Knudeteori

- Introduktion
- Isotopi-begrebet
- Trefarvning af knuder
- Primknuder og knudeklassifikation
- Jones-polynomiet
- Flere invarianter
- Nogle anvendelser

Reklame

Kenneth Hansen

Knudeteori

Forlaget Systime

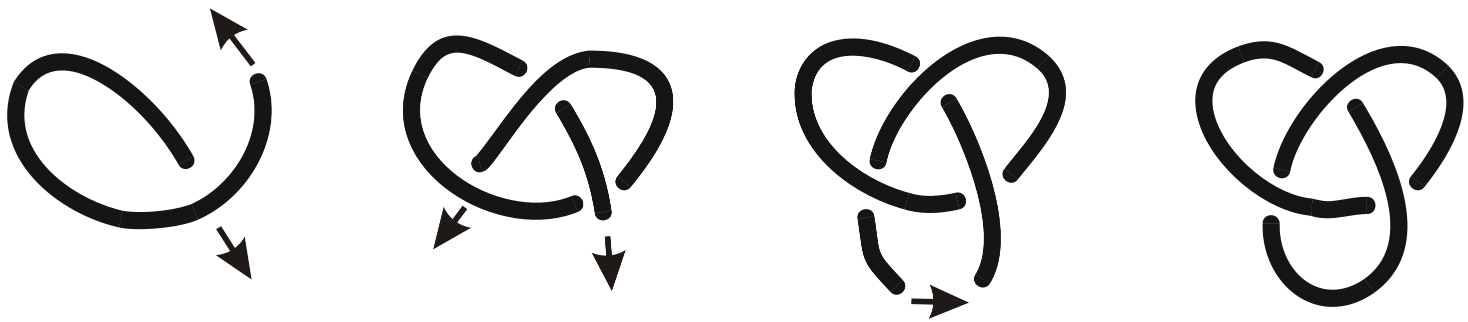
ISBN: 87-616-0029-6

Pris: ca. 90,- www.systime.dk

Historisk oversigt

- 1833: C.F.Gauss: Lænketal.
- 1880’erne: Tait og Little begynder knudeklassifikationen.
- 1926: Kurt Reidemeister: Isotopi
- 1969: John Conway: Conway-polynomiet.
- 1984: Vaughn Jones: Jones-polynomiet. Starten på “Den knudeteoretiske revolution”

Hvad er en knude?



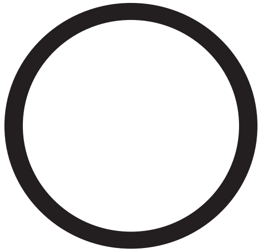
•Tag et stykke snor

• Bind en knude

• Lim enderne sammen

Herved undgås, at knuden "glider af "

Nogle knuder



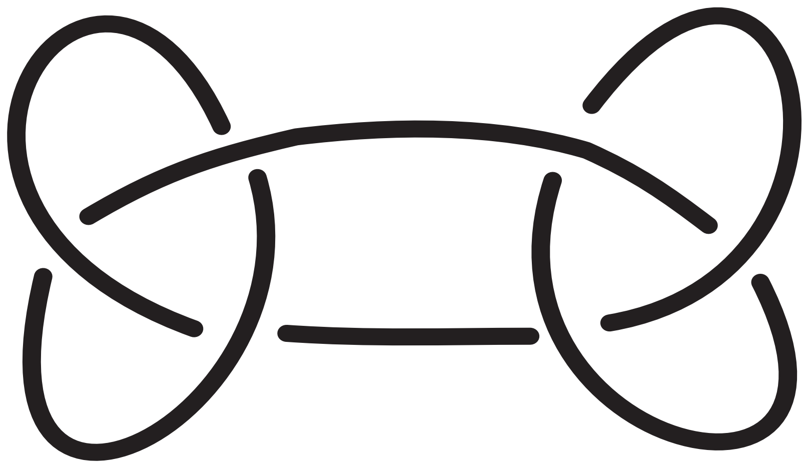
uknuden

ottetalsknuden

femkløverknuden

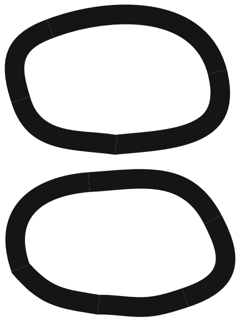
8_3

kællingeknuden



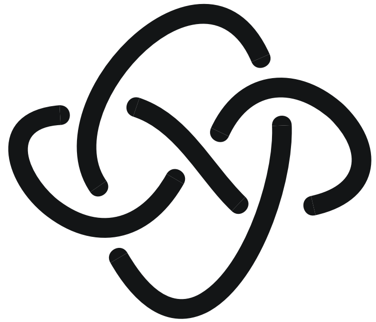
råbåndsknobet

Nogle lænker



to uknuder

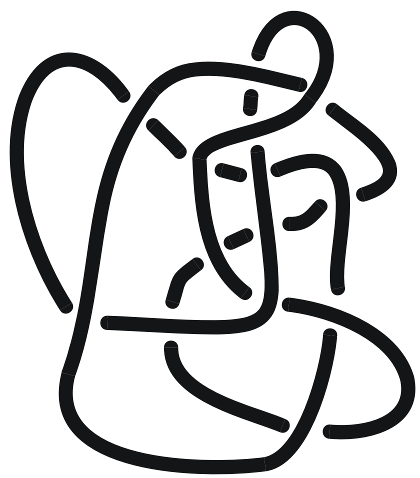
Hopf-lænken



Whitehead-lænken

En lænke er flere stykker snor, som er filtret ind i hinanden.

Nogle komplicerede knuder?



(Trekløverknuden)

(Uknuden)

Isotopi

To knuder er isotope (eller ens), hvis man kan ændre den ene til den anden, uden at klippe snoren over.

Definitionen af isotopi er kompliceret.

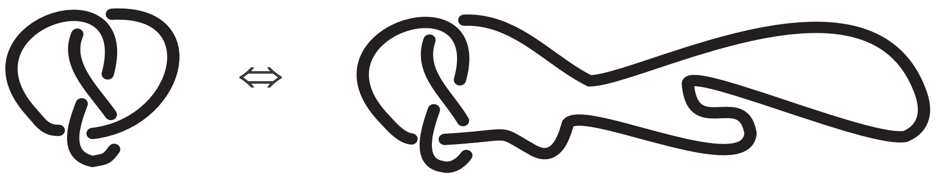
Da vi arbejder med knudediagrammer, så kan vi nøjes med:

Reidemeister-træk

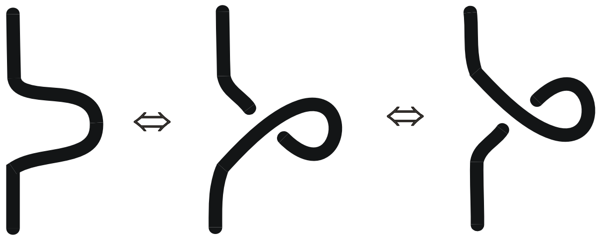
To knuder er isotope, netop når man kan komme fra det ene knudediagram til det andet vha. en følge af Reidemeister-træk

Kurt Reidemeister, 1926

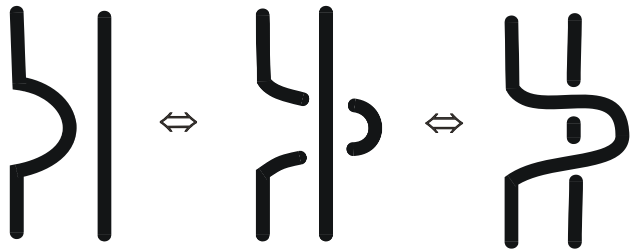
De 4 typer Reidemeister-træk



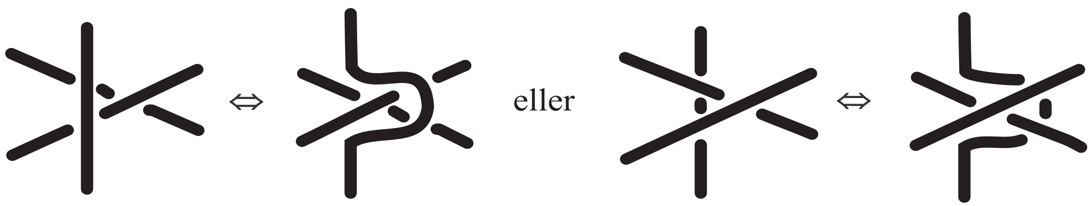
Type 0



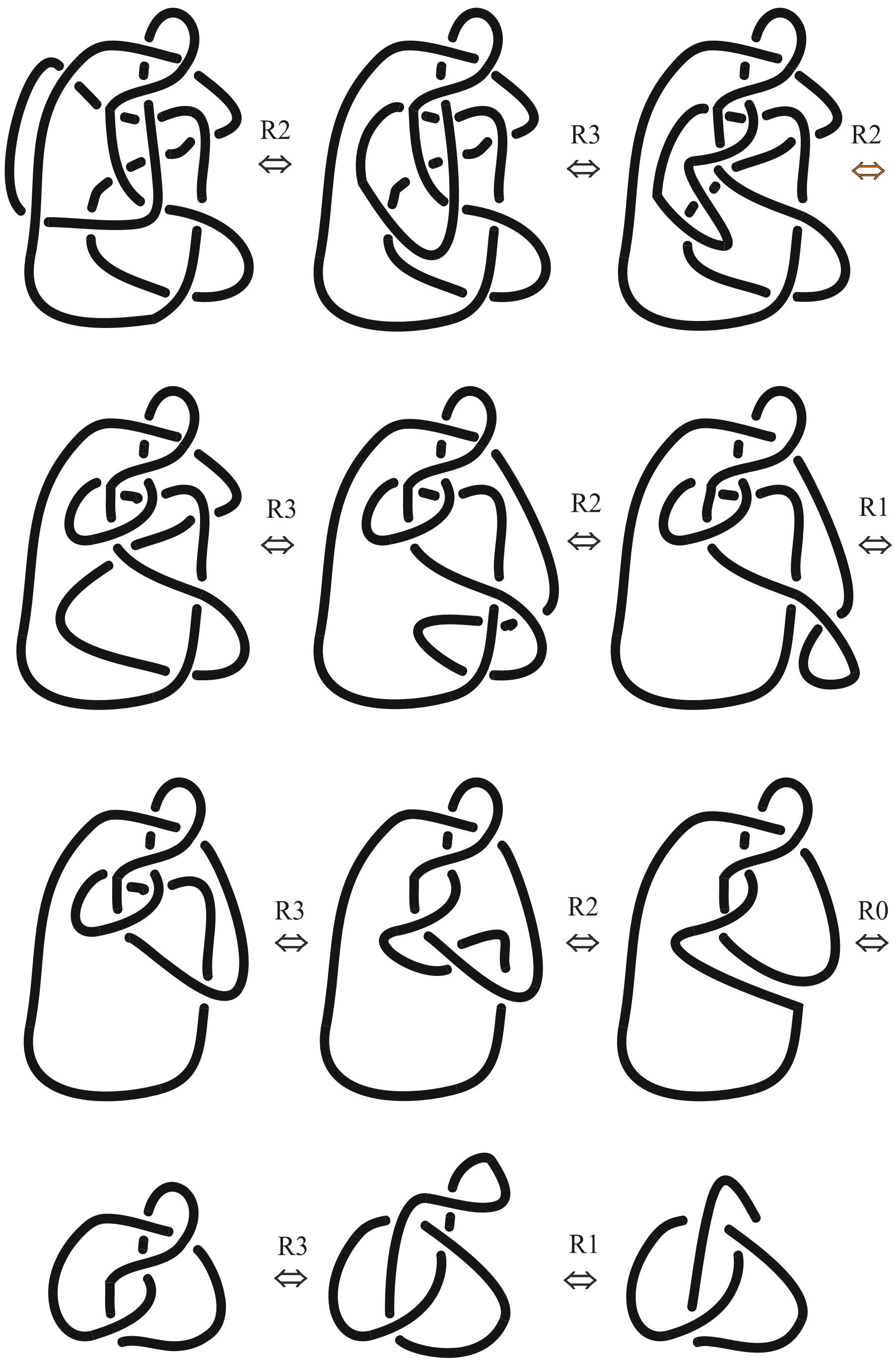
Type 1



Type 2



Type 3


R2
R3
R2
R3
R2
R1
R3
R2
R0
R3
R1

Invarianter

En invariant er en størrelse, som er ens for isotope knuder.

- Antallet af snore i knuden
- Trefarvnings-egenskaben
- Krydstallet
- Jones-polynomiet
- og mange flere

Bevisteknik

- Reidemeister-træk anvendes til at bevise, at to knuder er isotope.
- Invarianter anvendes til at bevise, at to knuder **ikke** er isotope.

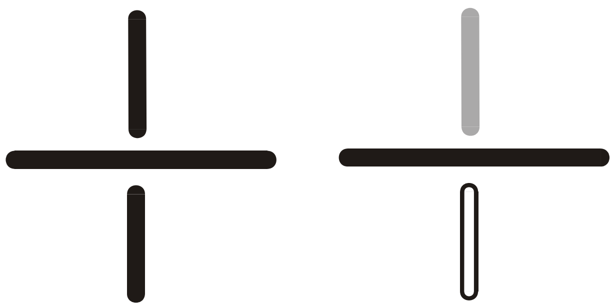
En universal invariant?

- Findes der en invariant, som opfylder: To knuder er isotope, hvis og kun hvis invarianten for de to knuder er ens ?
- (Evt. en samling af invarianter)

- Et åbent spørgsmål....

Trefarvning

Tildel hver streg i knudediagrammet en farve, således at en krydsning altid ser sådan ud:



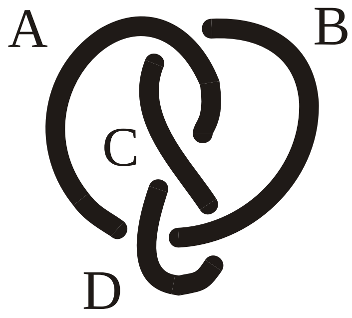
Der skal anvendes mindst to farver

Ikke alle knuder kan trefarves

Trekløverknuden

Knuden 6_1

Knuden 7_4



Ottetalsknuden

Trekløverknuden, 6_1 og 7_1 kan trefarves

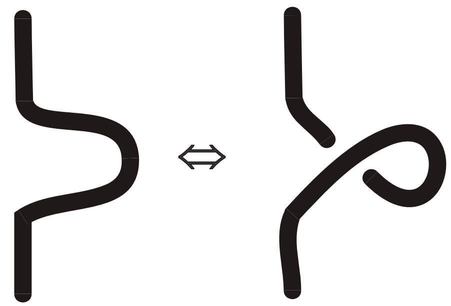
Ottetalsknuden kan ikke trefarves

Kan vi bevise, at trefarvning er en invariant, så har vi bevist, at trekløverknuden og ottetalsknuden ikke er isotope.

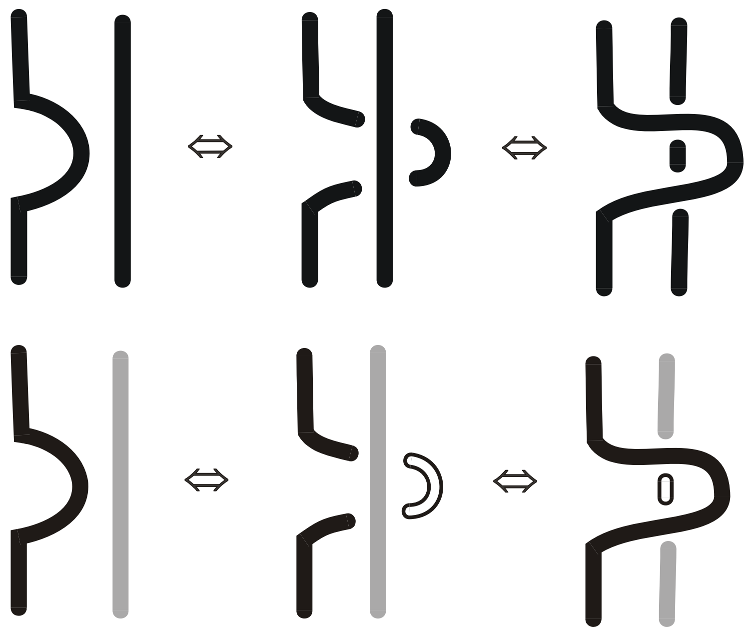
Strategi for beviset

- Antag at et knudediagram er trefarvet før et Reidemeister-træk. Kan vi trefarve det bagefter?

- Træk af type 0 er trivielle.

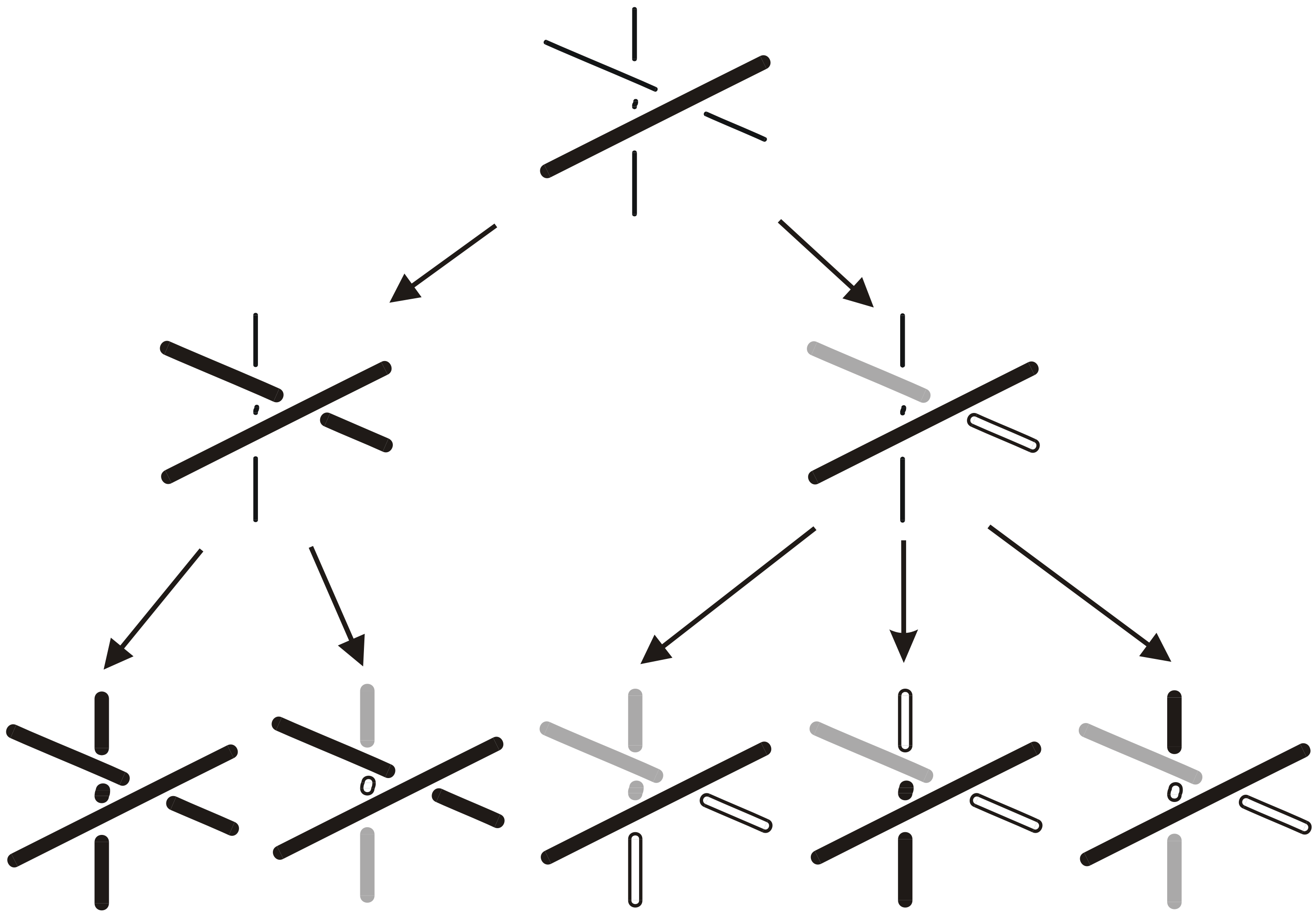


Type 1: Snoren er altid ensfarvet

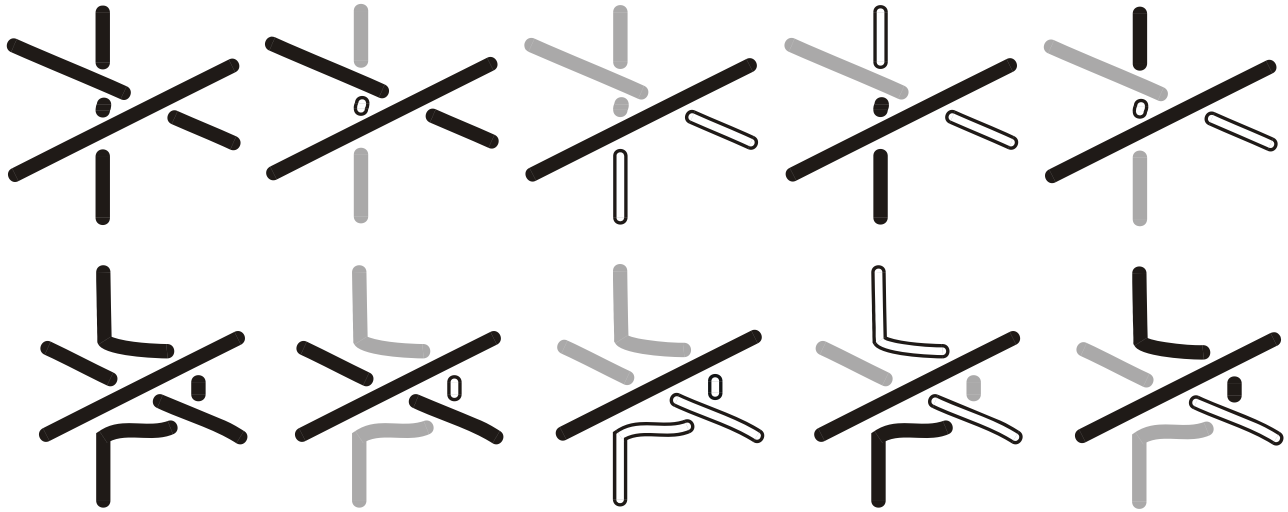


Type 2: To tilfælde.

- Begge snore har samme farve.
- Begge snore har forskellig farve



Ved type 3 er der mange tilfælde at tage hensyn til...



men i alle tilfældene kan vi producere en ny trefarvning.

Konklusion:

Trefarvning er en invariant.

Krydstallet

Krydstallet er det mindst mulige antal krydsninger i et diagram af knuden (minimalt diagram)

Uknuden : 0

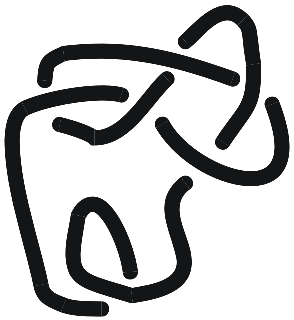
Trekløverknuden : 3

Ottetalsknuden : 4

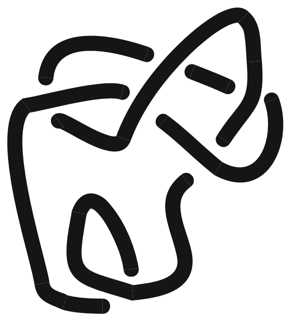
Generelt svært at beregne krydstallet.

Taits formodning

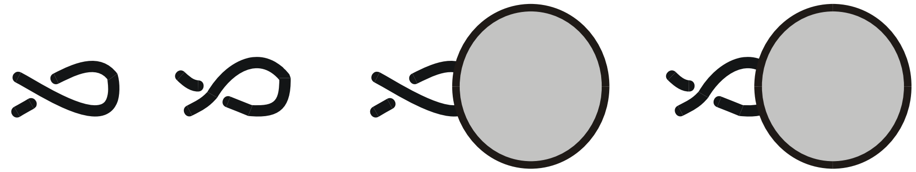
Et alternerende, ikke-reduceret knudediagram er mininalt.



altern.



ikke altern.



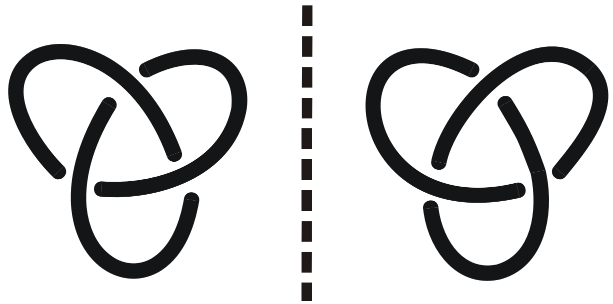
ikke reducerede knuder

Taits formodning

- Blev endeligt vist i 1986 af Kauffman, Thistlethwaite, Murasugi
  - uafhængigt af hinanden
  - anvendte Jones-polynomiet (1984)

- Beviset findes i bogen
  - og kan altså forstås af en gymnasieelev!

Et svært problem



Er en knude isotop med sit spejlbillede?

Trekløverknuden: Nej !

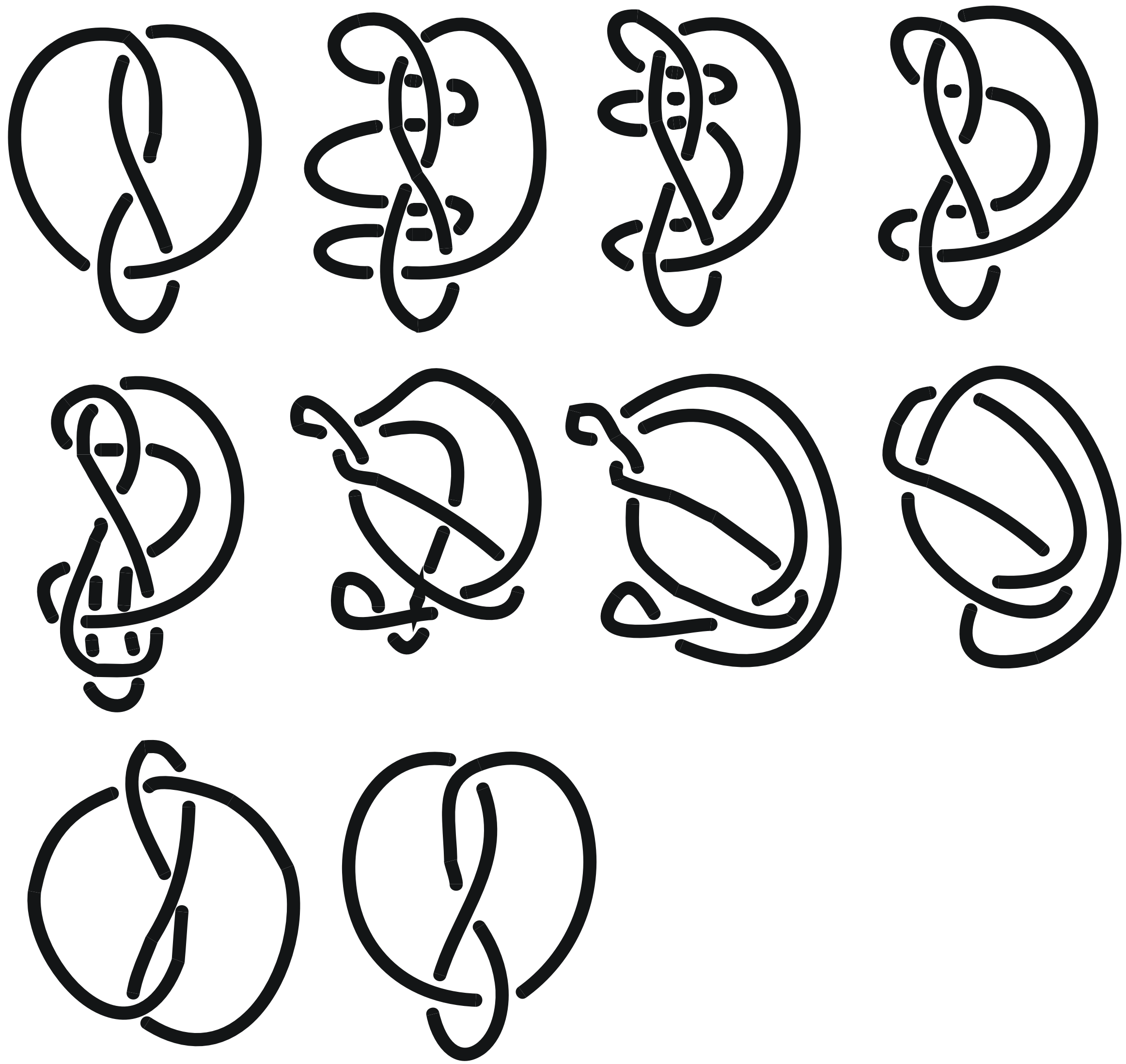
Ottetalsknuden: Ja !

Problem:

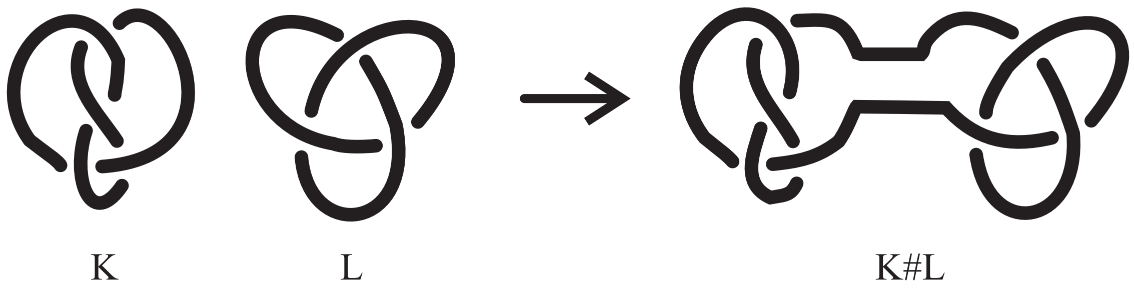
Find en invariant, der kan skelne mellem spejlbilleder.

Ottetals-
knuden er
achiral

(isotop med
sit eget
spejlbillede)

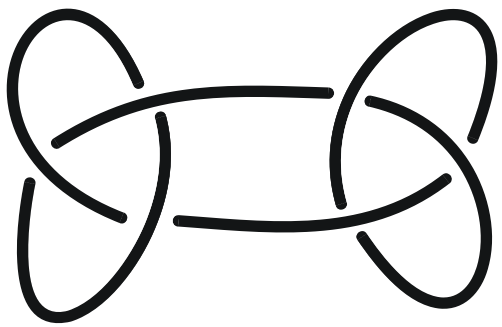


Splejsning af knuder

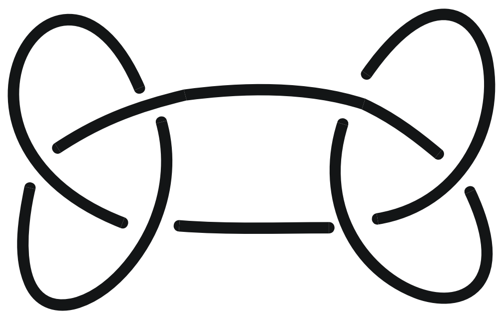


Splejsning er uafhængig af positionen, hvor man splejser
Splejsning er associativ og kommutativ

Kællingeknuden og råbåndsknobet



T # T
(kællingeknude)



T # T*
(råbåndsknob)

Uløste problem

- $c(K\#L) = c(K) + c(L)$

- men vi ved, at
  - $c(K\#L) \leq c(K) + c(L)$
  - $c(K\#L) = c(K) + c(L)$, hvis K og L er alternerende

Primknude

En primknude er en knude, der ikke er splejsningen af andre knuder.

Uknuden, trekløverknuden og ottetalsknuden er primknuder.

Kællingeknuden og råbåndsknobet er ikke primknuder.

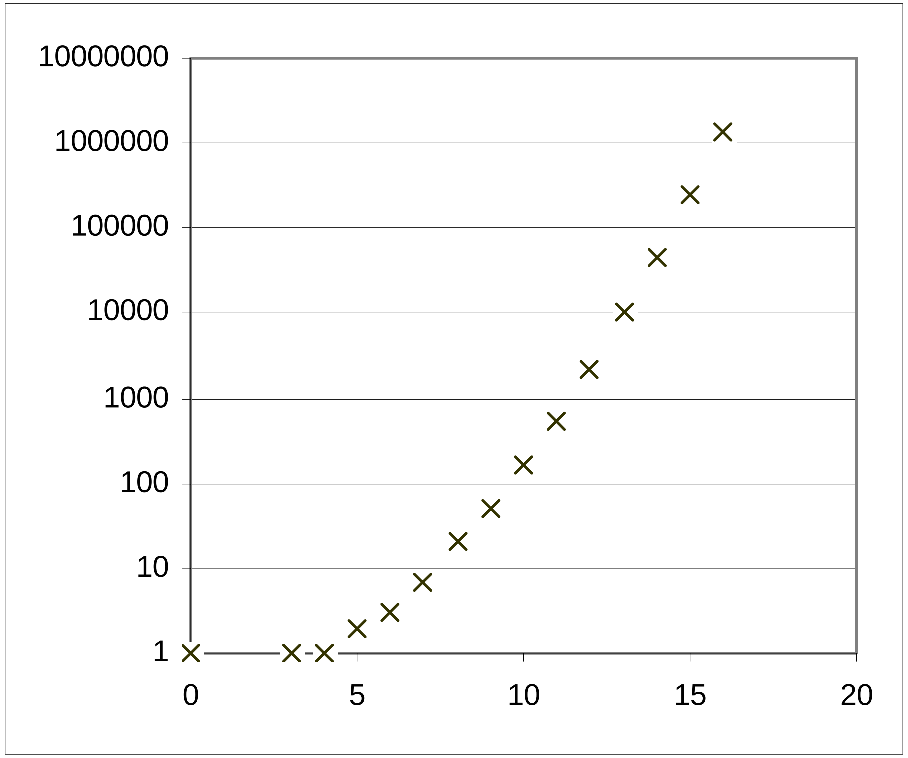
Primknudeopløsning

- En knude kan entydigt (op til rækkefølge) skrives som en splejsning af primknuder
- (Sammenlign med opløsningen af hele tal i primtal)

Primknudeklassifikation

Krydstal	Antal	Krydstal	Antal
0	1	10	165
3	1	11	552
4	1	12	2176
5	2	13	9988
6	3	14	46972
7	7	15	253293
8	21	16	1388705
9	49	17	???

Et uløst problem



Hvordan vokser antallet af primknuder med c krydsninger?

Eksponentielt?

Vi ved dog, at

$$\text{antal} \geq \frac{2^{c-2} - 1}{3}$$

Primknudeklassifikation

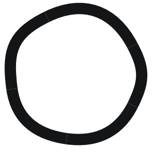
Metode:

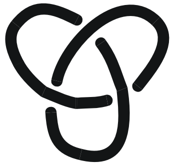
- Find alle knudediagrammer med krydstal *c*
- Beregn en gruppe af invarianter for alle knudediagrammerne (*n*-farvning)
- Eliminér gamle kendinge
- Sammenlign de resterende knuder

Alt dette gøres nemmest på en computer

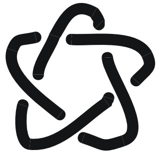
n-farving

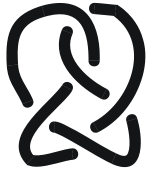
- n er et ulige tal (helst et primtal)
- En knude kan n-farves, hvis hver eneste streng kan tildeles et tal mellem 0, 1, ..., n-1, således at
  - mindst to tal anvendes
  - $x + y - 2z \equiv 0 \pmod{n}$
    - hvor x og y er understrengene
    - z er overstrengen


0_1

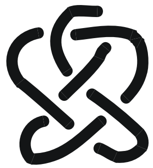

3_1


4_1


5_1

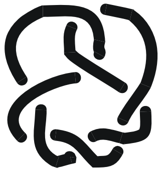

5_2


6_1

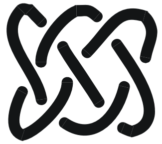

6_2

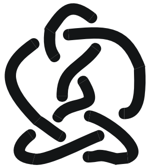

6_3


7_1


7_2

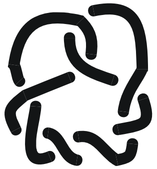

7_3

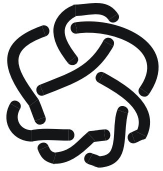

7_4

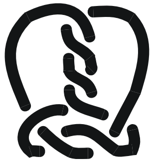

7_5

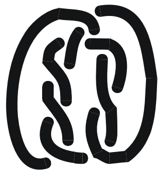

7_6


7_7


8_1


8_2

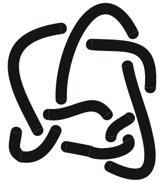

8_3

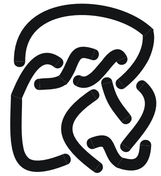

8_4


8_5


8_6


8_7


8_8

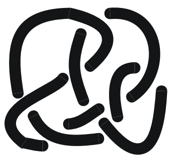

8_9


8_{10}


8_{11}


8_{12}


8_{13}


8_{14}


8_{15}

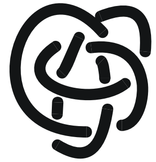

8_{16}

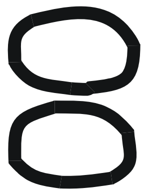

8_{17}


8_{18}


8_{19}

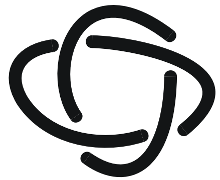

8_{20}


8_{21}

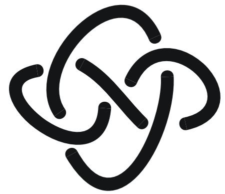


0^2_1

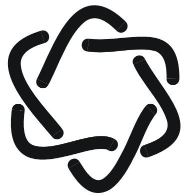
2^2_1



4^2_1

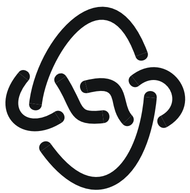


5^2_1



6^2_1

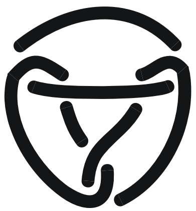
6^2_2



6^2_3

6^3_1

6^3_2



6^3_3

Lord Kelvin's atomteori

- Atomer er (prim)knuder i æteren
- Atomer kombineres til molekyler vha. splejsning
- Isotope knuder svarer til ens atomer

- Så: Primknudetabel = Det periodiske system

Desværre...

- Æteren findes ikke
  - Michelson-Morley, Einstein
- Atomet har en indre struktur
  - Thompson, Rutherford
- Et molekyles egenskaber afhænger ikke kun af antallet af atomer, men også deres placering
  - splejsning er associativ og kommutativ

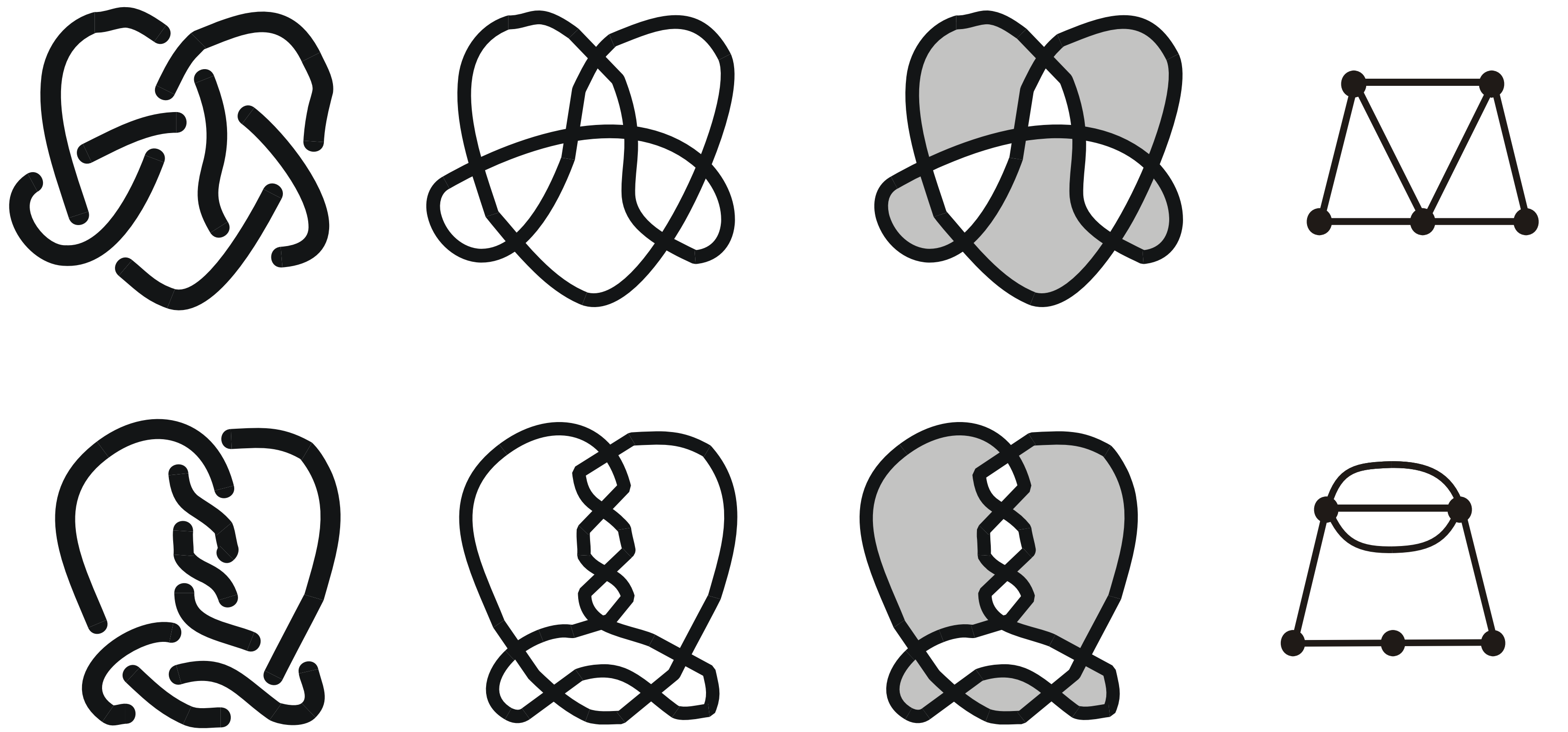
- men ideen er god nok

- Reduktion af 'materie' til geometri:

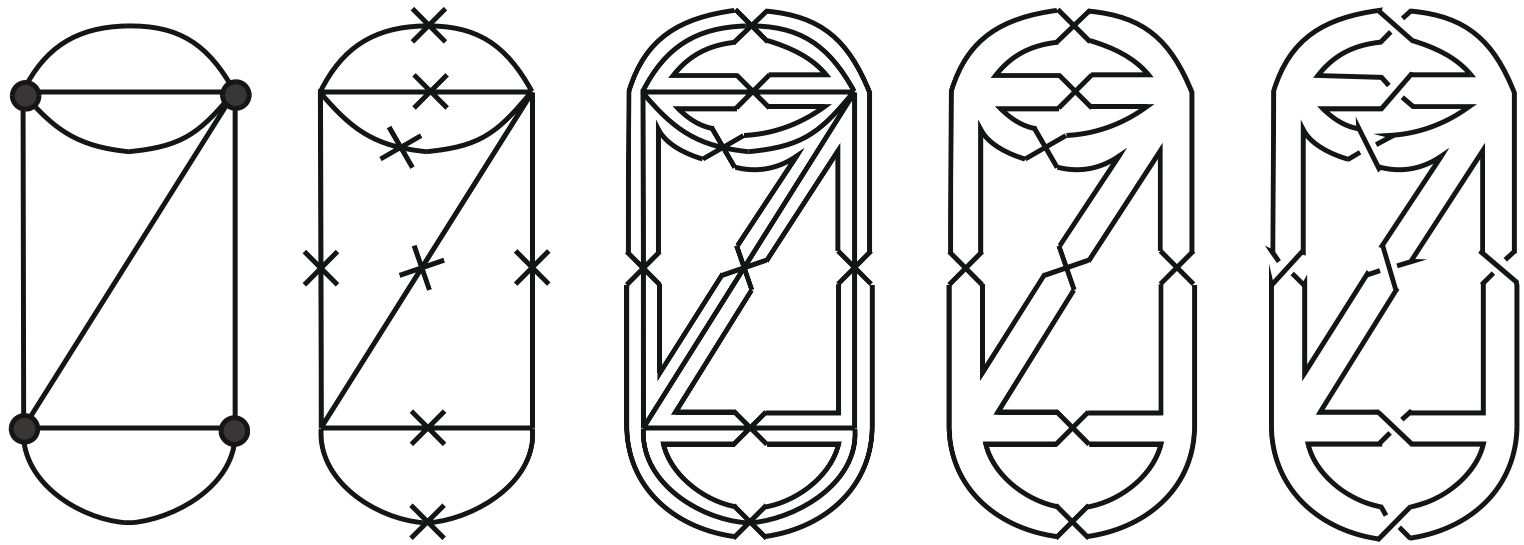
- Gravitation er krumning af rumtiden
  - den generelle relativitetsteori

- Moderne højenergifysik
  - kvantefeltteori
  - superstrenge

Fra knudediagram til graf



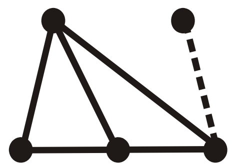
Fra graf til knudediagram



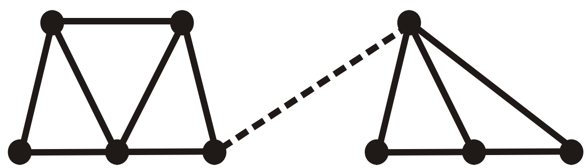
Knudeklassifikation

- Tegn samtlige grafer med *n* kanter
- Lav disse om til knudediagrammer

Visse typer grafer kan udelukkes, da knudediagrammerne kan reduceres

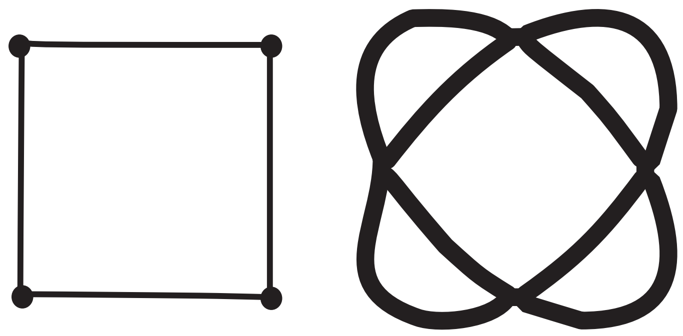


Graf med endekant

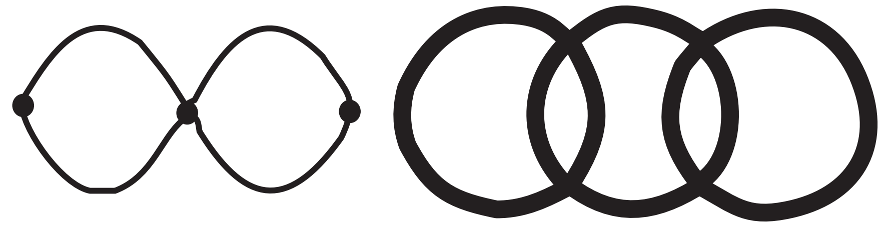


Graf med bro

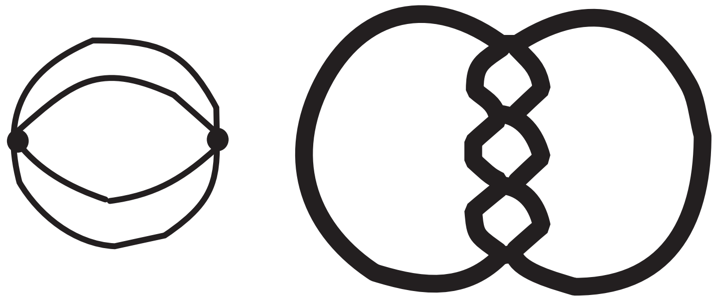
4 krydsninger



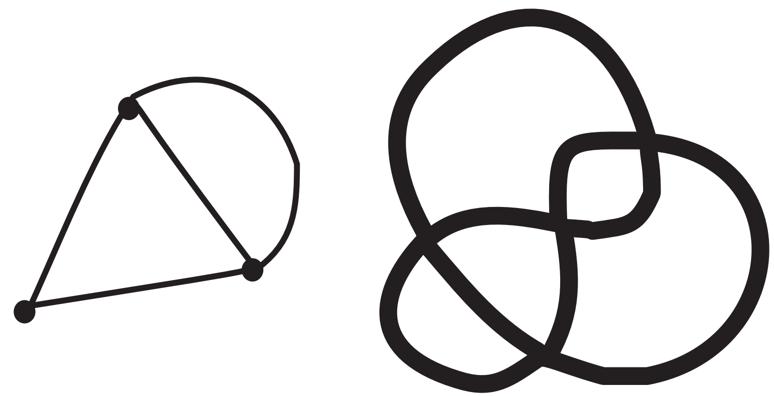
a



b



c

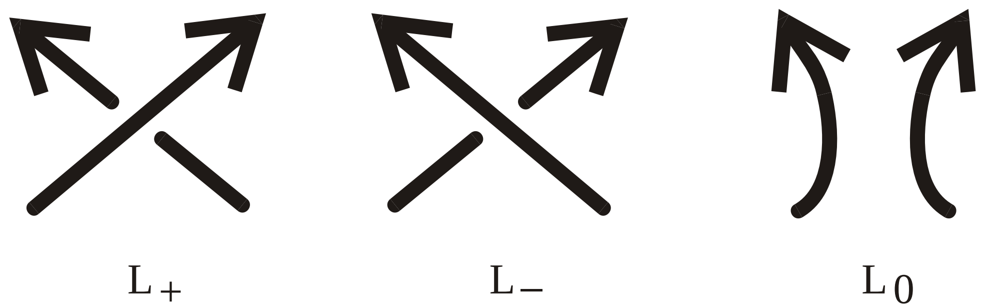


d

Jones-polynomiet

Opfundet af Vaughn Jones i 1984.

Garnnøgle-relation:

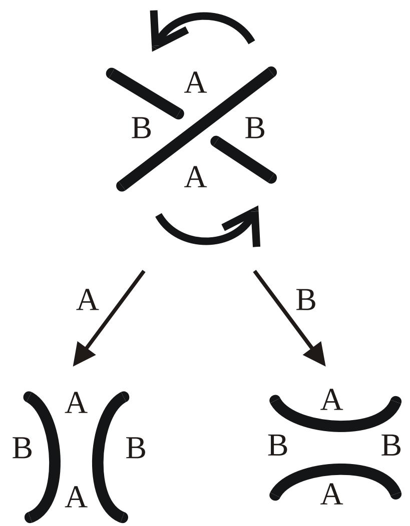


$$\frac{1}{t}\cdot V(L_+) - t\cdot V(L_-) = (\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})\cdot V(L_0)$$

Kauffman-polynomiet

- En alternativ måde af definere Jones-polynomiet på.
- Stammer fra Louis Kauffman, 1985.
- Er en rekursiv definition:
  - Fjern (opsplit) en krydsning
  - Dette giver to nye knuder med en krydsning mindre
  - Beregn Kauffman-polynomiet for disse

Kauffman-polynomiet



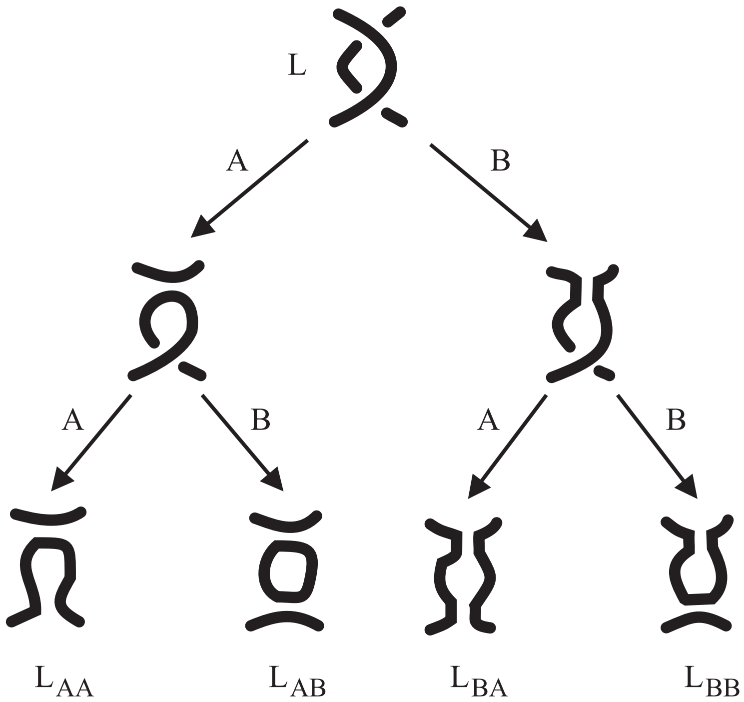
A-split B-split

Kauffman-polynomiet

- $P(U) = \mathbf{1}$
- $P(L) = A \cdot P(L_A) + B \cdot P(L_B)$
- $P(L \coprod U) = C \cdot P(L)$

- Bestem *A*, *B* og *C*, så vi får en invariant.

Reidemeister-træk 2



Reidemeister-træk 2

$$
\begin{aligned}
P(L) &= A \cdot P(L_A) + B \cdot P(L_B) \\
&= A^2 \cdot P(L_{AA}) + AB \cdot P(L_{AB}) + BA \cdot P(L_{BA}) + B^2 \cdot P(L_{BB}) \\
&= A^2 \cdot P(L_{AA}) + AB \cdot P(L_{AA} \coprod U) + BA \cdot P(L) + B^2 \cdot P(L_{AA}) \\
&= (A^2 + ABC + B^2) \cdot P(L_{AA}) + AB \cdot P(L)
\end{aligned}
$$

$$A^2 + ABC + B^2 = \mathbf{0} \quad \text{og} \quad AB = \mathbf{1}$$

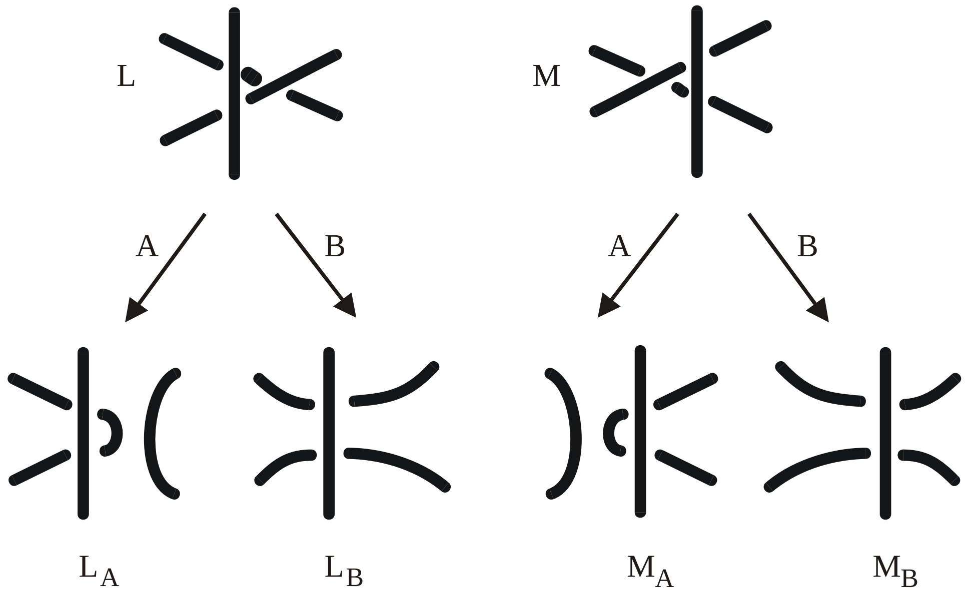
Reidemeister-træk 2

Dette opfyldes, hvis vi vælger:

$$B = A^{-1}$$

$$C = -A^{2} - A^{-2}$$

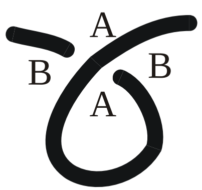
Reidemeister-træk 3



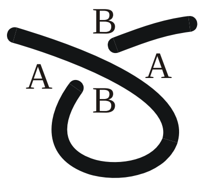
$$P(L) = A \cdot P(L_A) + A^{-1} \cdot P(L_B)$$

$$= A \cdot P(M_A) + A^{-1} \cdot P(M_B) = P(M)$$

Reidemeister-træk 1



A-løkke



B-løkke

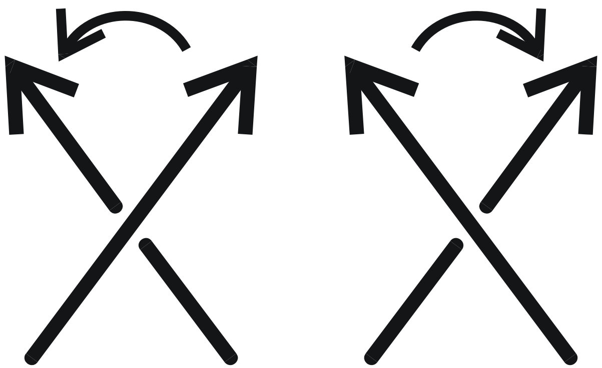
$$P(L^A) = -A^{-\mathbf{3}} \cdot P(A)$$

$$P(L^B) = -A^{\mathbf{3}} \cdot P(A)$$

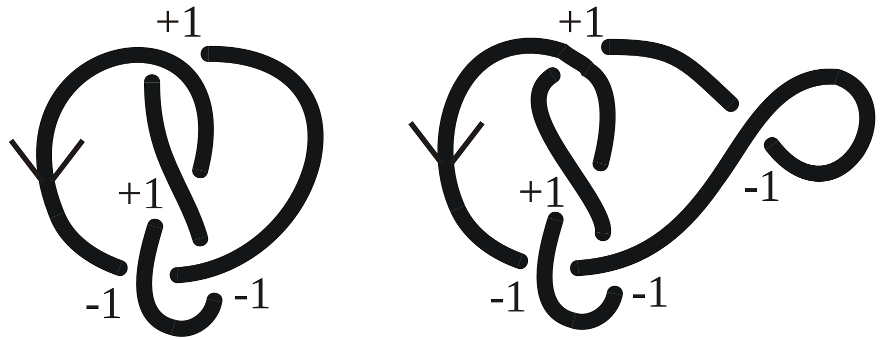
Dette er ikke særligt invariant, så

- justér med en størrelse, vridtallet.
- erstat *A* med $t^{-\mathbf{1}/\mathbf{4}}$
- og få Jones-polynomiet

Vridtallet



+1 -1



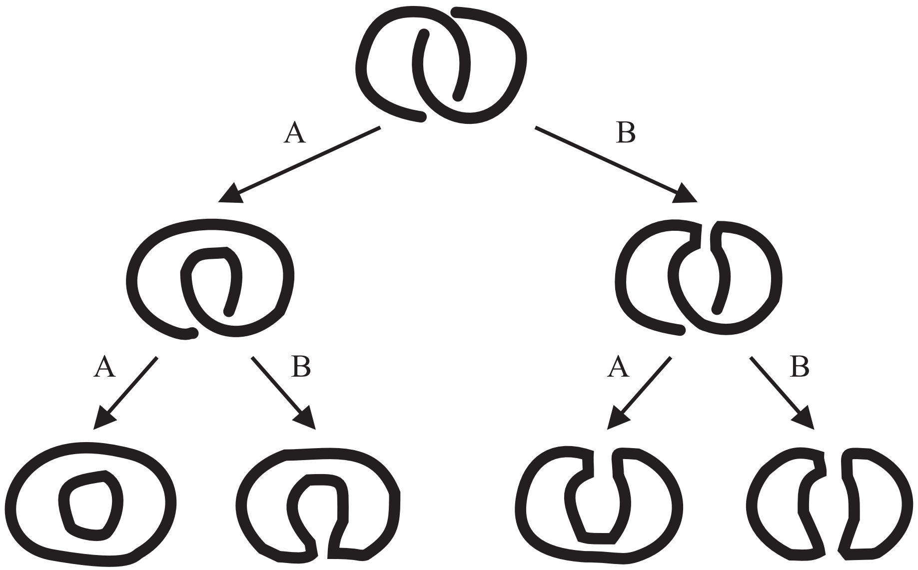
Hopf-lænken

$$P(H) = AP(H_A) + BP(H_A)$$

$$= A^2P(H_{AA}) + P(H_{AB}) + P(H_{BA}) + B^2P(H_{BB})$$

$$= A^2P(U \coprod U) + P(U) + P(U) + B^2P(U \coprod U)$$

$$= A^2(-A^2 - A^{-2}) + 1 + 1 - A^{-2}(-A^2 - A^{-2}) = -A^4 - A^{-4}$$



Trekløverknuden

$$V(\mathbf{3_1}) = -t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}$$

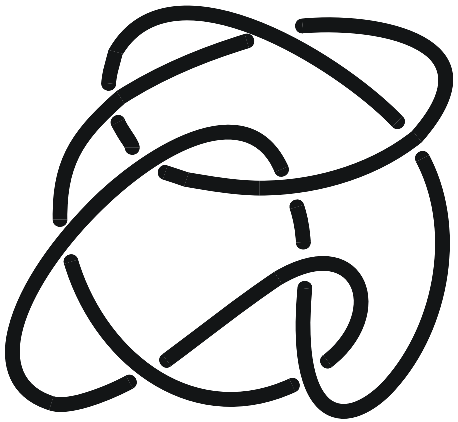
$$V(\mathbf{3_1}^*) = -t + t^{3} - t^{4}$$

Jones-polynomiet kan altså skelne en knude og dens spejlbillede

$$V(\mathbf{4_1}) = t^{-2} - t^{-1} + \mathbf{1} - t + t^{2}$$

Jones-polynomiet for en achiral knude er *palindromisk*.

Modeksempel



$$V(9_{42}) = t^{-3} - t^{-2} + t^{-1} - 1 + t - t^{2} + t^{3}$$

Jones-polynomiet er palindromisk,

men

knuden er ikke achiral.

Andre anvendelser

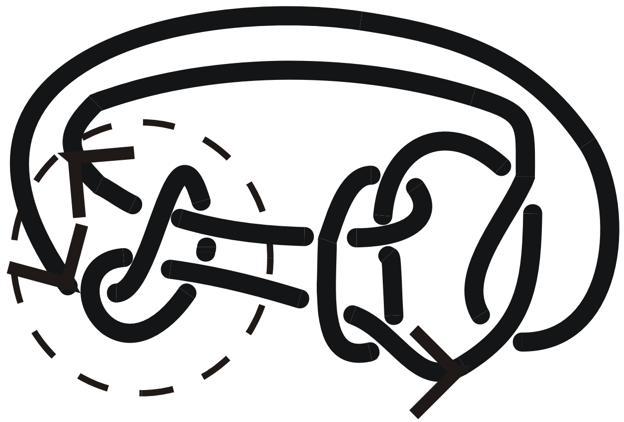
- Man kan give et **let** bevis for Taits formodning ved at bruge Jones-polynomiet
- Krydstallet = spændet af Jonespolynomiet (for en alternerende knude)
- Kan anvendes til at bevise, at en knude ikke er alternerende

En ikke-alternerende knude

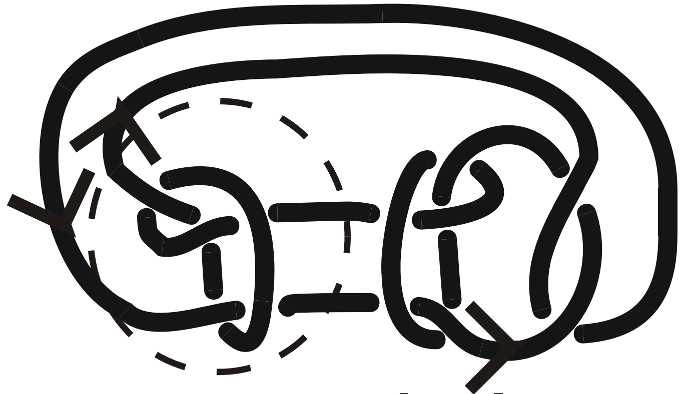
- 8_{19} er ikke alternerende
- $V(8_{19}) = - t^8 + t^5 + t^3$

- Spændet er 5
- Krydstallet er 8

Mutant-knuder



Kinoshita-Terasaka-knuden

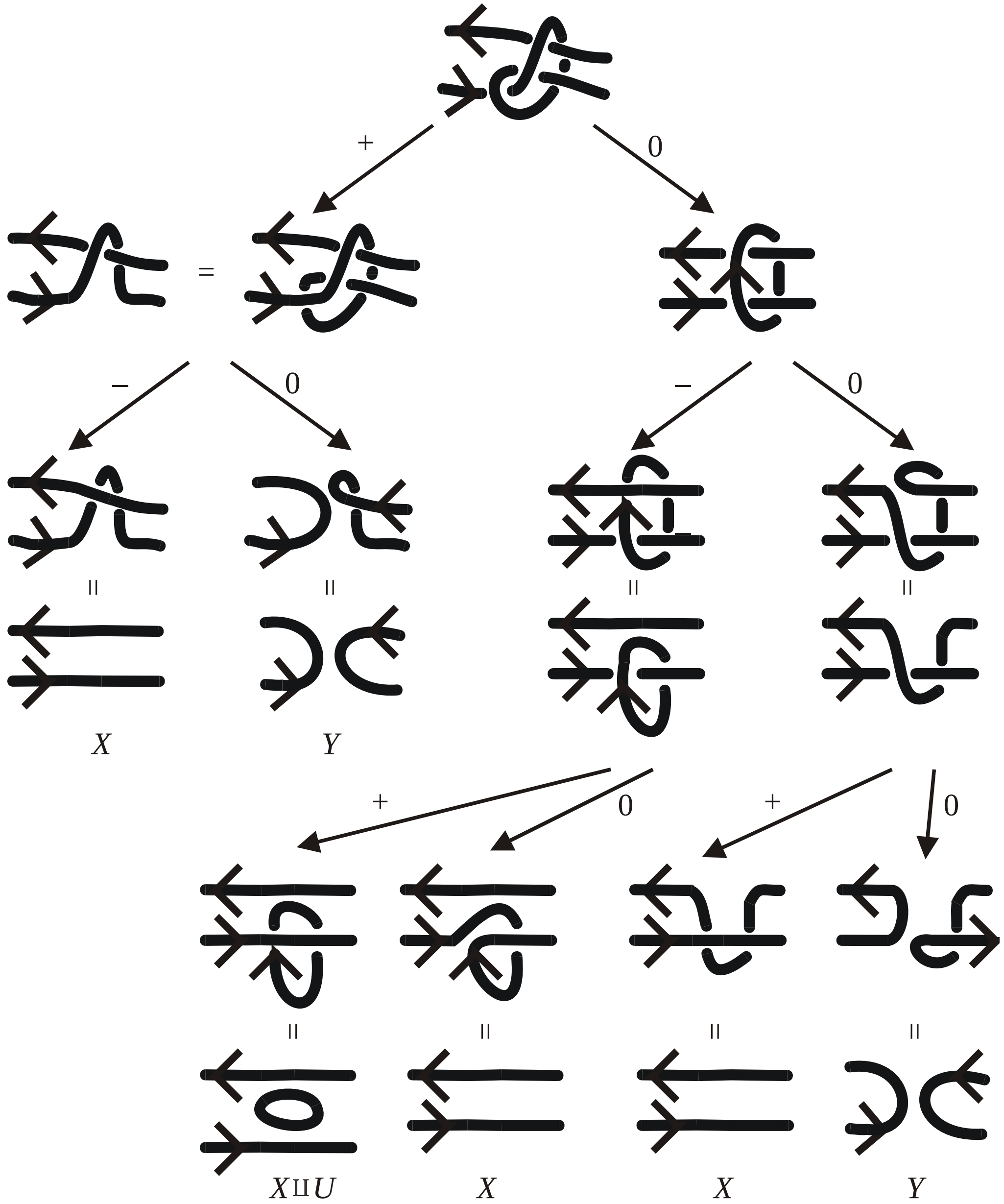


Conway-knuden

Begge knuder har Jones-polynomiet:

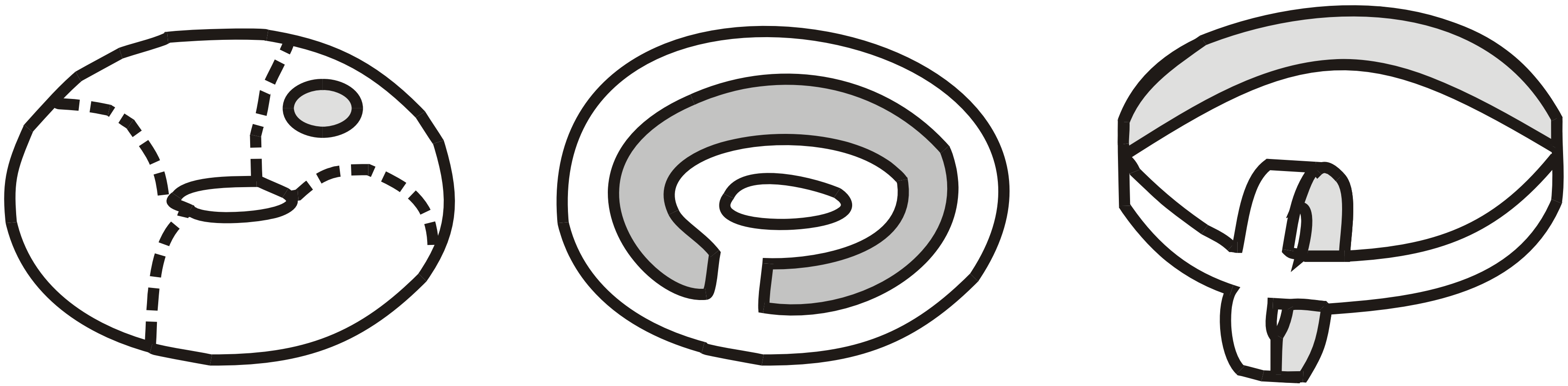
$$-t^{-4}+2t^{-3}-2t^{-2}+2t^{-1}+t^{2}-2t^{3}+2t^{4}-2t^{5}+t^{6}$$

Jones-polynomiet kan altså ikke skelne mellem alle knuder.

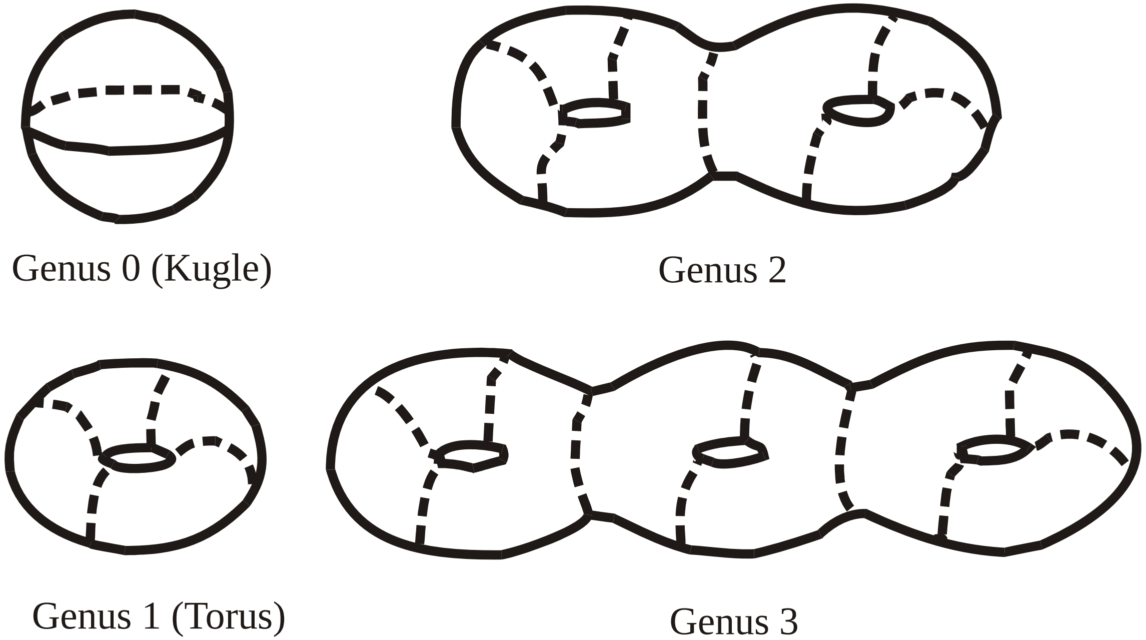


+
0
=
−
0
−
0
X
Y
+
0
+
0
X⊔U
X
X
Y

Topologi ("gummigeometri")



Klassifikation af lukkede flader



To lukkede flader er isotope, hvis de har samme genus.

Seifert-flade

Lav knuden i ståltråd, og dyp den i sæbevand.
Seifert-fladen er isotop med en lukket flade, hvori der er udskåret en eller flere skiver

Genus-invarianten

- Genus for en knude er genus for den tilsvarende Seifert-flade
- Genus viser sig at være en invariant

- g(Kinoshita-Terasaka) = 2
- g(Conway) = 3

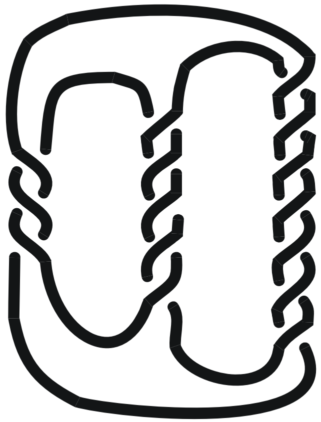
Conway-polynomiet

- John Conway, 1969

- Definition:
  - $\nabla(U) = 1$
  - $\nabla(L_+) - \nabla(L_-) = z\nabla(L_0)$

Conway-polynomiet

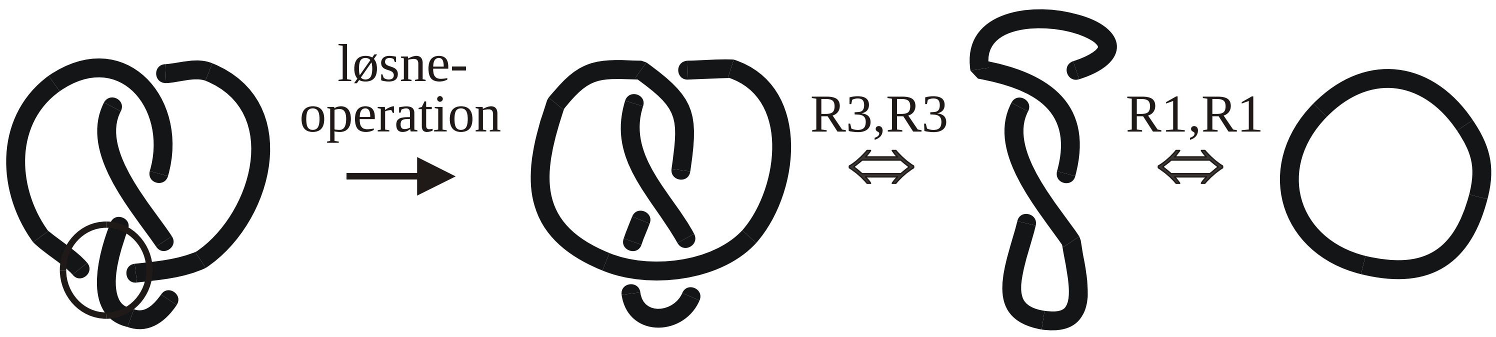
- Conway-polynomiet er en svag invariant
  - både Kinoshita-Terasaka- og Conway-knuden har Conway-polynomiet 1.
  - nedenstående knude har Conway-polynomiet 1 (som uknuden)



Løsnetallet

- Løsnetallet for en knude er det mindste antal krydsninger, der skal ændres (fra over- til underkrydsning, eller omvendt), for at knuden bliver uknuden

- Løsnetallet er en svært beregnelig invariant



Løsnetallet for 4_1 er 1

(Ovenstående viser, at løsnetallet er højst 1, og kun uknuden har løsnetallet 0)

Løsnetallet for 8_3 er 2
(Kanenobu & Murakami, 1986)

Scharlemann's sætning

Hvis en knude har løsnetallet 1, så er der tale om en primknude.

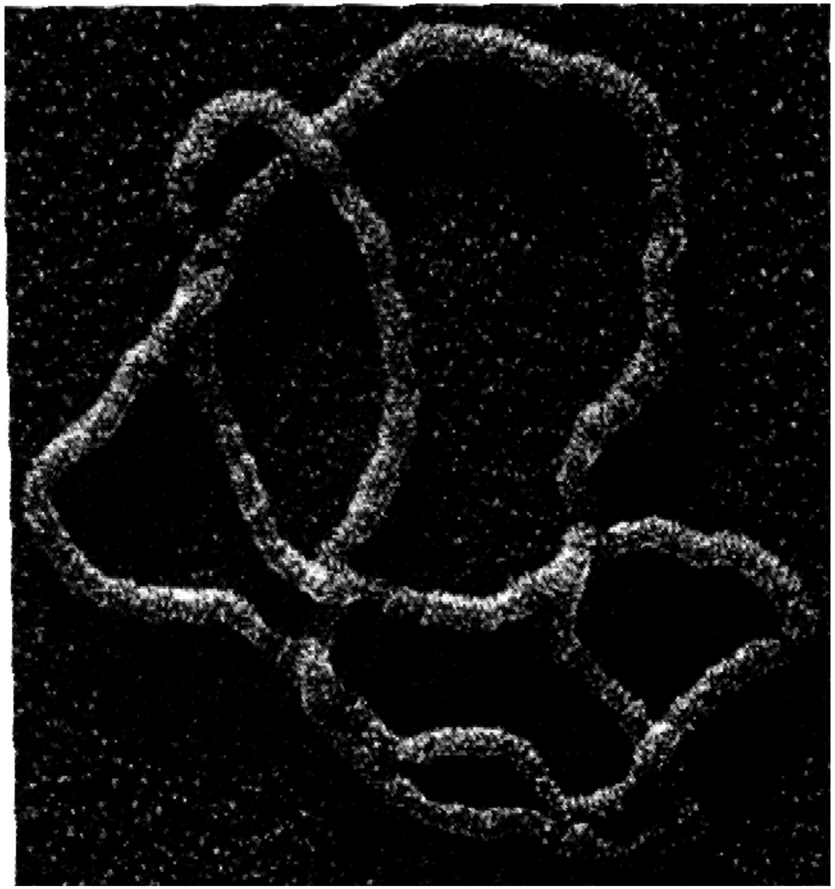
Martin Scharlemann, 1985

Problem med løsnetal

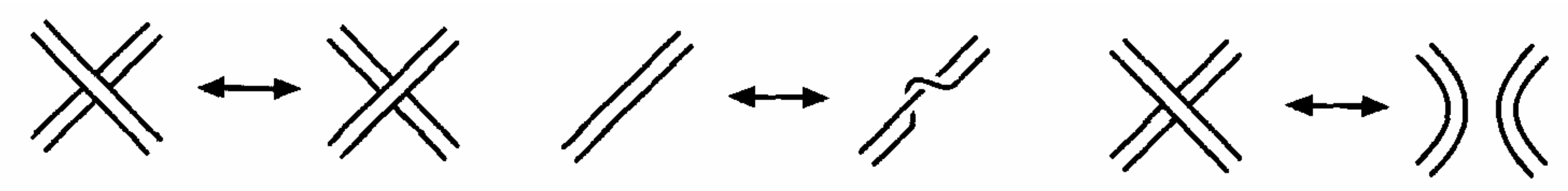
Venstre: Minimal projektion af 10_8. (3 løsneoperationer)
Højre: Ikke-minimal projektion af 10_8. (2 løsneoperationer)

10_8 har faktisk løsnetallet 2.

Knudret DNA



Enzymers virkning på DNA



Et knudret molekyle