighed* til tiden t betegnes med $v(t)$, og vi har, at $v(t) = s'(t)$

Genstanden *acceleration* til tiden t betegnes med $a(t)$, og vi har, at $a(t) = v'(t) = s''(t)$

Integralregningen kommer ind i det øjeblik, vi kender en genstands hastighed eller acceleration, og vi ønsker at finde dens stedfunktion. Som et eksempel betragter vi *det frie fald*:

Idet frie fald betegner $s(t)$ genstandens højde over jordoverfladen. Det er en eksperimentel kendsgerning, at en genstand i et frit fald udsættes for en konstant nedadrettet acceleration, $-g$. I Danmark er g=9,82 m/s^2.

Vi har altså, at $a(t)=-g$. Integrerer vi, fås, at

$$v(t) = \int a(t)dt = -gt + k = -gt + v_0, \text{ hvor } v_0 = v(0).$$

Integrerer vi igen, fås

$$s(t) = \int v(t)dt = \int (-gt + v_0)dt = -\tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t + l = -\tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0$$

hvor nu $s_0 = s(0)$ er begyndelsespositionen.

Denne formel skulle gerne være velkendt fra fysik!

1.9 Blandede opgaver

9.1 Find den stamfunktion til funktionen f med forskriften

$$f(x) = x^2 + 2x + 5$$

hvis graf går gennem punktet (1,1).

9.2 Bestem følgende ubestemte integraler:

a) $\int (x^3 - 4x^2)dx$ b) $\int (x^{1/2} - 2x^{-1/2})dx$

c) $\int (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})dx$ d) $\int (x+2)^8 dx$

e) $\int (2x+1)^4 dx$ f) $\int x^2(x^3+1)^2 dx$

g) $\int \frac{dx}{(7x-2)^3}$ h) $\int \frac{x^2}{(6x^3-8)^6}dx$

i) $\int \frac{(\ln x)^5 dx}{x}$ j) $\int \frac{\tan 2x}{\cos^4 2x}dx$

k) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}dx$ l) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

m) $\int \cos^2 x \cdot \sin x dx$ n) $\int \ln(x+3)dx$

9.3 I det følgende betegner f en differentiabel funktion med stamfunktion F.

a) Bevis formlen:

$$\int f(x)^2 dx = F(x)f(x) - \int F(x)f'(x)dx$$

b) Bestem

$$\int (\ln x)^2 dx$$

c) Bevis formlen

$$\int \sin^2 x\, dx = -\sin x \cdot \cos x + x - \int \sin^2 x\, dx$$

ved at benytte formlen fra a) og 'idiotformlen' : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

d) Udled af c), at $\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x) + k$.

e) Hvad er $\int \cos^2 x\, dx$?

9.4 Lad f og g være integrable funktioner, lad g være differentiabel, og lad F være en stamfunktion til f. Bevis formlen

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx = \frac{F(x)}{g(x)} + \int \frac{f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}dx$$

9.5 Bevis formlen

$$\int \tan x\, dx = -\ln|\cos x| + k$$

(Vink: Omskriv integranden til $\frac{\sin x}{\cos x}$ og brug substitution).

9.6 Bestem følgende ubestemte integraler:

a) $\int x\cos x dx$ b) $\int x\sin 5x dx$

c) $\int x^3\cos(x^2)dx$ d) $\int x^2 e^{-x^3}dx$

e) $\int x^3\cdot \ln x dx$ f) $\int \ln(x+1)dx$

g) $\int \ln(x^2)dx$ h) $\int x\ln(x^2)dx$

i) $\int (x^3e^x - x^{-3}e^{-x})dx$ j) $\int \ln(1+x^2)dx$

9.7 Bestem følgende ubestemte integraler:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$ b) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$

c) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$ d) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+1}}$

9.8 Beregn

a) $\int_0^2 x\,dx$ b) $\int_{-1}^2 x\,dx$

c) $\int_0^{5\pi}\sin x\,dx$ d) $\int_{-2}^2 (x^3-x)dx$

e) $\int_0^2 (4x^2+5)dx$ f) $\int_1^3 (4x^3-3x^2+2x-10)dx$

g) $\int_3^5 (7-2x)dx$ h) $\int_2^4 (x+\sqrt{x})dx$

9.9 Beregn nedenstående integraler. Benyt indskudsreglen et passende antal gange:

a) $\int_0^{2\pi}|\sin x|dx$ b) $\int_{-\pi}^{\pi}|\cos x|dx$

c) $\int_{-2}^{2} |2x| dx$ d) $\int_{0}^{2\pi} (2|\cos x| + 3|\sin x|) dx$

9.10 Beregn nedenstående integraler:

a) $\int_{0}^{1} x^3 dx$ b) $\int_{-1}^{1} x^4 dx$ c) $\int_{0}^{1} (x^3 + 3x - 2) dx$

d) $\int_{4}^{9} \sqrt{x} dx$ e) $\int_{1}^{8} \sqrt[3]{x} dx$ f) $\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2} dx$

g) $\int_{1}^{2} \frac{1}{x} dx$ h) $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^2}$ i) $\int_{0}^{\pi/2} \sin x dx$

j) $\int_{4}^{4} (\sqrt{\tan x} - e^{\sin x}) dx$ k) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx$

9.11 Betragt punktmængden afgrænset af kurverne med ligningerne

$$y = \sin x \qquad y = 2x \qquad \text{og} \qquad y = \frac{\pi}{2}$$

a) Tegn punktmængden.
b) Beregn arealet af punktmængden.

9.12 En guldmine producerede i år 1900 årligt 10 tons guld. Denne produktion vokser med 1% årligt. Hvor meget guld er det i alt produceret i perioden fra 1900 til 1993?

9.13 En bils hastighed måles hvert 5. sekund. Resultaterne er i nedenstående tabel, hvor tiden t er angivet i sekunder og hastigheden v i m/s.

t	0	5	10	15	20	25	30	35	40
v	33,3	29,5	26,2	23,2	20,6	18,3	16,2	14,4	12,8

Hvor langt kører bilen i løbet af de 40 sekunder?

9.14 Approximér integralet

$$\int_{0}^{\pi/3} 2\cos x dx$$

ved at beregne trapezsummen T_5.
Sammenlign med integralets eksakte værdi.

9.15

a) Tegn grafen for funktionen f med forskriften

$$f(x) = \frac{1}{1 + \sin^2 x}$$

b) Approximér integralet

$$\int_0^{\pi} f(x)dx$$

ved at beregne T_4.

c) Beregn S_4 for det samme integral.

9.16 Man kan bevise, at

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx = \pi$$

Beregn en tilnærmet værdi til π ved at beregne T_{10} for integralet ovenfor.

9.17 **Stirling's formel**

Stirling's formel bruges til at approximere $n!$ for store værdier af tallet *n*. Formlen siger, at

$$n! \approx \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n}$$

når *n* er stor.
Vi nøjes her med at bevise en lidt svagere udgave af formlen.

a) Skitsér grafen for funktionen $f(x) = \ln x$

b) Beregn integralerne

$$\int_1^n \ln x\,dx \qquad \text{og} \qquad \int_1^{n+1} \ln x\,dx$$

eksakt.

c) Vis uligheden

$$n\ln n - n + 1 \;\leq\; \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + ... + \ln n \;\leq\; (n+1)\ln(n+1) - n$$

ved at benytte, at funktionen *f* er voksende, og ved at beregne en højresum for det første integral i b) og en venstresum for det andet integral.

d) Omskriv uligheden til

$$\frac{n^n}{e^{n+1}} \leq n! \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$$

9.18 De såkaldte Fresnel integraler optræder indenfor geometrisk optik:

$$C(1) = \int_0^1 \cos(\tfrac{\pi}{2}x^2)dx \qquad \text{og} \qquad S(1) = \int_0^1 \sin(\tfrac{\pi}{2}t^2)dt$$

Bestem en approximation for $C(1)$ og $S(1)$ ved at beregne en Simpson-sum med $n = 5$

9.19

a) Bevis ved substitutionen $t = \sin x$, at

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$$

b) Bevis, at

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

c) Bestem

$$\int \arcsin x \, dx$$

(Vink: Partiel integration - differentiér $\arcsin x$ og integrer et usynligt 1-tal).

d) Bevis på samme måde, at

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x \,.$$

e) Bestem

$$\int \arctan x \, dx$$

9.20 Funktionen *f* er bestemt ved $f(x) = e^{|x|}$.
Bestem den stamfunktion *F* til *f*, som opfylder, at $F(\ln 3) = 1$

Facitliste

1.2: x^4+2 **1.3:** $\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{4}{3}$, $x>0$

1.4: $\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}$ **1.5:** x^3+4 og x^3

1.6: $L(x)=-\frac{1}{x}+3$, $x>0$ **1.7:** $M(x)=\frac{1}{x}+\frac{3}{2}$, $x<0$

2.1:
a) $4x^2-3x+k$ b) $-\frac{3}{4}x^4+2x^2+5x+k$
c) $\frac{1}{2}x^4-\frac{5}{3}x^3-x^2-4x+k$ d) $-5x^{-1}-2x^{-2}+\frac{2}{3}x^3+k$
e) $\frac{2}{3}x\cdot\sqrt{x}+\frac{3}{4}x\cdot\sqrt[3]{x}+\frac{4}{5}x\cdot\sqrt[4]{x}+k$ f) $\frac{2}{5}x^{5/2}+\frac{3}{7}x^{7/3}-\ln x+k$
g) $-\cos x+2\sin x+k$ h) $\tan x+x^2+k$
i) $-5x^{-1}+\sin x+\tan x+k$ j) $3e^x+\frac{1}{3}e^{3x}+k$
k) $\frac{1}{2}\sin(2x)-\frac{1}{3}\cos(3x)+\frac{4}{3}x\sqrt{x}+k$ l) $\dfrac{4^x}{\ln 4}+6\sqrt{x}+k$
m) $2x\sqrt{x}+6\sqrt{x}+k$ n) $e^x+\dfrac{x^{e+1}}{e+1}+k$
o) $\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3+k$ p) $\frac{1}{2}x^2-x^{-1}+k$
q) $2\sqrt{x}+\frac{4}{3}x\sqrt{x}+k$ r) $\frac{3}{4}x^{4/3}+3x^{2/3}+k$

2.2:
a) $-x\cdot\cos x+\sin x+k$ b) $x\cdot\sin x+\cos x+k$
c) $-x^2\cos x+2x\cdot\sin x+2\cos x+k$ d) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+k$
e) $\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+k$ f) $2\sqrt{x}\cdot\ln x-4\sqrt{x}+k$
g) $x(\ln x)^2-2x\cdot\ln x+2x+k$

2.3:
a) $\frac{1}{28}(4x-1)^7+k$ b) $\frac{1}{4}(x+5)^4+k$ c) $-\frac{1}{8}(8x-3)^{-1}+k$
d) $\frac{2}{3}(x^2+3)^{3/2}+k$ e) $-\cos(x^2)+k$ f) $\frac{1}{2}e^{x^2}+k$
g) $-\frac{1}{3}(x^3+1)^{-3}+k$ h) $\frac{1}{3}\sin^3 x+k$ i) $-e^{\cos x}+k$
j) $\frac{1}{2}\ln(|x^2+2x+1|)+k=\ln(|x+1|)+k$
k) $\frac{1}{13}(x^3+2x^2+2x+6)+k$

2.4:
a) $-\sqrt{1-x^2}+k$ b) $-x\cdot e^{-x}-e^{-x}+k$
c) $\frac{2}{3}x(x-2)^{3/2}-\frac{4}{15}(x-2)^{5/2}+k$ d) $-\frac{1}{8}\cos(4x^2)+k$
e) $\frac{2}{3}(x+2)^{3/2}+k$ f) $\frac{1}{2}e^{x^2+2x}+k$
g) $\frac{1}{3}(x+1)^2e^{3x}-\frac{2}{9}(x+1)e^{3x}+\frac{2}{27}e^{3x}+k$
h) $\dfrac{x-3}{3}\cos(3x)-\dfrac{1}{9}\sin(3x)+k$ i) $-\frac{1}{8}x\cdot\cos(8x)+\frac{1}{64}\sin(8x)+k$
j) $\sin(\tan(x))+k$ k) $\frac{1}{3}(x^3\ln(x^3)-x^3)+k$

m) $\frac{2}{3}x\sqrt{3x-1}-\frac{4}{27}(3x-1)^{3/2}+k$ n) $-\frac{1}{2}e^{3-x^2}+k$

o) $\frac{1}{6}(\ln x)^6+k$ p) $-\frac{1}{3}\cos(x^3-1)+k$

q) $\frac{1}{3}x(1-x)^{-3}-\frac{1}{6}(1-x)^{-2}+k$ r) $-\frac{2}{\sqrt{x}\ln x}-\frac{4}{\sqrt{x}}+k$

s) $-\frac{1}{4}\ln(x^4-8x^2-6)+k$ t) $2e^{\sqrt{x}}+k$

2.5: b) $\frac{1}{2}x^2-2x+3\ln(|x+1|)+k$, $x>-1$ eller $x<-1$

c) $x^2-5x+16\ln(|x+3|)$, $x<-3$ eller $x>-3$

$\frac{1}{3}x^3+x+k$, $x>-1$ eller $x<-1$

2.6: b) $\ln(|x-2|)+\ln(|x+3|)$

c) $a=2$ $b=1$ $2\ln(|x+1|^2)+\ln(|x+3|)+k$

d) 2, −1, −1 $a=3$ $b=-2$ $c=1$

$3\ln(|x+1|)+\frac{2}{x+1}+\ln(|x-2|)$

3.1: a) 9 b) -24 c) 1 d) $\ln 3$

e) $\frac{1}{2}(e^2-1)$ f) $\frac{33}{2}$ g) $\frac{45}{2}$ h) $\frac{3124}{5}$

i) $\frac{14}{3}$

3.2: a) 0 b) 4 c) -1 d) -5 e) -3 f) -4

3.3: a) $\frac{8}{9}e^9+\frac{1}{9}$ b) $e+\frac{1}{e}$ c) $4\ln 2-\frac{15}{16}$

d) $1-\frac{2}{e}$ e) -2π f) -4π

3.4: a) $\frac{1}{18}$ b) $-\frac{5}{468}$ c) 0 d) $8\sqrt{3}$

e) $\frac{1}{2}$ f) 9 g) $\frac{64}{3}$ h) 1

3.5: a) $\frac{1}{3}(e^{27}-1)$ b) $5e^3-e$ c) $\frac{\ln 2+2}{2\sqrt{2}}-1$

d) $-\frac{1}{90}$ e) $e-2$ f) $-\ln 3$

3.6: 2 **3.7:** 6 og 0 **3.8:** 4/3

3.9: a) 9 b) 32 c) 8

4.1: a) 15 b) 4 c) $e-1$

d) $\frac{16}{3}$ e) 6 f) $3(e^3-1)$

4.2: a) 4 b) $\frac{64}{3}$ c) $\frac{e^4}{2}+e+\frac{3}{2e^2}-3$ d) 9 e) $\frac{71}{6}$

4.4: b) $1-te^{-t}-e^{-t}$ c) 1

5.2: 1,782039 1,462039 1,6032107 1,622039 1,6094868

5.3: a) 13,75

6.1: a) 228π b) $\frac{1}{2}\pi(e^2-1)$ c) $\frac{72}{5}\pi$

d) 8π e) $\frac{112}{3}\pi$ f) $\frac{3}{2}\pi(e^6-1)$

6.2: a) $\frac{84}{5}\pi$ b) $\frac{1024}{5}\pi$ c) $\pi(\frac{e^8}{4}+\frac{e^2}{2}-\frac{3e^{-4}}{4})$

d) $\frac{153}{5}\pi$ e) $\frac{6976}{105}\pi$

6.3: a) $\frac{128}{3}\pi$ b) $\frac{4096}{9}\pi$ c) $\frac{32}{5}\pi$

Kapiteloversigt

Det ubestemte integral

$\int f(x)\,dx = F(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$

$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$ $\qquad$ $\int s \cdot f(x)\,dx = s \cdot \int f(x)\,dx$

$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$ (partiel integration)

$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + k$ (integration ved substitution)

Det bestemte integral

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ (indskudsreglen)

$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\,dx = [F(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b F(x) \cdot g'(x)\,dx$ (partiel integration)

$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt = [F(t)]_{g(a)}^{g(b)}$ (substitution)

Numerisk integration

$$V_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i),\; H_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i),\; M_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(m_i)$$

$$T_n = \frac{b-a}{2n}\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_i) + f(x_{i+1})) = \frac{1}{2}(V_n + H_n)$$

Arealbestemmelse

Arealet af punktmængden $\{(x,y) \mid a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$ er $\int_a^b f(x)\,dx$

Arealet af mængden

$\{(x,y) \mid a \le x \le b, g(x) \le y \le f(x)\}$ er $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$

Volumet af omdrejningslegemet fremkommet ved at rotere grafen for f i intervallet $[a;b]$ om x-aksen er $\int_a^b \pi (f(x))^2\,dx$.

Nogle almindelige integraler

$$\int x^n dx = \tfrac{1}{n+1} x^{n+1} + k$$ forudsat $n \neq -1$

$$\int x^{-1} dx = \ln|x| + k$$

$$\int \sqrt{x} dx = \tfrac{2}{3} x\sqrt{x} + k$$

$$\int e^x dx = e^x + k$$

$$\int e^{ax} dx = \tfrac{1}{a} e^{ax} + k$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + k$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + k$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + k$$

$$\int \cos x dx = \sin x + k$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + k$$

$$\int (1 + \tan^2 x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + k$$

$$\int \sin^2 x \, dx = \tfrac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x) + k$$

$$\int \cos^2 x \, dx = \tfrac{1}{2}(x + \sin x \cdot \cos x) + k$$