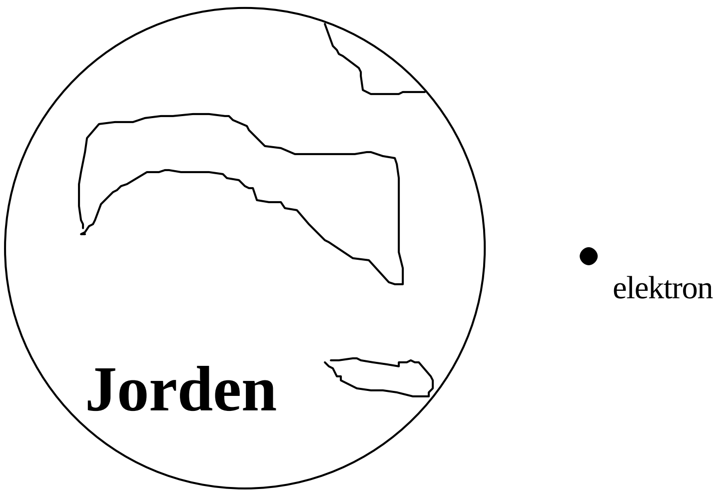
Matematikkens mysterier

- på et obligatorisk niveau

af

Kenneth Hansen

1. Basis



Hvor mange elektroner svarer Jordens masse til?

1. Basis

1.0 Indledning

Matematik er et sprog. I modsætning til dansk er det et sprog, som er godt til at udtrykke størrelser med.

Når man skal lære et sprog, så er en af de første ting, man skal lære, grammatik. Du har sikkert allerede lært meget af matematikkens grammatik i folkeskolen; men for en sikkerheds skyld er der i dette hæfte nogle opgaver, du kan bruge til at genopfriske din viden.

Kapitlerne 1,2,3,5 og 6 handler om tal, brøker, reduktioner, mængder, ligninger og uligheder. Dette ved du sikkert allerede; men læs det nu alligevel og regn nogle opgaver.

Kapitel 4 handler om nogle sværere reduktioner, som du nok ikke har hørt om før. I kapitel 7 indføres den videnskabelige talnotation, som bruges meget indenfor fag som fysik og kemi.

Gennem hele hæftet er der vist, hvordan du kan bruge sin lommeregner. Vi har kun vist det for to typer lommeregnere, nemlig **TI-30x** og **TI-68**. Det viser sig nemlig, at de fleste andre lommeregnere virker på næsten samme måde som disse to.

Bagerst i hæftet er der en facitliste til de fleste af opgaverne.

God arbejdslyst!

1.1 Tal

Du kender forhåbentligt reglerne for at regne med tal, så vi nøjes med at give de vigtigste regler:

1) Indmaden af funktioner, f.eks. kvadratrødder, udregnes før funktionen udregnes.
2) Parenteser udregnes først. Pas på med minus-parenteser.
3) Multiplikation og division udregnes før addition og subtraktion.
4) Når to størrelser adderes eller subtraheres, så kaldes de *led*. Når to størrelser multipliceres, så kaldes de *faktorer*.

Nogle eksempler er

a) $2+3\cdot 4=2+12=14$

b) $(2+3)\cdot 4=5\cdot 4=20$

c) $\sqrt{4}+6\cdot 3=2+18=20$

d) $\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$

e) $\sqrt{9}+\sqrt{16}=3+4=7$

Der findes 3 typer lommeregnere på markedet. Dels er der den velkendte slags, som f.eks. **TI-30x**, dels er der maskiner som **TI-68**, hvor man indtaster formlerne, som de skrives, og dels er der maskiner, som anvender *omvendt polsk notation*, f.eks. **HP-32S**. Den sidste type maskine vil ikke blive omtalt.

De 5 regnestykker ovenfor kan indtaste på de to maskiner som følger:

TI-30x

a) 2 $\boxed{+}$ 3 $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{=}$

b) $\boxed{(}$ 2 $\boxed{+}$ 3 $\boxed{)}$ $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{=}$

c) 4 $\boxed{\sqrt{x}}$ $\boxed{+}$ 6 $\boxed{\times}$ 3 $\boxed{=}$

d) $\boxed{(}$ 9 $\boxed{+}$ 16 $\boxed{)}$ $\boxed{\sqrt{x}}$

e) 9 $\boxed{\sqrt{x}}$ $\boxed{+}$ 16 $\boxed{\sqrt{x}}$ $\boxed{=}$

TI-68

a) 2 $\boxed{+}$ 3 $\boxed{\times}$ 4 $\boxed{=}$

b) $\boxed{(}\ 2\ \boxed{+}\ 3\ \boxed{)}\ \boxed{\mathrm{x}}\ 4\ \boxed{=}$

c) $\boxed{\sqrt{\ }}\ 4\ \boxed{+}\ 6\ \boxed{\mathrm{x}}\ 3\ \boxed{=}$

d) $\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{(}\ 9\ \boxed{+}\ 16\ \boxed{)}\ \boxed{=}$

e) $\boxed{\sqrt{\ }}\ 9\ \boxed{+}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ 16\ \boxed{=}$

Opgaver

1. Beregn følgende tal **uden** brug af lommeregner:

a) $1^2 + 4^2$ b) $(1+4)^2$

c) $8-(-3)$ d) $7\cdot(2-5)$

e) $3-(5-(2-(-3)))$ f) $1+2^2+3\cdot 2^3-8\cdot(2-4)$

g) $(1+2)^2+(3\cdot 2)^2-4$ h) $-1-(-1)^2-1\cdot(1-1-(-1))$

i) $-(-(-1)-11)-1$ j) $(8-2)^2-8-2$

k) $8-2^2-(8-2)$ l) $\sqrt{25+144}-(\sqrt{25}+\sqrt{144})$

m) $2^4-2^3-2^2-2$ n) $2^4-(2^3-(2^2-2))$

2. Beregn ovenstående tal **med** brug af lommeregner.

1.2 Brøker

En *brøk* kan enten skrives som et *blandet tal,* f.eks. $1\frac{1}{2}$ eller som en *uægte brøk*, f.eks. $\frac{3}{2}$**.** Det viser sig at være lettest at regne med uægte brøker, så matematikere foretrækker næsten altid at bruge uægte brøker fremfor blandede tal.

Omskrivning mellem brøker og blandede tal foregår som følger:

Opgave 1a:

$$1\frac{1}{2}=1+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Opgave 2a:

$$\frac{21}{4}=\frac{4\cdot5+1}{4}=\frac{4\cdot5}{4}+\frac{1}{4}=5+\frac{1}{4}=5\frac{1}{4}$$

For at finde ud af, at $21=4\cdot5+1$, kan man dividere 21 med 4 og opdage, at divisionen giver 5 med 1 som rest.

Brøker kan *forkortes* ved at **dividere** både tæller og nævner med det samme tal, og de kan *forlænges* ved at **gange** både tæller og nævner med samme tal. Normalt foretrækker man at forkorte en brøk mest muligt.

Opgave 3a:

$$\frac{22}{55}=\frac{22:11}{55:11}=\frac{2}{5}$$

Opgave 4a:

$$\frac{2}{3}=\frac{2\cdot9}{3\cdot9}=\frac{18}{27}$$

Advarsel

Man må kun forkorte ved at dividere, ikke ved at trække fra. F.eks. er følgende regnestykke **forkert**:

$$\frac{5}{4}=\frac{2+3}{1+3}=\frac{2}{1}=2$$

Her 'forkortede' man 3-tallet væk, og konsekvensen blev, at $\frac{5}{4}$=1,25 faktisk blev til 2. Altså, forkert!

Når man skal *addere* eller *subtrahere* brøker, så skal de to brøker forlænges, således at de får den samme nævner - en fællesnævner. Som fællesnævner kan man enten bruge mindste fælles multiplum mellem de to nævnere, eller man kan være doven og bare bruge produktet mellem de to nævnere:

Opgave 5a:

$$\frac{5}{7}+\frac{1}{7}=\frac{5+1}{7}=\frac{6}{7}$$

Her var vi heldige - brøkerne havde allerede den samme nævner.

Opgave 6b:

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}-\frac{2\cdot 1}{2\cdot 2}=\frac{3}{4}-\frac{2}{4}=\frac{3-2}{4}=\frac{1}{4}$$

Her brugte vi fællesnævneren 4.

Blandede tal bør omskrives til uægte brøker, før man går i gang:

Opgave 7a:

$$1\frac{1}{3}+2\frac{1}{3}=1+\frac{1}{3}+2+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}+\frac{1}{3}+\frac{6}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3+1+6+1}{3}=\frac{11}{3}$$

To brøker *multipliceres* ved at gange tællerne for sig og nævnerne for sig:

Opgave 8a:

$$3\cdot\frac{5}{6}=\frac{3}{1}\cdot\frac{5}{6}=\frac{3\cdot 5}{1\cdot 6}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$$

Opgave 8j:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 1}{3\cdot 3}=\frac{2}{9}$$

To brøker *divideres* ved 'at gange med den omvendte':

Opgave 9a:

$$\frac{1}{2}:2=\frac{1}{2}:\frac{2}{1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

Her blev brøken $\frac{2}{1}$ vendt om til $\frac{1}{2}$

Opgave 9u:

$$\frac{4}{7}:\frac{3}{2}=\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4\cdot 2}{7\cdot 3}=\frac{8}{21}$$

Brøker og lommeregnere

Nogle lommeregnere, f.eks. **TI-30x**, kan regne med brøker. Hertil bruges de tre knapper $\boxed{a\,{}^{b}/_{c}}$, $\boxed{d/c}$ og $\boxed{F \lhd\rhd D}$.

Knappen $\boxed{a\,{}^{b}/_{c}}$ bruges til indtastning at brøker (både ægte og uægte) og blandede tal:

$\frac{5}{3}$ indtastes ved : 5 $\boxed{a\,{}^{b}/_{c}}$ 3.

Lommeregnerens display viser nu 5⌟3.

$3\frac{2}{7}$ indtastes ved: 3 $\boxed{a\,{}^{b}/_{c}}$ 2 $\boxed{a\,{}^{b}/_{c}}$ 7.

Lommeregnerens display viser nu 3_2⌟7

Knappen $\boxed{d/c}$ bruges til at skifte mellem blandet tal og uægte brøk, mens $\boxed{F \lhd\rhd D}$ bruges til at skifte mellem blandet tal og decimalbrøk.

TI-68 kan ikke regne med brøker.

Opgaver

1. Skriv nedenstående som **uægte** brøker:

a) $1\frac{1}{2}$ b) $1\frac{1}{3}$ c) $2\frac{2}{3}$ d) $1\frac{5}{7}$ e) $2\frac{5}{6}$

f) $4\frac{3}{8}$ g) $3\frac{1}{4}$ h) $4\frac{1}{27}$ i) $1\frac{1}{11}$ j) $3\frac{2}{11}$

k) $6\frac{2}{5}$ l) $-1\frac{2}{9}$ m) $6\frac{2}{10}$ n) $3\frac{1}{7}$ o) $9\frac{3}{4}$

p) $7\frac{7}{16}$ q) $11\frac{5}{23}$ r) $26\frac{7}{23}$ s) $11\frac{4}{15}$ t) $6\frac{2}{5}$

2. Skriv nedenstående som **blandede tal**:

a) $\frac{21}{4}$ b) $\frac{7}{3}$ c) $\frac{7}{4}$ d) $\frac{30}{7}$ e) $\frac{11}{9}$

f) $\frac{13}{11}$ g) $\frac{17}{12}$ h) $\frac{39}{9}$ i) $\frac{120}{13}$ j) $\frac{121}{11}$

k) $\frac{161}{14}$ l) $\frac{19}{11}$ m) $\frac{27}{4}$ n) $\frac{15}{4}$ o) $\frac{28}{7}$

p) $\frac{125}{5}$ q) $\frac{43}{17}$ r) $\frac{19}{7}$ s) $\frac{45}{6}$ t) $-\frac{9}{3}$

3. Forkort følgende brøker mest muligt:

a) $\frac{22}{55}$ b) $\frac{8}{2}$ c) $\frac{21}{14}$ d) $\frac{24}{9}$ e) $\frac{121}{11}$

f) $\frac{30}{25}$ g) $-\frac{18}{12}$ h) $\frac{24}{16}$ i) $\frac{7}{5}$ j) $\frac{6}{18}$

k) $\frac{16}{24}$ l) $\frac{12}{16}$ m) $\frac{3}{33}$ n) $\frac{115}{75}$ o) $\frac{129}{13}$

p) $\frac{14}{49}$ q) $\frac{32}{48}$ r) $\frac{26}{8}$ s) $\frac{35}{15}$ t) $\frac{6}{99}$

4. Forlæng nedenstående brøker, så de får den nævner, der angives:

a) $\frac{2}{3}$, nævner =27 b) $\frac{6}{8}$, nævner =24 c) $\frac{1}{2}$, nævner =66

d) $\frac{5}{7}$, nævner =28 e) $\frac{4}{9}$, nævner =36 f) $\frac{4}{16}$, nævner =48

5. a) $\frac{5}{7}+\frac{1}{7}$ b) $\frac{11}{17}+\frac{3}{17}$ c) $\frac{3}{7}-\frac{2}{7}$ d) $\frac{7}{11}-\frac{5}{11}$

e) $\frac{5}{12}+\frac{3}{12}$ f) $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}$ g) $\frac{10}{13}-\frac{5}{13}$ h) $\frac{8}{9}-\frac{6}{9}$

i) $\frac{1}{6}+\frac{3}{6}$ j) $\frac{3}{10}+\frac{5}{10}$ k) $\frac{7}{9}-\frac{1}{9}$ l) $\frac{10}{12}-\frac{6}{12}$

6. a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$ c) $\frac{4}{6}-\frac{1}{3}$ d) $\frac{5}{7}+\frac{1}{2}$

e) $\frac{3}{4}-\frac{1}{3}$ f) $\frac{7}{9}-\frac{1}{3}$ g) $\frac{11}{12}+\frac{1}{3}$ h) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$

i) $\frac{3}{8}+\frac{1}{4}$ j) $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$ k) $\frac{4}{7}+\frac{2}{3}$ l) $\frac{7}{9}+\frac{1}{2}$

m) $\frac{2}{3}-\frac{2}{9}$ n) $\frac{5}{9}-\frac{3}{4}$ o) $\frac{1}{5}-\frac{2}{3}$ p) $\frac{6}{9}-\frac{1}{6}$

q) $\frac{3}{7}+\frac{14}{9}$ r) $\frac{5}{12}-\frac{14}{19}$ s) $\frac{5}{9}+\frac{10}{3}$ t) $\frac{5}{12}-\frac{6}{7}$

7. a) $1\frac{1}{3}+2\frac{1}{3}$ b) $3\frac{3}{4}-2\frac{2}{4}$ c) $1\frac{1}{6}+3\frac{1}{3}$

d) $4\frac{3}{7}-1\frac{1}{3}$ e) $2-\frac{1}{8}$ f) $3-\frac{7}{8}$

g) $2\frac{1}{4}+\frac{2}{6}$ h) $1\frac{1}{3}-\frac{2}{3}$ i) $\frac{7}{8}+1\frac{1}{2}$

j) $2\frac{1}{2}+1\frac{1}{3}$ k) $5\frac{1}{2}-1\frac{3}{4}$ l) $1\frac{5}{8}-\frac{3}{4}$

8. a) $3\cdot\frac{5}{6}$ b) $4\cdot\frac{5}{16}$ c) $\frac{1}{3}\cdot 9$ d) $2\cdot\frac{7}{12}$

e) $\frac{5}{6}\cdot 3$ f) $\frac{8}{9}\cdot 3$ g) $\frac{7}{12}\cdot 6$ h) $8\cdot\frac{1}{24}$

i) $\frac{17}{20}\cdot 4$ j) $\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$ k) $\frac{3}{7}\cdot\frac{14}{19}$ l) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$

m) $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{11}$ n) $\frac{3}{7}\cdot\frac{14}{9}$ o) $\frac{5}{12}\cdot\frac{18}{20}$ p) $\frac{3}{11}\cdot\frac{22}{3}$

q) $\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{10}$ r) $\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{7}$ s) $1\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$ t) $2\frac{1}{4}\cdot 1\frac{1}{2}$

u) $\frac{2}{3}\cdot 2\frac{2}{3}$ v) $\frac{7}{8}\cdot 1\frac{1}{2}$ w) $3\frac{1}{2}\cdot 3\frac{1}{2}$ x) $4\frac{1}{3}\cdot 1\frac{3}{4}$

9.

a) $\frac{1}{2}:2$ b) $\frac{1}{3}:2$ c) $\frac{2}{3}:3$ d) $\frac{1}{4}:3$

e) $\frac{3}{7}:3$ f) $\frac{4}{9}:2$ g) $\frac{3}{4}:7$ h) $\frac{5}{9}:4$

i) $\frac{6}{11}:3$ j) $2:\frac{1}{2}$ k) $3:\frac{1}{2}$ l) $4:\frac{1}{2}$

m) $5:\frac{1}{3}$ n) $7:\frac{2}{3}$ o) $5:\frac{3}{5}$ p) $8:\frac{1}{4}$

q) $6:\frac{2}{3}$ r) $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$ s) $\frac{2}{3}:\frac{1}{3}$ t) $\frac{5}{6}:\frac{2}{3}$

u) $\frac{4}{7}:\frac{3}{2}$ v) $\frac{5}{9}:\frac{3}{4}$ w) $\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$ x) $\frac{7}{9}:\frac{3}{2}$

y) $\frac{1}{5}:\frac{2}{3}$ z) $2\frac{1}{2}:1\frac{1}{3}$ æ) $1\frac{2}{3}:1\frac{1}{2}$ ø) $2\frac{2}{3}:\frac{3}{4}$

å) $5\frac{1}{2}:1\frac{1}{2}$ ♥) $1\frac{5}{8}:\frac{3}{4}$ ♦) $\frac{7}{3}:1\frac{1}{2}$ ♠) $3\frac{5}{11}:\frac{7}{11}$

1.3 Reduktioner

Man regner med bogstaver ganske som med tal, dvs. at de samme regler gælder. Det er jo heller ikke så underligt, idet bogstavregning faktisk er regning med tal; vi kender bare ikke tallene, så derfor skriver vi x eller a i stedet for!

Opgave 1a:

$$3a+2b-5+a+b-2b=4a+b-5$$

Ved sammentrækning af lange udtryk som dette er det en god idé at understrege de led, man har brugt. På den måde glemmer man ikke noget.

Plus-parenteser kan man uden videre hæve, mens man skal ændre **alle** fortegn i indmaden, når man hæver en minus-parentes:

Opgave 2a:

$$\begin{aligned}&3x+(x+2y)-(2x+7y)+2y=\\&3x\ \ +x+2y\ \ \ -2x-7y\ \ \ +2y=\\&2x-3y\end{aligned}$$

Den første parentes er en plus-parentes, så den hæves uden videre. Den anden parentes er en minus-parentes, så der skal begge leddene have ændret fortegn.

Er der flere parenteser inde i hinanden, så skal man starte med at hæve dem indenfra:

Opgave 3a:

$$\begin{aligned}&20x-(x+2y-(-y-(2x-4y)-3y)+x+16y)=\\&20x-(x+2y-(-y\ \ -2x+4y\ \ -3y)+x+16y)=\\&20x-(x+2y\ \ \ \ +y\ \ +2x-4y\ \ +3y\ \ +x+16y)=\\&20x\ \ -x-2y\ \ \ \ -y\ \ -2x+4y\ \ -3y\ \ -x-16y\ \ =\\&16x-18y\end{aligned}$$

Det er en god idé at skrive det samme led under hinanden (på ternet papir) - man kan så lettere se, hvad der sker, og finde eventuelle fortegnsfejl.

Man ganger en flerleddet størrelse med et tal ved at gange tallet med hvert enkelt led.

Opgave 4a:

$$7(4a-3)=7\cdot 4a-7\cdot 3=28a-21$$

Man ganger to flerleddede størrelser med hinanden ved at gange **hvert** led i den første flerleddede størrelse med **hvert** led i den anden flerleddede størrelse.

Opgave 5a:

$$(a+3)(2a-2)=a\cdot 2a-a\cdot 2+3\cdot 2a-3\cdot 2=$$
$$2a^2-2a+6a-6=2a^2+4a-6$$

For *kvadrater på toleddede størrelser* gælder følgende regler:

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$$
$$(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$$

Opgave 6a:

$$(a+1)^2=a^2+1^2+2\cdot a\cdot 1=a^2+1+2a=a^2+2a+1$$

Den sidste omskrivning er egenligt ikke nødvendig; men man plejer at placere leddene efter faldende potens, dvs. a^3-leddet før a^2-leddet før a-leddet før tal-leddet.

Man skal passe lidt på:

Opgave 6m:

$$(5a+6)^2=(5a)^2+6^2+2\cdot 5a\cdot 6=25a^2+36+60a=25a^2+60a+36$$

Bemærk, at det første led er 5*a*, og at hele dette led (også 5-tallet) skal sættes i anden potens.

Advarsel

> 'Reglen' $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ gælder **ikke**. Man **skal** huske det dobbelte produkt, dvs. leddet $2ab$.

Den sidste regel i denne omgang er reglen om *to tals sum gange de samme to tals differens*:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Opgave 7a:

$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1^2$$

De tre sidste regler gælder **også** for tal:

Opgave 8a:

$$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1) = (\sqrt{3})^2 - 1^2 = 3-1 = 2$$

men det er ikke altid, man får et pænt tal:

Opgave 8c:

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 + 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = 2+3+2\sqrt{6} = 5+2\sqrt{6}$$

Opgaver

Reducér nedenstående udtryk mest muligt:

1.

a) $3a+2b-5+a+b-2b$ b) $-x+2y+15-3x+2y-6$
c) $6g-2h-10h+3+4g-6$ d) $-3x+4+5x-10$
e) $7a+6b-11+2b-8a-4b$ f) $-6-8y-13x+16+4y$
g) $9t+5u+28+11t+13u$ h) $14a-25b+30-10b-5-30a$
i) $27p+15-6q-3-2p+8q$ j) $7a+b+2-3a-3b-4$
k) $4x^2-6x^2+10x^2-7x^2$ l) $5xy^2+6xy^2-3xy^2-7xy^2$
m) $3a^2b+8a^2b+7a^2b-10a^2b$ n) $3x+2x^2-6-6x^2+4x-8x^3$

2. a) $3x+(x+2y)-(2x+7y)+2y$
b) $(9c+5d)-4c+(2c-3d)-(3c-8d)$
c) $(3a+4b)+(6c-a)-(3c+a+2b)$
d) $8a-(5a+4b)+2a+(5a-4b)-(3a-6b)$
e) $(18a+6b)-(4b-c)-(17a+b)-(-a-4b)$
f) $-(7p-5)+(13-26p)-(-5p)$
g) $-13x+18y-(-6x+9y-25)+(-15)$
h) $(8s-5+2t)-(-5+8s+2t)-4$
i) $-(-5a)+(6-8a+10b)-(3+25a-8b)$
j) $45p-(16-8p+3q)-(-4q)+(6-25p)$

3. a) $20x-(x+2y-(-y-(2x-4y)-3y)+x+16y)$
b) $-(-(a-b)-(-a+b-6a))$
c) $-7a-(-(-a-2b)-3a+4b-(-b-a))$
d) $2x-(y+x-3z-(3z+y)+y-(y+2x)+6x)$
e) $3x-(y+x-(2x+4y)-(-4x-3y))$
f) $x+y-(z-(x-y+z))$
g) $5ab-(2c-(-3a+2b)-(ab+2a)-3b)+ab$

4. a) $7(4a-3)$
b) $8(3a+b+4)$
c) $5(5x-3y+6)$
d) $2a(4b+2c)$
e) $7x(4y+2)$
f) $-4(3b-c)$
g) $7(4x-y)$
h) $3(a+2b)-4(2a-b)$
i) $-2(-x+y)+3(y-x)$
j) $-1(a+2b)-2(3a-b)$
k) $2(b-c+d)$
l) $n(a-b-c)$
m) $x(2+y-z-u)$
n) $a(b-c)+2a(b+c)$
o) $x(4a-b-c)-3x(-a+b+c)$
p) $4(a+7)+3(2a-12)-2(4a-4)$
q) $6(a+b-3)-3(2a-b)-4(-3a-3)$
r) $a(x+y-5)-x(a+b)-2a(2a-1)$
s) $a(x+y)-2a(-2x-y-4)-3a(y+1)$
t) $y(a+b)+x(a+b)-a(y-x)-b(y+x)$
u) $x(x^2+5)$
v) $2x^2(1+x)$
w) $x(3x+5)-x^2(x+2)+(x+2x)x$

5.

a) $(a+3)(2a-2)$
b) $(3a+6)(2b-4)$
c) $(-2+4x)(4x+2)$
d) $(5-2p)(-2+3p)$
e) $(4a-2)(3-2a)$
f) $(3c-4d)(2c-3d)$
g) $(5a+3b-2)(2a-3b)$
h) $(6p-q+1)(p-q)$
i) $(5x-2y+8)(3-2x-y)$
j) $(6-5t+2u)(6-4t)$
k) $(2+a)(4+b)$
l) $(a+3)(b-2)$
m) $(2x-1)(y-5)$
n) $(x-y)(2-a)$
o) $(a+b)(x-y)-b(x-y)$
p) $(2a+5b)(3c+2d)-2(2ad+5bd)$
q) $(4a-2b)(3x-6y)-6a(2x-4y)$
r) $7(2a-3b)-5(-4a+b)+3(-2a-4b)$
s) $12a(4b+c)+4b(6c-3a)-3c(4a+8b)$
t) $x(a-b)-y(-a+b)-a(x+y)-b(-x-y)$
u) $5a(b-c)-(6a+b)(2b-c)$
v) $5(2a-b+c)+8(a+3b-c)$
w) $x^3(x^2-x)-(x^2+1)(x^2-x)-x^2+x$
x) $7x(x+3x^2)-x^2(2-3x)$

6.

a) $(a+1)^2$
b) $(a-4)^2$
c) $(5a+3b)^2$
d) $(-a-2)^2$
e) $(3a+2b)^2$
f) $(7c+3d)^2$
g) $(4a-3b)^2$
h) $(6a-5b)^2$
i) $(4x-5y)^2$
j) $(a-2b)^2$
k) $(-x+2)^2$
l) $(\frac{1}{2}x+2y)^2$
m) $(5a+6)^2$
n) $(5-3b)^2$
o) $(-4+2x)^2$
p) $(-a-b)^2$
q) $(a-bc)^2$
r) $(ab+cd)^2$
s) $(ab+xy)^2$
t) $(2xy-a)^2$
u) $(3ab-xy)^2$
v) $(6ax+4by)^2$
w) $(6xy+3y)^2$
x) $(3a+2a^2)^2$
y) $(2a+b)^2-(2a-b)^2$
z) $(x-1)^2+(y+1)^2-(x+y)^2$
æ) $2(x+1)^2-(2x+1)^2$
ø) $(2q+5)^2+(5q-2)^2$

7.

a) $(x-1)(x+1)$

b) $(7a+5)(7a-5)$

c) $(i+j)(i-j)$

d) $(2x-4)(2x+4)$

e) $(-3x+2)(3x+2)$

f) $(5a+b)(5a-b)$

g) $(7x+2a)(7x-2a)$

h) $(2u-3q)(2u+3q)$

i) $(-6y+4x)(6y+4x)$

j) $(-3n-4p)(3n-4p)$

k) $(9p-6k)(9p+6k)$

l) $(3a+3b)(3a-3b)$

m) $(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$

n) $(ax+by)(ax-by)$

o) $(2ab+5xy)(2ab-5xy)$

p) $(4ab-6bz)(4ab+6bz)$

q) $(abx+bzv)(abx-bzv)$

r) $(a^2b+xy^2)(a^2b-xy^2)$

s) $(3x^2b^2+az^2)(3x^2b^2-az^2)$

t) $(a+b)(a-b)-a^2-b^2$

u) $(2a+b)^2-(4a^2+b^2)$

v) $(3x-y)^2+(4x+y)(4x-y)$

w) $(6a-2b)^2+(a+2b)(a-2b)$

x) $(a+b)(a+b-c)-(a+b)^2$

8.

a) $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)$

b) $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$

c) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$

d) $(\sqrt{5}-2\sqrt{2})^2$

e) $(7\sqrt{2}-2\sqrt{7})^2$

f) $(\sqrt{3}-3\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{5})$

1.4 Flere reduktioner

I dette kapitel skal du lære om to slags specielle reduktioner: Faktoriseringer og reduktion af brøker.

Faktorisering er nærmest det modsatte af de sædvanlige reduktioner. Hvor man normalt ganger ind i parenteser, skal man ved faktorisering sætte udenfor parenteser. Det er ikke så let som almindelig reduktion, og faktoriseringer kræver, at man tænker sig om og prøver sig frem.

Opgave 1a:

$$2x+4=2(x+2)$$

Her er 2-tallet den eneste fælles faktor i de to led.

Opgave 2a:

$$a(x+y)-b(x+y)=(a-b)(x+y)$$

Her er faktoren $(x+y)$ fælles for de to led.

Opgave 2k:

$$8xu-12yu+10xv-15yv=(8x-12y)u+(10x-15y)v=$$
$$4(2x-3y)u+5(2x-3y)v=(4u+5v)(2x-3y)$$

Her er tricket at sætte u og v udenfor først og se, hvad de to faktorer $8x-12y$ og $10x-15y$ har til fælles.

Opgave 3a:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

To tals sum gange to tals differens.

Ved reduktion af brøker gælder de samme regler som ved tal-brøker. Specielt:

Når man forkorter en brøk, så skal det være **faktorer**, man forkorter væk.

Opgave 4a:

$$\frac{3a+3b}{3a-3b}=\frac{3(a+b)}{3(a-b)}=\frac{a+b}{a-b}$$

Det er en god idé af faktorisere tælleren og nævneren, før man fortsætter.

Det er **forkert** at 'forkorte' et led væk:

$$\frac{x+2}{x+3}=\frac{2}{3}$$

hvilket jo nok giver et pænt resultat - men resultatet er **forkert**. Man må **ikke** forkorte leddet x væk. Man kan f.eks. se, at dette er forkert ved at sætte x=1:

$$\frac{3}{4}=\frac{1+2}{1+3}=\frac{x+2}{x+3}\neq\frac{2}{3}$$

Når man adderer brøker, så skal man finde en fællesnævner:

Opgave 5a:

$$\frac{a}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4a}{12}+\frac{3}{12}=\frac{4a+3}{12}$$

Opgave 5c:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{b}{ab}+\frac{a}{ab}=\frac{b+a}{ab}$$

Som hovedregel er det lettest at lade produktet af nævnerne være fællesnævneren.

Opgaver

Faktorisér følgende udtryk:

1. a) $2x+4$ b) $6x+12$ c) $20+4x$ d) $x+x^2$
e) $ab+a$ f) $b+ab$ g) $2x+x^3$ h) $4x+x^4$
i) $16x^2+x^4$ j) $3x-3$ k) $12x-4$ l) $2x-2$
m) $4-16y$ n) $x-x^2$ o) $8b-ab$ p) $2x^2-4x$
q) $x-x^2$ r) $6-3x-12x^2$ s) $x+x^2+2x^3$ t) $6b^2-12b$

2. a) $a(x+y)-b(x+y)$ b) $ax+bx-cx-dx$
c) $ax+bx-ay-by$ d) $2ab-2ay+bx-yx$
e) $by+ay+bx+ax$ f) $2ab-2ay+bx-yx$
g) $ab+ay+bx+yx$ h) $x(2-a)-y(2-a)$
i) $ax+nx-ay-ny$ j) $2ax-3bx-2ay+3by$
k) $8xu-12yu+10xv-15yv$ l) $12a^2bc-4acx+3aby-xy$

3. a) a^2-b^2 b) x^2-y^2 c) $4x^2-4y^2$ d) $a^2+2ab+b^2$
e) $x^2-2xy+y^2$ f) $4a^2-4ab+b^2$ g) x^2+2x+1 h) x^2-4x+4

4. Forkort følgende brøker mest muligt:
a) $\dfrac{3a+3b}{3a-3b}$ b) $\dfrac{2x-2y}{5x-5y}$ c) $\dfrac{6b-6c}{4b-4c}$
d) $\dfrac{ax-bx}{ay-by}$ e) $\dfrac{ax-bx}{ax+bx}$ f) $\dfrac{a^2+ab}{ab+b^2}$
g) $\dfrac{x^2-xy}{xy-y^2}$ h) $\dfrac{ax+bx}{ax-bx}$ i) $\dfrac{10ax+10ay}{15bx+15by}$
j) $\dfrac{15ax^2+15bx^2}{ax+bx}$ k) $\dfrac{12x-18y}{14x-21y}$ l) $\dfrac{5a^2-5b^2}{5a-5b}$
m) $\dfrac{3x^2-3y^2}{3x-3y}$ n) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$ o) $\dfrac{4x^2-4xy+y^2}{4x^2-y^2}$

5. a) $\dfrac{a}{3}+\dfrac{1}{4}$ b) $\dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{3}+\dfrac{a}{5}$ c) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$
d) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$ e) $\dfrac{a}{b}-\dfrac{a}{c}$ f) $\dfrac{3}{ax}+\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{x^2}$
g) $\dfrac{6a+2b}{n}-\dfrac{a-b}{2n}$ h) $\dfrac{a-b}{3c}-\dfrac{-a-b}{2c}$ i) $\dfrac{x+y}{x}+\dfrac{x-y}{y}$
j) $\dfrac{a+b}{a}-\dfrac{a+b}{b}$ k) $\dfrac{a+b}{a}-\dfrac{a-b}{a}$ l) $\dfrac{a-b}{a+b}-\dfrac{a+b}{a-b}$
m) $\dfrac{a-b}{x-y}-\dfrac{a+b}{x+y}$ n) $\dfrac{a-b}{x-1}-\dfrac{a+b}{x-1}$ o) $\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x-6}$

1.5 Mængder og intervaller

Mængder bruges meget indenfor matematikken, så vi giver her de vigtigste definitioner.

> **Defintion 1**
>
> En *mængde* er en samling af objekter, som kaldes *elementer*.

Nogle eksempler er

$$\{2\,,\,3\,,\,\mathit{Odense}\} \qquad \{x \mid x \text{ er lige}\} \qquad \{x \in 1Z \mid x \text{ er en pige}\}$$

Symbolet $\in$ betyder *er element i*, og $\notin$ betyder *er ikke element i*.

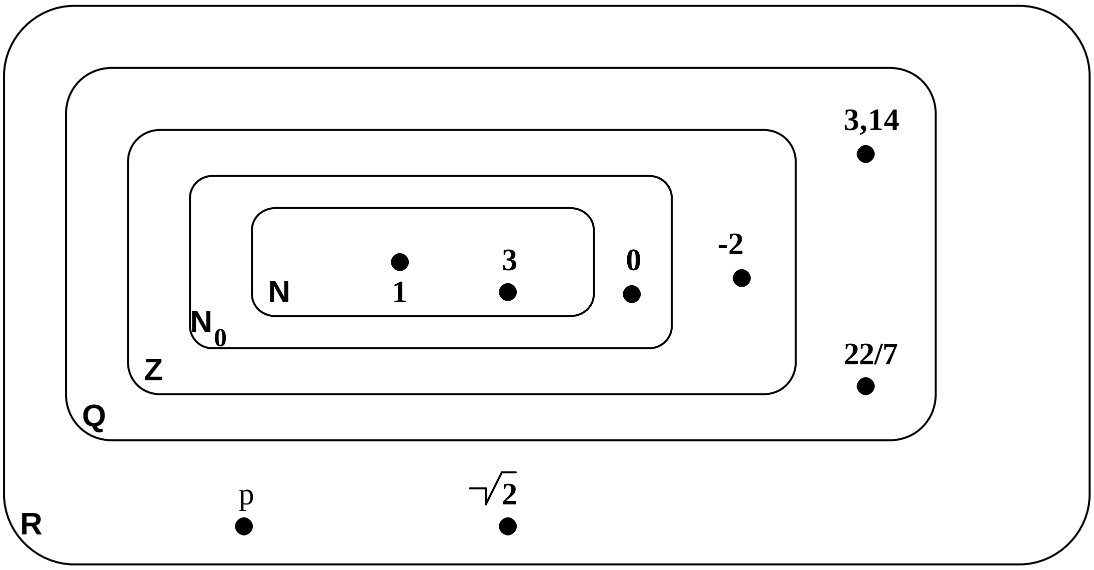
De to sidste mængder ovenfor anvender den såkaldte *mængdebygger*-notation, som generelt ser således ud:

$$\{x \in G \mid \text{udsagn i } x\}$$

Denne mængde består da af alle de elementer i *grundmængden G*, som opfylder udsagnet efter den lodrette streg. Det er ikke altid, at man specificerer grundmængden - dette er kun tilladt, når det er helt klart for læseren, hvad grundmængden er.
En prominent mængde er *den tomme mængde*, som forkortes med symbolet Ø.
Andre, hyppigt anvendte mængder, er nedenstående talmængder:

De naturlige tal	$\mathbf{N} = \{1,2,3,4,5,...\}$
De ikke-negative hele tal	$\mathbf{N}_0 = \{0,1,2,3,4,...\}$
De hele tal	$\mathbf{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$
De rationale tal	$\mathbf{Q} = \left\{x \,\middle|\, x \text{ kan skrives som } \frac{p}{q},\ \text{hvor } p,q \in \mathbf{Z}, q \neq 0\right\}$
De reele tal	$\mathbf{R}$

Sammenhængen mellem alle disse mængder kan ses på nedenstående figur:



Prikkerne, som der er ved elementerne, skal helt præcist angive, hvor på diagrammet elementet befinder sig.

Mængder kan være indeholdt i hinanden, og det udtrykker vi med symbolerne:

$A \subseteq B$: *A* er en *delmængde* af *B*, dvs. alle elementerne i *A* er indeholdt i *B*,

$A \subset B$: *A* er en *ægte delmængde* af *B*, dvs. alle elementer i *A* er indeholdt i *B*, og $A \neq B$.

Vi bruger også symbolerne $\supseteq$ og $\supset$, som betyder det modsatte af $\subset$ og $\subseteq$.

Sammenhængen mellem talmængderne kan da skrives som

$$\varnothing \subset \mathbf{N} \subset \mathbf{N}_0 \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

Bemærk, at alle mængderne er ægte delmængder af den næstfølgende; dette skyldes bl.a., at

$1 \in \mathbf{N}$	men	$1 \notin \varnothing$
$0 \in \mathbf{N}_0$	men	$0 \notin \mathbf{N}$
$-2 \in \mathbf{Z}$	men	$-2 \notin \mathbf{N}_0$
$\frac{22}{7} \in \mathbf{Q}$	men	$\frac{22}{7} \notin \mathbf{Z}$
$\pi \in \mathbf{R}$	men	$\pi \notin \mathbf{Q}$

Observér, at ingen af tallene $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[5]{7}$ er rationale.

Andre vigtige talmængder er de såkaldte *intervaller*:

$[a;b] = \ x \in \mathbf{R} \,|\, a \leq x \leq b$ $\qquad$ $]a;b[= \ x \in \mathbf{R} \,|\, a < x < b$

$]a;b] = \ x \in \mathbf{R} \,|\, a < x \leq b$ $\qquad$ $[a;b[= \ x \in \mathbf{R} \,|\, a \leq x < b$

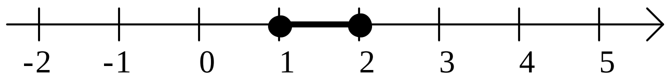
og de lidt mere lumske

$]-\infty;b] = \ x \in \mathbf{R} \,|\, x \leq b$ $\qquad$ $]-\infty;b[= \ x \in \mathbf{R} \,|\, x < b$

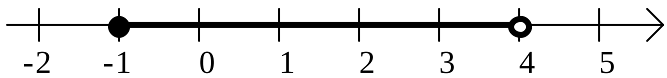
$[a;\infty[= \ x \in \mathbf{R} \,|\, x \geq a$ $\qquad$ $]a;\infty[= \ x \in \mathbf{R} \,|\, x > a$

Intervaller kan bekvemt tegnes på tallinier. En fyldt bolle betyder, at tallet er med, en tom bolle betyder, at tallet ikke er med.

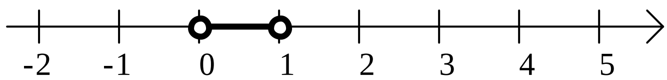
[1;2]



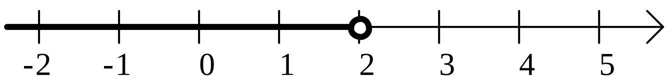
[-1;4[



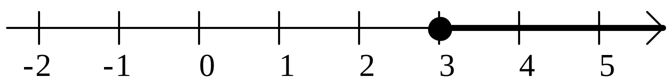
]0;1[



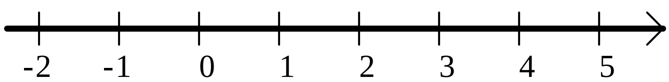
]-∞;2[



[3;∞[



]- ∞;∞[



Intervaller (og andre talmængder) kan være *åbne, lukkede* eller *halvåbne*:

Definition 2

Åbne intervaller er intervaller af formen:

$$]a;b[\ , \ ]-\infty;b[\ , \ ]a;\infty[$$

Lukkede intervaller er

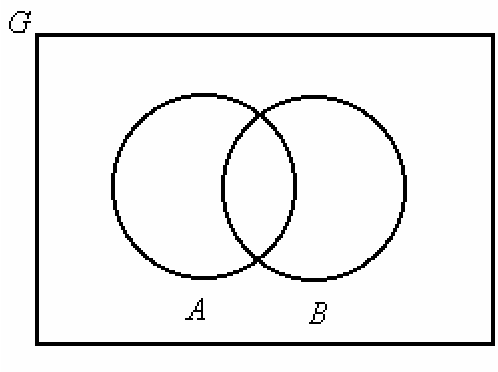
$$[a;b] \ , \ ]-\infty;b] \ , \ [a;\infty[$$

Halvåbne intervaller er

$$]a;b] \ , \ [a;b[$$

Bemærk, at der ikke findes intervaller af formen $[-\infty;b]$ eller $[a;\infty]$ - faktisk er det noget sludder at opskrive sådanne ting, idet symbolet ∞ jo ikke er et tal.

Endelig skal det nævnes, at man kan kombinere to mængder og få nye mængder. Vi illustrerer disse *operationer* vha. diagrammer som det nedenunder:

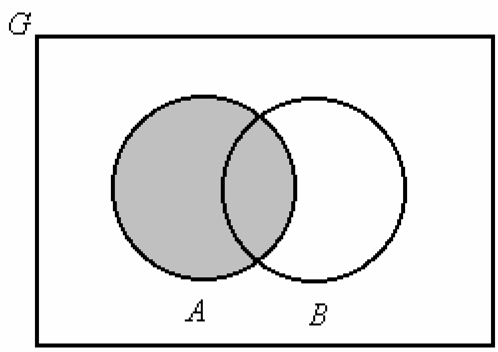


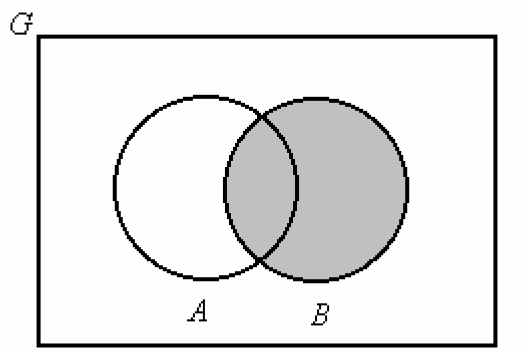
G er en grundmængde, som normalt er underforstået.

A og *B* er de to mængder, vi starter med.

Det grå område er den mængde, vi vil beskrive vha. diagrammet.

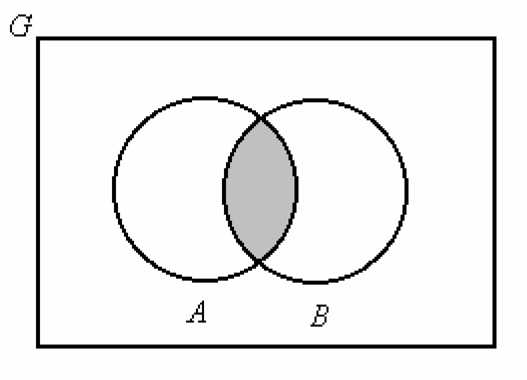
Som opvarmning viser vi, hvorledes mængderne *A* og *B* beskrives:





mængden A mængden B

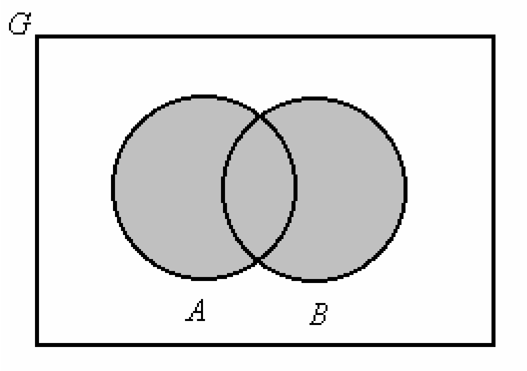
Fællesmængden er mængden af de elementer, som findes i begge mængder:



Fællesmængden mellem A og B

$A \cap B$

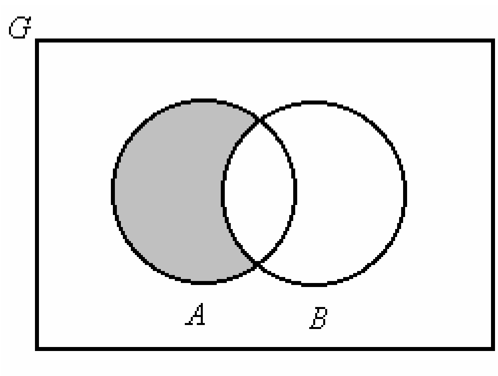
Foreningsmængden er mængden af de elementer, som findes i mindst én af de to mængder:

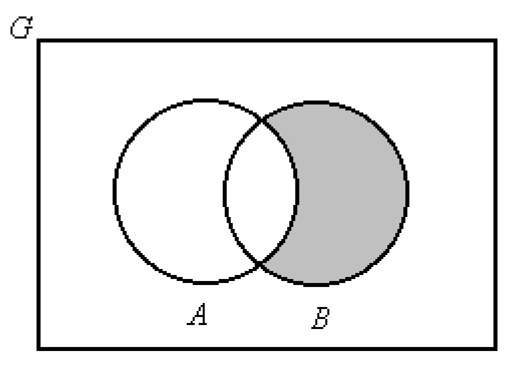


Foreningsmængden mellem A og B

$A \cup B$

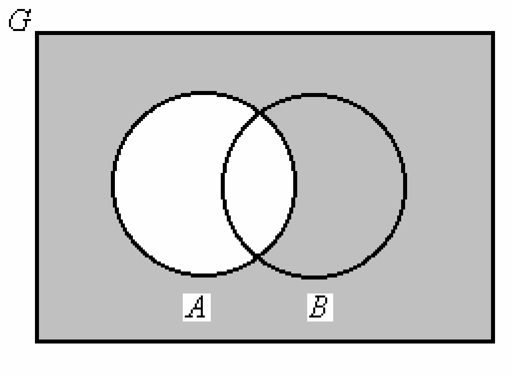
Mængdedifferensen mellem to mængder består af de elementer, der findes i den ene, men ikke i den anden mængde:



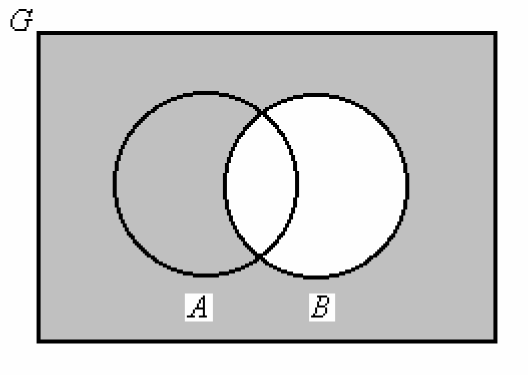


$A \setminus B$ $B \setminus A$

Komplementærmængden til en mængde A er $\overline{A} = G \setminus A$:



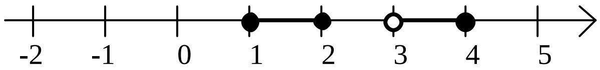
$\overline{A}$



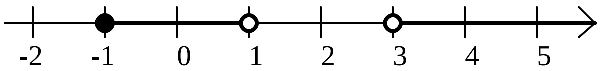
$\overline{B}$

Et par eksempler på kombinerede intervaller er:

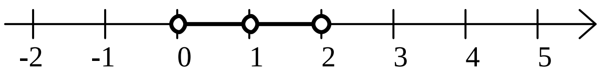
$[1;2] \cup \,]3;4]$



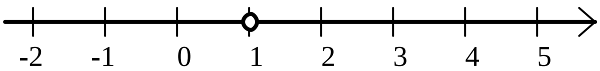
$[-1;1[\, \cup \,]3;\infty[$



$]0;2[\setminus \{1\}$



$]-\infty;\infty[\setminus \{1\}$



Opgaver

I opgaverne 1-4 anvendes følgende mængder:

$G = \ 1,2,3,4,5,6,7,8,9$

$A = \ 1,2,3,4,6,8$ $\qquad$ $B = \ 1,3,5,6,8,9$

$C = \ x \in G \mid x$ er lige $\qquad$ $D = \ x \in G \mid x$ er ulige

$E = \ x \in G \mid x$ er et primtal $\qquad$ $F = \ x \in G \mid 3 < x < 8$

1. Opskriv mængderne *C*, *D*, *E* og *F* på listeform.

2. Tegn et mængde-diagram over mængderne *G*, *A*, *B*, *C*, *D*, *E* og *F*.

3. Hvilke af følgende udsagn (påstande) er sande:

a) $1 \in A$	b) $3 \in C$	c) $0 \in G$	d) $7 \notin F$	e) $9 \in C$	f) $4 \notin B$
g) $A \subset C$	h) $G \subseteq A$	i) $G \supseteq A$	j) $\emptyset \subset D$	k) $B \subset B$	l) $B \subseteq B$

4. Opskriv nedenstående mængder på listeform:

a) $A \cap B$	b) $A \cup B$	c) $G \cup D$	d) $A \cap D$	e) $B \cup E$	f) $E \cap E$
g) $C \cap D$	h) $F \cap \emptyset$	i) $F \cup \emptyset$	j) $A \setminus B$	k) $B \setminus A$	l) $G \setminus C$
m) $C \setminus G$	n) $E \setminus \emptyset$	o) $\emptyset \setminus E$	p) $\overline{C}$	q) $\overline{G}$	r) $\overline{\emptyset}$

s) $(A \cap E) \cup (D \setminus C) \cap ((G \cup B) \setminus D)$

5. Indtegn nedenstående mængder på en tallinie:

a) $[3;6]$	b) $]-2;7]$	c) $]-\frac{1}{2};\frac{9}{4}[$
d) $[1;3] \cap [2;6]$	e) $]-1;3] \cup [4,5;\ 6]$	f) $]-\infty;2] \cup [4;6[$
g) $\mathbf{R} \setminus [2;3]$	h) $[0;1] \cap [2;3]$	i) $[1;5] \cap \mathbf{Z}$

1.6 Ligninger og uligheder

Reglerne for ligningsløsning er

1. Man må lægge det samme til på begge sider af lighedstegnet.
2. Man må trække det samme fra på begge sider af lighedstegnet.
3. Man må gange med det samme på begge sider af lighedstegnet, forudsat, at det, man ganger med, ikke er 0.
4. Man må dividere med det samme på begge sider af lighedstegnet, forudsat, at det, man dividerer med, ikke er nul.

Reglerne for løsning af uligheder er næsten ens:

1. Man må lægge det samme til på begge sider af ulighedstegnet.
2. Man må trække det samme fra på begge sider af ulighedstegnet.
3. Man må gange eller dividere med det samme på begge sider af ulighedstegnet, forudsat, at det, man ganger eller dividerer med, er **positivt.**
4. Man må gange eller dividere med det samme på begge sider af ulighedstegnet, forudsat, at det, man ganger eller dividerer med, er **negativt**, og at man husker at **vende** ulighedstegnet.

Når man løser ligninger er det generelt en god idé at reducere venstre- og højresiden mest muligt og derefter same alle leddene indeholdende *x* på venstresiden, og alle de andre led på højresiden.

Opgave 1m:

$$11x - 9 = 6x + 16$$
$$\Updownarrow$$
$$11x - 9 - 6x = 6x + 16 - 6x \qquad \text{(regel 2, } 6x \text{ fratrækkes)}$$
$$\Updownarrow$$
$$5x - 9 = 16 \qquad \text{(reduktion)}$$
$$\Updownarrow$$
$$5x - 9 + 9 = 16 + 9 \qquad \text{(regel 1, 6 lægges til)}$$
$$\Updownarrow$$
$$5x = 25 \qquad \text{(reduktion)}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{5x}{5} = \frac{25}{5} \qquad \text{(regel 4, : 5)}$$

$$\Updownarrow$$

$$x = 5$$

Ligningen er løst! Nu kan man enten vælge at sige, at løsningen til ligningen er 5, eller at løsningen er x=5, eller at løsningsmængden er $L = \{5\}$

Opgave 2e:

$$x - 9 - 3x \geq -5$$

$$\Updownarrow$$

$$-2x - 9 \geq -5 \qquad \text{(reduktion)}$$

$$\Updownarrow$$

$$-2x - 9 + 9 \geq -5 + 9 \qquad \text{(regel 1, +9)}$$

$$\Updownarrow$$

$$-2x \geq 4 \qquad \text{(reduktion)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{-2x}{-2} \leq \frac{4}{-2} \qquad \text{(regel 4, : (-2))}$$

$$\Updownarrow$$

$$x \leq -2$$

Løsningsmængden er $L = \left]-\infty;-2\right]$.

Opgaver

Løs nedenstående ligninger og uligheder:

1. a) $x+5=7$ b) $7+x=-3$ c) $x-18=11$
d) $9+x=-6$ e) $8+x=5$ f) $x+7=-6$
g) $5x=30$ h) $-2x=6$ i) $-4x=-4$
j) $2x=0$ k) $4x-6=x+15$ l) $3x-3=7-2x$
m) $11x-9=6x+16$ n) $30-x=46-9x$ o) $5x-x=2x+12$
p) $13-x=17-3x$ q) $4x+9=-3x-12$ r) $8x-5=6x+7+12$
s) $15-9x=-3x-9$ t) $6x+33=4x-7$ u) $5x+22=2x-5$
v) $18+10x=3x-3$ w) $11x+15=19x-9$ x) $23x+19=45-2x$

2. a) $x+3>5$ b) $7+x\leq 9$ c) $2x+3\geq 11$

d) $3x-6<5x-12$ e) $x-9-3x\geq-5$ f) $4x+3>3x+4$

g) $-4x-4\leq4x+4$ h) $6x+3>19-2x$ i) $3x+4>5x-8$

j) $5x-9\geq7x-3$ k) $8x-6\leq3x-1$ l) $-2x-9<2x+7$

3. Reducér først venstre- og højresiden:

a) $x(x+1)-x(x-5)=24$ b) $(x-1)(x-2)=x^2-7$

c) $(x+5)(x-3)=x(x-1)$ d) $(3-x)(x+7)=(5-x)(x-6)-9$

e) $(x+2)^2=(x+2)(x-2)$ f) $(x-2)^2=(x+2)(x-2)$

g) $2(2(x-2)-2)-2=-2(x-6)$ h) $(2+x)(2-x)=(x+2)(46-x)$

i) $(x+1)(4x-3)=(2x+2)(2x+3)$

j) $(x+2)(3-x)=(5+x)(7-x)+2(x+29)$

k) $(x-7)^2-(x-5)^2=(x-3)^2+11-(x+4)^2$

l) $(4x+3)^2-(x+7)^2=(8x-7)^2-(7x-3)^2$

m) $(5x-4)^2-(4x-3)^2=(3x+1)^2-82$

4. Isolér x i følgende udtryk:

a) $5x+2a=-x-4a$ b) $3x+a-b=4a+2b$

c) $8x-3a-4b=3x+2a+b$ d) $-5a-b-3x=-b+4a-6x$

e) $5x-a+6b=3x+8a-x-6b$ f) $-6a-x+b=18a+9b-9x$

g) $3a(x-b)-5a(x-b)=0$ h) $5x(a-b)-2a(a+b)=a-7b$

i) $3a(x-b)-2b(x-a)=3a-2b-ab$

j) $3a(x-b)-3a^2=4b(x+3a)-19ab$

k) $5x(2a-b)-15=-3x(4a-2b)+7$

l) $4x(a-2b)-6a=2x(-4a-b)-3b$

5. a) $\dfrac{2+4x}{5}=10$ b) $\dfrac{4x-5}{3}=5$ c) $\dfrac{4-12x}{7}=-2$

d) $\dfrac{11x-4}{2}=3x+8$ e) $\dfrac{9x+3}{3}=2x+8$ f) $\dfrac{20-4x}{7}=x+5$

g) $4x-2=\dfrac{18x-6}{5}$ h) $\dfrac{4x}{3}-54=\dfrac{x}{2}+1$ i) $\dfrac{x}{5}-\dfrac{3x}{2}=\dfrac{x}{5}-3$

j) $\dfrac{x}{7}+\dfrac{4x}{3}-2=\dfrac{2x}{3}+\dfrac{3}{7}$ k) $\dfrac{2x+4}{6}>\dfrac{x}{2}$ l) $x\le\dfrac{x-6}{5}$

1.7 Videnskabelig notation

Den videnskabelige notation (eng. *scientific notation*) er en måde, hvorpå man kan håndtere meget store eller meget små tal. Sådanne tal optræder meget indenfor fysik og kemi. Lad os tage et par kemiske eksempler:

Kemikerne er meget glade for at snakke om måleenheden *mol*. Der er 1 mol kulatomer i 12 g kulstof. Man kan nu tælle, hvor mange atomer dette er - man får, at der er ca.

$$602213700000000000000000$$

atomer i 12 g kulstof. Ud fra dette kan man finde ud af, at ét kulatom vejer ca.

$$0{,}00000000000000000000000001992648 \text{ kg}$$

Sådanne tal er jo umulige at arbejde med - det er meget nemt at komme til at glemme et par nuller eller 3.

Bruger man den videnskabelige notation, så skriver man

$$6{,}022137 \cdot 10^{26}$$

for det første tal, og

$$1{,}992648 \cdot 10^{-26}$$

for det andet.

Den videnskabelige notation betyder det, der står: $6{,}022137 \cdot 10^{26}$ betyder, at man skal gange tallet 6,022137 med titalspotensen 10^{26}, som er et 1-tal med 26 nuller bagefter. Og $1{,}992648 \cdot 10^{-26}$ betyder, at man skal gange tallet 1,992648 med titalspotensen 10^{-26}, som er 0,00(25 nuller i alt)001, eller rettere $1{:}10^{26}$.

Nu kan man spørge sig selv, om man virkeligt er i stand til at tælle antallet af atomer i 12 g kulstof så præcist, at man kan får tallet ovenfor. Kunne man ikke have talt forkert, således at der faktisk var 602213700000000000000002 atomer i stedet. Jo, der er også derfor, at man skriver

$$6{,}022137 \cdot 10^{26}$$

og ikke

$$6{,}022137000000000000000010^{26}$$

- man siger, at tallet $6{,}022137 \cdot 10^{26}$ er angivet med 7 *betydende cifre*. Alle nullerne, som kommer efter, er faktisk ikke særligt præcise, og bruges kun som fyld, hvis man da ikke bruger den videnskabelige notation.

En tommelfingerregel, når man anvender den videnskabelige notation er, at man ikke må have flere betydende cifre, end der er i de oplysninger, man starter regnerierne ud fra.

På lommeregneren indtastes sådanne tal på følgende måde:

TI-30x:

6.022137 $\boxed{\textbf{EE}}$ 26

og

1,992648 $\boxed{\textbf{EE}}$ 26 $\boxed{+/-}$

TI-68:

6.022137 $\boxed{\textbf{EE}}$ 26

og

1,992648 $\boxed{\textbf{EE}}$ $\boxed{(-)}$ 26

De fleste lommeregnere har nogel knapper, mærket **FIX**, **SCI**, **ENG**, **FLO** eller lignende, som kan bruges til bl.a. at styre, hvor mange betydende cifre et resultat vises med på displayet. Studér din brugsanvisning.

Opgaver

1. Udregn

a) $4{,}762 \cdot 10^{11} : 3{,}24 \cdot 10^{6}$

b) $8{,}2675 \cdot 10^{12} \cdot 9{,}32 \cdot 10^{-6}$

c) $2{,}22 \cdot 10^{22} : 10^{8}$

d) $1{,}976 \cdot 10^{22} + 34$

2. En elektron vejer $9{,}11 \cdot 10^{-31}$kg. Jorden vejer $5{,}976 \cdot 10^{24}$kg. Hvor mange elektroner svarer dette til?

3. Et eksempel på, hvor grueligt galt, det kan gå, hvis man afrunder for tidligt, er følgende udregninger:

Jørgen vil beregne tallet

$$\frac{45}{\sqrt{1001}-31{,}63}$$

Han tager først sin lommeregner og opdager, at

$$\sqrt{1001}\approx 31{,}64$$

Han beregner derefter brøkens nævner:

$$\sqrt{1001}-31{,}63\approx 31{,}64-31{,}63=0{,}01$$

Og hele regnestykket giver

$$\frac{45}{\sqrt{1001}-31{,}63}=\frac{45}{0{,}01}=4500$$

a) Beregn Jørgens tal på lommeregneren og opdag, at resultatet faktisk er

5242,287...

b) Hvorfor fik Jørgen så stor en fejl i sin udregning?

Facitter

Kapitel 1:

1. a) 17 b) 25 c) 11 d) -21 e) 3 f) 45 g) 41
h) -3 i) 9 j) 26 k) -2 l) -4 m) 2 n) 10

Kapitel 2:

1. a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{8}{3}$ d) $\frac{12}{7}$ e) $\frac{17}{6}$ f) $\frac{35}{8}$ g) $\frac{13}{4}$
h) $\frac{109}{27}$ i) $\frac{12}{11}$ j) $\frac{35}{11}$ k) $\frac{32}{5}$ l) $-\frac{11}{9}$ m) $\frac{31}{5}$ n) $\frac{22}{7}$
o) $\frac{39}{4}$ p) $\frac{119}{16}$ q) $\frac{258}{23}$ r) $\frac{605}{23}$ s) $\frac{169}{14}$ t) $\frac{32}{5}$

2. a) $5\frac{1}{4}$ b) $2\frac{1}{3}$ c) $1\frac{3}{4}$ d) $4\frac{2}{7}$ e) $1\frac{2}{9}$ f) $1\frac{2}{11}$ g) $1\frac{5}{12}$
h) $4\frac{1}{3}$ i) $9\frac{3}{13}$ j) 11 k) $11\frac{1}{2}$ l) $1\frac{8}{11}$ m) $6\frac{3}{4}$ n) $3\frac{3}{4}$
o) 4 p) 25 q) $2\frac{9}{17}$ r) $2\frac{5}{7}$ s) $7\frac{1}{2}$ t) -3

3. a) $\frac{2}{5}$ b) 4 c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{8}{3}$ e) 11 f) $\frac{6}{5}$ g) $-\frac{3}{2}$
h) $\frac{3}{2}$ i) $\frac{7}{5}$ j) $\frac{1}{3}$ k) $\frac{2}{3}$ l) $\frac{3}{4}$ m) $\frac{1}{11}$ n) $\frac{23}{15}$
o) $\frac{129}{13}$ p) $\frac{2}{7}$ q) $\frac{2}{3}$ r) $\frac{13}{4}$ s) $\frac{7}{3}$ t) $\frac{2}{33}$

4. a) $\frac{18}{27}$ b) $\frac{18}{24}$ c) $\frac{33}{66}$ d) $\frac{20}{28}$ e) $\frac{16}{36}$ f) $\frac{12}{48}$

5. a) $\frac{6}{7}$ b) $\frac{14}{17}$ c) $\frac{1}{7}$ d) $\frac{2}{11}$ e) $\frac{2}{3}$ f) $\frac{1}{2}$ g) $\frac{5}{13}$
h) $\frac{2}{9}$ i) $\frac{2}{3}$ j) $\frac{4}{5}$ k) $\frac{2}{3}$ l) $\frac{1}{3}$

6. a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $\frac{17}{14}$ e) $\frac{5}{12}$ f) $\frac{4}{9}$ g) $\frac{5}{4}$
h) $\frac{7}{6}$ i) $\frac{5}{8}$ j) $-\frac{1}{6}$ k) $\frac{26}{21}$ l) $\frac{23}{18}$ m) $\frac{4}{9}$ n) $-\frac{7}{36}$
o) $-\frac{7}{15}$ p) $\frac{1}{2}$ q) $\frac{125}{63}$ r) $-\frac{73}{228}$ s) $\frac{35}{9}$ t) $-\frac{37}{84}$

7. a) $\frac{11}{3}$ b) $\frac{5}{4}$ c) $\frac{9}{2}$ d) $\frac{65}{21}$ e) $\frac{15}{8}$ f) $\frac{17}{8}$ g) $\frac{31}{12}$

h) $\frac{2}{3}$ i) $\frac{19}{8}$ j) $\frac{23}{6}$ k) $\frac{15}{4}$ l) $\frac{7}{8}$

8. a) $\frac{5}{2}$ b) $\frac{5}{4}$ c) 3 d) $\frac{7}{6}$ e) $\frac{5}{2}$ f) $\frac{8}{3}$ g) $\frac{7}{2}$
h) $\frac{1}{3}$ i) $\frac{17}{5}$ j) $\frac{2}{9}$ k) $\frac{6}{19}$ l) $\frac{1}{6}$ m) $\frac{3}{11}$ l) $\frac{2}{3}$
o) $\frac{3}{8}$ p) 2 q) $\frac{1}{6}$ r) $\frac{2}{3}$ s) $\frac{8}{9}$ t) $\frac{27}{8}$ u) $\frac{16}{9}$
v) $\frac{21}{16}$ w) $\frac{49}{4}$ x) $\frac{91}{12}$

9. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{2}{9}$ d) $\frac{1}{12}$ e) $\frac{1}{7}$ f) $\frac{2}{9}$ g) $\frac{3}{28}$
h) $\frac{5}{36}$ i) $\frac{2}{11}$ j) 4 k) 6 l) 8 m) 15 n) $\frac{21}{2}$
o) $\frac{25}{3}$ p) 32 q) 9 r) $\frac{3}{2}$ s) 2 t) $\frac{5}{4}$ u) $\frac{8}{21}$
v) $\frac{20}{27}$ w) 2 x) $\frac{14}{27}$ y) $\frac{3}{10}$ z) $\frac{15}{8}$ æ) $\frac{10}{9}$ ø) $\frac{32}{9}$
å) $\frac{11}{3}$ ♥) $\frac{13}{6}$ ♦) $\frac{14}{9}$ ♠) $\frac{38}{7}$

Kapitel 3:

1. a) $4a+b-5$ b) $-4x+4y+9$ c) $10g-12h-3$
d) $2x-6$ e) $-a+4b-11$ f) $-13x-4y+10$
g) $20t+18u+28$ h) $-16a-35b+25$ i) $25p+2q+12$
j) $4a-2b-2$ k) x^2 l) xy^2
m) $8a^2b$ n) $-8x^3-4x^2+7x-6$

2. a) $2x-3y$ b) $4c+10d$ c) $a+2b+3c$
d) $7a-2b$ e) $2a+5b+c$ f) $-28p+18$
g) $-7x+9y+10$ h) -4 i) $-28a+18b+3$
j) $28p+q-10$

3. a) $16x-18y$ b) $-6a$ c) $-6a-7b$
d) $-3x+6z$ e) 0 f) $2x$
g) $7ab-a+5b-2c$

4. a) $28a-21$ b) $24a+8b+32$ c) $25x-15y+30$
d) $8ab+4ac$ e) $28xy+14x$ f) $-12b+4c$
g) $28x-7y$ h) $-5a+10b$ i) $-x+y$
j) $-7a$ k) $2b-2c+2d$ l) $na-nb-nc$
m) $2x+xy-xz-ux$ n) $3ab+ac$ o) $7ax-4bx-4cx$
p) $2a$ q) $12a+9ab-6$ r) $-4a^2+ay-3a-bx$
s) $5ax+5a$ t) $2ax$ u) x^3+5x
v) $2x^3+2x^2$ w) $-x^3+4x^2+5x$

5. a) $2a^2+4a-6$ b) $6ab-12a+12b-24$ c) $16x^2-4$
d) $-6p^2+19p-10$ e) $-8a^2+16a-6$ f) $6c^2+12d^2-17cd$
g) $10a^2-9b^2-9ab-4a+6b$ h) $6p^2-7pq+q^2+p-q$
i) $-10x^2+2y^2-xy-x-14y+24$ j) $20t^2-8tu-54t+12u+36$
k) $ab+4a+2b+8$ l) $ab-2a+3b-6$ m) $2xy-10x-y+5$
n) $-ax+ay+2x-2y$ o) $ax-ay$ p) $6ac+15bc$
q) $-6bx+12by$ r) $18a-28b$ s) $36ab$
t) 0 u) $-7ab+ac+bc-2b^2$
v) $18a+19b-3c$ w) $x^5-2x^4+x^3-2x^2+2x$
x) $24x^3+5x^2$

6. a) a^2+2a+1 b) $a^2-8a+16$ c) $25a^2+9b^2+30ab$
d) a^2+4a+4 e) $9a^2+4b^2+12ab$ f) $49c^2+9d^2+42cd$
g) $16a^2+9b^2-24ab$ h) $36a^2+25b^2-60ab$ i) $16x^2+25y^2-40xy$
j) a^2+4b^2-4ab k) x^2-4x+4 l) $\frac{1}{4}x^2+4y^2+2xy$
m) $25a^2+60a+36$ n) $9b^2-30b+25$ o) $4x^2-16x+16$
p) a^2+b^2+2ab q) $a^2+b^2c^2-2abc$
r) $a^2b^2+c^2d^2+2abcd$ s) $a^2b^2+x^2y^2+2abxy$
t) $4x^2y^2+a^2-4axy$ u) $9a^2b^2+x^2y^2-6abxy$
v) $36a^2x^2+16b^2y^2+48abxy$ w) $36x^2y^2+9y^2+36xy^2$
x) $4a^4+12a^3+9a^2$ y) $8ab$
z) $-2x-2y-2xy+2$ æ) $-2x^2+1$
ø) $29q^2+29$

7. a) x^2-1 b) $49a^2-25$ c) i^2-j^2
d) $4x^2-16$ e) $-9x^2+4$ f) $25a^2-b^2$
g) $49x^2-4a^2$ h) $4u^2-9q^2$ i) $-36y^2+16x^2$
j) $-9n^2+16p^2$ k) $81p^2-36k^2$ l) $9a^2-9b^2$
m) $x^2-\frac{1}{4}$ n) $a^2x^2-b^2y^2$ o) $4a^2b^2-25x^2y^2$
p) $16a^2b^2-36b^2z^2$ q) $a^2b^2x^2-b^2z^2v^2$ r) $a^4b^2-x^2y^4$
s) $9x^4b^4-a^2z^4$ t) $-2b^2$ u) $-4ab$
v) $25x^2-6xy$ w) $37a^2-24ab$ x) $-ac-bc$

8. a) 2 b) 3 c) $5+2\sqrt{6}$
d) $13-4\sqrt{10}$ e) $126-28\sqrt{14}$ f) $-2\sqrt{6}-2\sqrt{15}$

Kapitel 4:

1. a) $2(x+2)$ b) $6(x+2)$ c) $4(x+5)$ d) $x(x+1)$
e) $a(b+1)$ f) $b(a+1)$ g) $x(2+x^2)$ h) $x(x^3+4)$
i) $x^2(x^2+16)$ j) $3(x-1)$ k) $4(3x-1)$ l) $2(x-1)$
m) $4(1-4y)$ n) $x(1-x)$ o) $b(8-a)$ p) $2x(x-2)$
q) $x(1-x)$ r) $3(2-x-4x^2)$ s) $x(2x^2+x+1)$ t) $6b(b-2)$

2. a) $(a-b)(x+y)$ b) $x(a+b-c-d)$ c) $(a+b)(x-y)$
d) $(2a+b)(x-y)$ e) $(a+b)(x+y)$ f) $(2a+x)(b-y)$
g) $(a+b)(x+y)$ h) $(x-y)(2-a)$ i) $(a+n)(x-y)$
j) $(2a-3b)(x-y)$ k) $(2x-3y)(4u-5v)$ l) $(4ac+y)(3ab-x)$

3. a) $(a+b)(a-b)$ b) $(x+y)(x-y)$ c) $4(x-y)(x+y)$
d) $(a+b)^2$ e) $(x-y)^2$ f) $(2a-b)^2$
g) $(x+1)^2$ h) $(x-2)^2$

4. a) $\frac{a+b}{a-b}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{x}{y}$ e) $\frac{a-b}{a+b}$
f) $\frac{a}{b}$ g) $\frac{x}{y}$ h) $\frac{a+b}{a-b}$ i) $\frac{2a}{3b}$ j) $15x$
k) $\frac{6}{7}$ l) $a+b$ m) $x+y$ n) $\frac{a+b}{a-b}$ o) $\frac{2x-y}{2x+y}$

5. a) $\frac{4a+3}{12}$ b) $\frac{11a}{30}$ c) $\frac{a+b}{ab}$ d) $\frac{ab+bc+ac}{abc}$
e) $\frac{ac-ab}{bc}$ f) $\frac{3ax+2x^2+a^2}{a^2x^2}$ g) $\frac{11a+5b}{2n}$
h) $\frac{5a+b}{6c}$ i) $\frac{x^2+y^2}{xy}$ j) $\frac{b^2-a^2}{4ab}$ k) $\frac{2b}{a}$
l) $-\frac{4ab}{a^2-b^2}$ m) $\frac{2ay-2bx}{x^2-y^2}$ n) $\frac{-2b}{x-1}$ o) $\frac{-4}{x^2-8x+12}$

Kapitel 5:

1. $C = \ 2,4,6,8$ $D = \ 1,3,5,7,9$ $E = \ 2,3,5,7$ $F = \ 4,5,6,7$

3. Udsagnene a,f,i,j,l er sande, resten falske.

4. a) {1,3,6,8} b) {1,2,3,4,5,6,8,9} c) {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
d) {1,3} e) {1,2,3,5,6,8,9} f) {2,3,5,7}
g) {} (=Ø) h) {} (=Ø) i) {4,5,6,7}
j) {2,4} k) {5,9} l) {1,3,5,7,9}
m) {} (=Ø) n) {2,3,5,7} o) {}
p) {1,3,5,7,9} q) {} r) {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
s) {2}

Kapitel 6:

1. a) 2 b) -10 c) 29 d) -15 e) -3 f) -13 g) 6 h) -3
i) 1 j) 0 k) 7 l) 2 m) 5 n) 2 o) 6 p) 2
q) -3 r) 12 s) 4 t) -20 u) -9 v) -3 w) 3 x) 26/25

2. a) $x>2$ b) $x\leq 2$ c) $x\geq 4$ d) $x>3$ e) $x\leq -2$
f) $x>1$ g) $x\geq -1$ h) $x>2$ i) $x<6$ j) $x\leq -3$
k) $x\leq 1$ l) $x>-4$

3. a) 4 b) 3 c) 5 d) 4 e) -2 f) 2 g) 13/3 h) -2
i) -1 j) -29 k) -2 l) 1 n) 4

4. a) $x=-a$ b) $x=a+b$ c) $x=a+b$ d) $x=3a$
e) $x=3a-4b$ f) $x=3a+b$ g) $x=b$
h) $x=\dfrac{2a^2+2ab+a-7b}{5a-5b}$ i) $x=1$ j) $x=a$
k) $x=\dfrac{2}{2a-b}$ l) $x=\dfrac{b}{6a-2b}$

5. a) 12 b) 5 c) 3/2 d) 4 e) 7 f) -15/11 g) 2
h) 66 i) 2 j) 3 k) $x<4$ l) $x\leq \frac{3}{2}$

Kapitel 7:

1. a) $1{,}47\cdot 10^5$ b) $7{,}705\cdot 10^7$ c) $2{,}22\cdot 10^{14}$ d) $1{,}976\cdot 10^{26}$

2. $6{,}560\cdot 10^{54}$ elektroner.